





YALE UNIVERSITY

LIBRARY



STERLING

CHEMISTRY LABORATORY

WITHDRAW















# ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN UNTER MITWIRKUNG  
DER  
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

VON  
H. GEIGER

120. BAND

Mit 234 Textfiguren



SPRINGER-VERLAG, BERLIN

1943

Alle Rechte,  
insbesondere das Recht der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten

1

Z 37

V. 120



## Inhalt des 120. Bandes.

### 1. und 2. Heft.

(Abgeschlossen am 16. November 1942.)

	Seite
<b>Walter Glaser</b> , Über elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotations-symmetrie. (Aus dem Institut für theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule in Prag und dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G., Berlin-Siemensstadt.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Juni 1942) . .	1
<b>W. Riemann</b> , Aufnahmen von Elektronenlawinen in der Nebelkammer. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Juli 1942) . . . . .	16
<b>W. Mecklenburg</b> , Über das elektrostatische Emissions-Übermikroskop. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Juli 1942) . . . . .	21
<b>R. Rompe und W. Weizel</b> , Über die Bedeutung des <i>Steenbeckschen</i> Minimumprinzips. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1942) . . . . .	31
<b>M. Straumanis</b> (unter Mitarbeit von <b>A. Dravnieks</b> ), Die Steigerung der Intensität offener Röntgenröhren durch bewegliche Anoden. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 13. August 1942) . . . . .	47
<b>H. Bomke und H. Reddemann</b> , Absorption langsamer Neutronen in seltenen Erden und in Cadmium. (Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Mai 1942)	56
<b>Richard W. Schmidt</b> , Über Wachstums- und Abbauformen von Wolframkristallen, insbesondere über den Gleichstromeffekt. (Mitteilung aus der Osram G. m. b. H., K. G., Berlin.) Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Juli 1942) . . . . .	69
<b>K. M. Koch</b> , Ein neuer Versuch zur Deutung des <i>Meissner-Ochsenfeld-Effektes</i> und die „Keim“-Theorie der Supraleitung. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. September 1942.) . . . . .	86

	Seite
<b>Fr. Knauer</b> , Vergleichende Messungen des Aktivierungsquerschnittes von Jod in verschiedenen Formen für Neutronen. Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 30. Juli 1942) . . . . .	103
<b>R. Bechmann</b> , Längsschwingungen rechteckiger Quarzplatten. (Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. September 1942) . . . . .	107

### 3. und 4. Heft.

(Abgeschlossen am 12. Januar 1943.)

<b>E. Gora</b> , Quantentheorie der Strahlungsdämpfung. (Eingegangen am 31. Juli 1942) . . . . .	121
<b>J. Barnóthy</b> , Über den Wertebereich der physikalischen Mengen. I. (Eingegangen am 13. August 1942) . . . . .	148
<b>Willibald Jentschke</b> , Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit Neutronen. Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 18. September 1942) . . . . .	165
<b>Nobutsugu Koyenuma</b> , Beiträge zur Theorie der biologischen Strahlungswirkung. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1942) . . . . .	185
<b>Hans Heil</b> , Über eine neue Ionenquelle. Mit 12 Textabbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1942) . . . . .	212
<b>Manfred von Ardenne</b> , Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von H. Heil . . . . .	227
<b>R. Mannkopff</b> , Die Berechnung der Lichtbogentemperatur und das Stabilitätsproblem der Lichtbogensäule. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Oktober 1942) . . . . .	228
<b>W. Weizel und J. Fassbender</b> , Über die Vorgänge an der Anode eines zischenden Homogenkohlebogens. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Oktober 1942) . . . . .	252

### 5. und 6. Heft.

(Abgeschlossen am 23. Februar 1943.)

<b>Erwin W. Müller</b> , Zur Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bei der Feldemission. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Oktober 1942) . . . . .	261
<b>Erwin W. Müller</b> , Das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Oktober 1942) . . . . .	270



	Seite
<b>G. Haenzel</b> , Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1942) . . . . .	283
<b>R. Mannkopff</b> , Über den Energietransport durch Strahlung der Resonanzlinien in Gasen. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 25. November 1942) . . . . .	301
<b>Heinz Jagodzinski</b> , Über die Druckabhängigkeit der Anregungstemperatur in der Lichtbogensäule. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 25. November 1942) . . . . .	318
<b>A. Recknagel</b> , Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für Selbststrahler. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942) . . . . .	331
<b>R. Suhrmann und W. Kundt</b> , Über die Sekundäremission reiner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand und deren Durchlässigkeit für Sekundärelektronen. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942) . . . . .	363
<b>Heinz Born</b> , Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet. (Mitteilung aus dem Hochfrequenzlaboratorium der Siemens-Reiniger-Werke A.-G., Erlangen.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 7. November 1942) . . . . .	383
<b>Manfred von Ardenne</b> , Elektronenmikrokinematographie mit dem Universal-Elektronenmikroskop. Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Oktober 1942) . . . . .	397

## 7.—10. Heft.

(Abgeschlossen am 25. März 1943.)

<b>G. Bernardini</b> , Über die anomale Absorption in Luft und die Lebensdauer des Mesons. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1942) . . . . .	413
<b>W. Bothe</b> , Zur Methodik der Neutronensonden. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	437
<b>A. Flammersfeld, P. Jensen und W. Gentner</b> , Die Aufteilungsverhältnisse und Energietönungen bei der Uranspaltung. Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	450
<b>W. Fucks und H. Bongartz</b> , Zündkanalquerschnitt und Zündung mit querschnittsbegrenzter Bestrahlung. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	468
<b>Chr. Gerthsen und E. Grimm</b> , Der Ionisierungsaufwand von radioaktiven Rückstoßatomen. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 30. September 1942) . . . . .	476

<b>D. Haeman und O. Haxel</b> , Energie und Reichweite langsamer $\alpha$ -Strahlen. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	486
<b>O. Haxel und H. Volz</b> , Über die Absorption von Neutronen in wässrigen Lösungen. Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	493
<b>W. Heisenberg</b> , Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. (Eingegangen am 8. September 1942) . . . . .	513
<b>Werner Kolhörster</b> , Zur Ermittlung von Höhenstrahlenkoinzidenzen. (Mitteilung aus dem Institut für Höhenstrahlenforschung der Universität Berlin.) Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. September 1942) . . . . .	539
<b>H. Kopfermann und W. Paul</b> , Über den inversen Stark-Effekt der <i>D</i> -Linien des Natriums. Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juni 1942) . . . . .	545
<b>W. Kossel, I. Ackermann und G. Möllenstedt</b> , Symmetrisch angeregte Elektroneninterferenzen. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	553
<b>Helmuth Kulenkampff</b> , Betrachtungen über die harte Komponente der kosmischen Strahlung. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	561
<b>M. v. Laue</b> , Nochmals über Stromverteilung in Supraleitern. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juli 1942) . . . . .	578
<b>L. Leprince-Ringuet, E. Nageotte, S. Gorodetzky und R. Richard-Foy</b> , Direkte Massenbestimmung eines Mesotrons mit Hilfe des elastischen Stoßes. Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 7. September 1942) . . . . .	588
<b>J. Mattauch, H. Ewald, O. Hahn und F. Strassmann</b> , Hat ein Caesium-Isotop langer Halbwertszeit existiert? Ein Beitrag zur Deutung ungewöhnlicher Linien in der Massenspektrographie. (Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942) . . . . .	598
<b>E. Mollwo</b> , Zum Nachweis von Interferenzerscheinungen durch Streuteilchen im Interferenzfeld. Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1942) . . . . .	618
<b>B. Rajewsky</b> , Das Geiger-Müller-Zählrohr im Dienste des Bergbaues. Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. Februar 1943) . . . . .	627
<b>Georg Stetter</b> (nach Versuchen gemeinsam mit <b>Willibald Jentschke, Erich Schachinger †</b> und <b>Elfriede Maresch</b> ), Die Ionisation einzelner Alpha-Strahlen in verschiedenen Gasen. Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 9. September 1942) . . . . .	639
<b>Carlfridrich Weiss</b> , Zur Frage der als Normale festgelegten Radiumstandards. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Oktober 1942) . . . . .	652

## 11. und 12. Heft.

(Abgeschlossen am 6. April 1943.)

<b>W. Heisenberg</b> , Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. II. Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942.)	673
<b>U. Stille</b> , Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten. (Eingegangen am 1. Dezember 1942)	703
<b>Georg Wendt</b> , Zur Dioptrik elektronenoptischer Geräte mit beliebig gekrümmten Abbildungsachsen. Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1942)	720
<b>F. Möglich und R. Rompe</b> , Strahlungseigenschaften und Energieausbreitung bei dicht gelagerten, gleichartigen Atomen. Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1942)	741
<b>E. Götz</b> , Übermikroskopische Feinstrukturen an Glasbruchflächen. (Aus dem Forschungs-Institut der AEG.) Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 24. November 1942)	773
Autorenregister	778
Namenregister zu Band 116 bis 120	780





(Aus dem Institut für theoretische Physik der Deutschen Karls-Universität und Technischen Hochschule in Prag und dem Laboratorium für Elektronenoptik der Siemens & Halske A.-G. Berlin-Siemensstadt.)

## Über elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie.

Von Walter Glaser in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 18. Juni 1942.)

Für ein elektromagnetisches Abbildungsfeld mit zwei aufeinander senkrechten Symmetrieebenen wird der durch die Abweichung von der Rotationssymmetrie bedingte „axiale Astigmatismus“ untersucht und für ein typisches Magnetfeld der Radius des „Kreises der kleinsten Verwirrung“ sowie Dehnung und Scherung numerisch berechnet.

Daß die *praktisch* erreichte Auflösung der Durchstrahlungs-Elektronenmikroskope noch um zwei bis drei Größenordnungen über der Auflösungsgrenze für fehlerfreie Linsen liegt, hat seinen Grund eben in den beträchtlichen „Bildfehlern“ elektronenoptischer Linsen. Nun gibt eine mathematische Abschätzung der durch Elektronenbeugung und Öffnungsfehler bedingten Auflösungsgrenze aber auch für ein typisches Magnetfeld, wie es in den Polschuhobjektiven der Übermikroskope nach Ruska und v. Borries und in entsprechenden Objektiven ähnlicher Konstruktionen mit großer Annäherung verwirklicht ist, einen gegenüber den praktisch erreichten Auflösungen etwa um den Faktor 4 günstigeren Wert<sup>1)</sup>. Wenn es also nicht der Öffnungsfehler und die Beugung sind, welche derzeit das Auflösungsvermögen praktisch begrenzen, wird man daher noch andere Bildfehler als Ursache hierfür in die Betrachtung ziehen müssen. Scheidet man eine Dezentrierung der einzelnen Linsen untereinander aus, so kann man vermuten, daß die Voraussetzung der Rotationssymmetrie der Linsenfelder selbst, insbesondere der Objektive, sei es aus Gründen der mechanischen Fertigung, sei es durch eine magnetische Inhomogenität des Polschuhmaterials, in der Praxis nicht vollkommen erfüllt ist<sup>2)</sup>. Man wird daher den Einfluß einer Abweichung von der Rotationssymmetrie des Abbildungsfeldes auf die Begrenzung des Auflösungsvermögens zu untersuchen haben.

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu J. Dosse, ZS. f. Phys. **117**, 722, 1941. — <sup>2)</sup> Über die Technologie von Elektronenlinsen vgl. man auch E. Ruska, Arch. f. El. **36**, 431, 1942.

Die Abweichung von der Rotationssymmetrie nehmen wir aus Gründen der mathematischen Behandlung zunächst als klein an und setzen insbesondere voraus, daß das Abbildungsfeld wenigstens noch zwei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen besitzt. Wenn auch in der Praxis die Fehler nicht in dieser schematischen Weise auftreten werden, mag es doch von Wert sein, sich auf diese Weise wenigstens ein ungefähres Bild über die Größe der zu einer erreichten Auflösung gehörigen Abweichungen von der Dreh-symmetrie zu machen. Wir haben daher zunächst die elektrischen und magnetischen Abbildungsfelder mit zwei aufeinander senkrechten, durch die optische Achse gehenden Symmetrieebenen zu bestimmen, im Anschluß daran die Differentialgleichungen für die achsennahen Elektronenbahnen in derartigen Feldern aufzustellen und die Gesetze der elektronenoptischen Abbildung herzuleiten. Schließlich sollen die gefundenen Formeln zum Zwecke der numerischen Auswertung für das bereits früher untersuchte Magnetfeld mit glockenförmigem axialem Feldverlauf und einem bestimmten Unsymmetriegrad formelmäßig und numerisch ausgewertet werden.

Unter der Voraussetzung, daß die  $x - z$ - und  $y - z$ -Ebenen Symmetrieebenen des Feldes sind <sup>1)</sup>, folgt für das elektrische Potential  $\varphi(x, y, z)$  die Bedingung

$$\varphi(x, y) = -\varphi(-x, y), \quad \varphi(x, y) = \varphi(x, -y), \quad (1)$$

daher gilt für  $\varphi$  der Ansatz

$$\varphi = \Phi(z) + \Phi_{20}x^2 + \Phi_{02}y^2 + \dots \quad (2)$$

Aus der Quellen- und Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes, deren Bedingung

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3)$$

ist, folgt daher

$$\Delta \varphi = \Phi'' + 2\Phi_{20} + 2\Phi_{02} + \dots = 0$$

mit

$$\Phi_{20} = -\frac{1}{4}\Phi'' - \frac{1}{4}D, \quad \Phi_{02} = -\frac{1}{4}\Phi'' + \frac{1}{4}D, \quad (4)$$

wobei  $D(z)$  eine willkürliche Funktion von  $z$  ist, kann man für das Potential  $\varphi(x, y, z)$  so nach (2) schreiben

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(z) - \frac{1}{4}(\Phi'' - D)x^2 - \frac{1}{4}(\Phi'' + D)y^2 + \dots, \quad (5)$$

wobei  $\Phi(z)$  das Achsenpotential und  $D(z)$  eine willkürliche, die Abweichung von der Rotationssymmetrie bestimmende Funktion von  $z$  darstellen.

<sup>1)</sup> Eine der folgenden ähnliche Feldberechnung ist auch für Ablenkfelder erforderlich. Nur die Strahlrichtung ist gegenüber dem Feld eine andere. Man vgl. hierzu W. Glaser, ZS. f. Phys. **111**, 357, 1938; G. Wendt, Telefunkenröhre, H. 15, S. 100, 1939, sowie G. Wendt, ZS. f. Phys. **118**, 593, 1942.

Wenn die  $x - z$ - und  $y - z$ -Ebenen gleichfalls Symmetrieebenen des Magnetfeldes darstellen sollen, so müssen die Feldkomponenten  $H_x(x, y, z)$ ,  $H_y(x, y, z)$ ,  $H_z(x, y, z)$  folgende Symmetriebedingungen erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} H_x(x, y) &= -H_x(-x, y); & H_x(x, y) &= H_x(x, -y), \\ H_y(x, y) &= H_y(-x, y); & H_y(x, y) &= -H_y(x, -y), \\ H_z(x, y) &= H_z(-x, y); & H_z(x, y) &= H_z(x, -y). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Da das Magnetfeld wirbelfrei ist, muß ein skalares Potential  $\varphi_m$  existieren, aus welchem  $\mathfrak{H}$  nach den Gleichungen

$$H_x = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x}, \quad H_y = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}, \quad H_z = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial z} \quad (7)$$

hergeleitet werden kann. Die Bedingungen (6) haben für  $\varphi_m$  die Symmetrieeigenschaften

$$\varphi_m(x, y) = \varphi_m(-x, y); \quad \varphi_m(x, y) = \varphi_m(x, -y) \quad (8)$$

zur Folge. Man hat also für  $\varphi_m$  den Ansatz

$$\varphi_m = \Psi_0 + \Psi'_{20}(z)x^2 + \Psi'_{02}(z)y^2 + \dots \quad (9)$$

Nach (7) folgt hieraus

$$\left. \begin{aligned} H_z &= -\Psi'_0 - \Psi'_{20}x^2 - \Psi'_{02}y^2 + \dots, & H_x &= -2\Psi'_{20}x + \dots, \\ H_y &= -2\Psi'_{02}y + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Aus der Quellenfreiheit von  $H$  folgt nun

$$\Delta \varphi_m = 0 \quad \text{oder} \quad \Psi_{20} + \Psi'_{02} = -\frac{1}{2}\Psi''_0. \quad (11)$$

Man muß also setzen

$$\Psi'_{02} = -\frac{1}{4}\Psi''_0 + \frac{1}{4}\Delta(z), \quad \Psi_{20} = -\frac{1}{4}\Psi''_0 - \frac{1}{4}\Delta(z) \quad (12)$$

Wegen (10) bedeutet aber

$$\Psi'_0 = -H_z(0, 0, z) = -H(z).$$

Damit ergibt sich endgültig nach (10) und (12) für das gesuchte Magnetfeld

$$\left. \begin{aligned} H_z &= H - \frac{1}{4}(H'' - \Delta) x^2 - \frac{1}{4}(H'' + \Delta) y^2 + \dots, \\ H_x &= -\frac{1}{2}(H' - \Delta) x + \dots, \\ H_y &= -\frac{1}{2}(H' + \Delta) y + \dots, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wobei  $H(z)$  die  $z$ -Komponente des Magnetfeldes längs der optischen Achse und  $\Delta(z)$  eine die Abweichung von der Rotationssymmetrie kennzeichnende Funktion von  $z$  darstellen.

Für  $D = 0$  und  $\Delta = 0$  gehen die obigen elektrischen und magnetischen Felder in solche von rotationssymmetrischen Anordnungen über. Die Funktionen  $D(z)$  und  $\Delta(z)$  können nach (5) und (13) folgendermaßen definiert und im Prinzip gemessen werden:

$$D = 2 \frac{\varphi(r, 0, z) - \varphi(0, r, z)}{r^2}, \quad (14)$$

$$\Delta' = 2 \frac{H_z(r, 0, z) - H_z(0, r, z)}{r^2}. \quad (15)$$

Während in jeder zur Achse senkrechten Ebene im rotationssymmetrischen Feld die Kurven konstanten  $\varphi$ - bzw.  $H_z$ -Wertes Kreise sind, ergeben sich in unserem Falle hierfür nach (5) und (13) Ellipsen<sup>1)</sup>.

Aus dem Magnetfeld können wir nun das zugehörige Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  bestimmen, aus dem sich  $\mathfrak{H}$  gemäß

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (16)$$

ergibt. Bei Beschränkung auf die niedersten Glieder, wie wir sie für die Entwicklung der Gaußschen Dioptrik brauchen, erhält man

$$A_x = -\frac{1}{2} H y, \quad A_y = +\frac{1}{2} H x, \quad A_z = \frac{1}{2} \Delta x y. \quad (17)$$

Wir wollen im folgenden aus einem später ersichtlichen Grunde statt  $x$  und  $y$  die achsensenkrechten Koordinaten mit  $X$  und  $Y$  bezeichnen.

Die beiden Potentiale (5) und (17) haben wir nun in die Lagrangesche Funktion der Elektronenbewegung

$$F = \sqrt{\varphi(1 + X'^2 + Y'^2)} - \eta(A_x X' + A_y Y' + A_z), \quad \eta = \sqrt{\frac{e}{2m}} \quad (18)$$

einzusetzen und nach  $X, Y, X', Y'$  zu entwickeln. Man erhält so

$$F = \sqrt{\Phi} + \frac{1}{2} \sqrt{\Phi} (X'^2 + Y'^2) - \frac{\Phi'}{8\sqrt{\Phi}} (X^2 + Y^2) + \frac{\eta}{2} H (X'Y - XY') + \\ + \frac{D}{8\sqrt{\Phi}} (X^2 - Y^2) - \frac{\eta}{2} \Delta XY + \dots, \quad (19)$$

wobei die für die achsennahen Elektronenbahnen nicht mehr in Betracht kommenden Glieder höherer Ordnung durch Punkte angedeutet sind. Das Glied

$$S = \frac{D}{8\sqrt{\Phi}} (X^2 + Y^2) - \frac{\eta}{2} \Delta XY \quad (20)$$

<sup>1)</sup> Alles natürlich unter der Voraussetzung, daß man sich wie im folgenden auf achsennahe Gebiete beschränkt.



stellt die durch die Abweichung von der Rotationssymmetrie bedingte Störungsfunktion dar. Aus (19) folgen die achsennahen Elektronenbahnen in der Gestalt

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial X'} = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial Y'} = \frac{\partial F}{\partial Y}. \quad (21)$$

Damit sich für die ungestörten Bahnen Differentialgleichungen ergeben, welche jeweils nur eine der Koordinaten enthalten (*Lippichscher Satz*), müssen wir das Glied  $X'Y - XY'$  durch eine geeignete Drehung wegtransformieren.

Es sei  $r$  der Radiusvektor von der Achse zum Elektron. Es gilt dann mit den Bezeichnungen der Fig. 1, in welcher  $\gamma$  einen zunächst willkürlichen Drehwinkel darstellt:

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos \psi, & Y &= r \sin \psi, \\ x &= r \cos \chi, & y &= r \sin \chi, \\ \psi &= \chi + \gamma; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

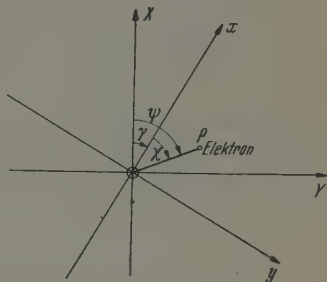


Fig. 1. Zur Strahlendrehung im Magnetfeld.

hieraus folgen zwischen gedrehtem System  $x, y$  und ungedrehtem System  $X, Y$  unmittelbar folgende Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} X^2 + Y^2 &= x^2 + y^2, \\ X'^2 + Y'^2 &= x'^2 + y'^2 + 2\gamma'(xy' - x'y) + \gamma'^2(x^2 + y^2), \\ XY' - X'Y &= xy' - x'y + \gamma'(x^2 + y^2). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Setzt man diese in

$$F = \sqrt{\Phi} + \frac{1}{2} \sqrt{\Phi} (X'^2 + Y'^2) - \frac{\Phi''}{8\sqrt{\Phi}} (X^2 + Y^2) + \frac{\eta}{2} H (X'Y - XY') + S \quad (24)$$

ein, so erhält man als Lagrangesche Funktion für das gedrehte System

$$F = \sqrt{\Phi} + \frac{1}{2} \sqrt{\Phi} (x'^2 + y'^2) + \left( \frac{\gamma'^2}{2} \sqrt{\Phi} - \frac{\Phi''}{8\sqrt{\Phi}} - \frac{\eta}{2} \gamma' H \right) (x^2 + y^2) + \left( \gamma' \sqrt{\Phi} - \frac{\eta}{2} H \right) (xy' - x'y) + S, \quad (25)$$

wobei  $S$  die auf das gedrehte System umgerechnete Störungsfunktion (20) darstellt.

Aus (25) erkennt man, daß das Koppelungsglied  $(xy' - x'y)$  verschwindet, wenn man

$$\gamma' \sqrt{\Phi} - \frac{\eta}{2} H = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma(z) = \frac{\eta}{2} \int_{z_0}^z \frac{H}{\sqrt{\Phi}} dz. \quad (26)$$

setzt. Für die Umrechnung der Störungsfunktion (20) folgt zunächst aus

$$\begin{aligned} X &= r \cos(\gamma + \chi), & Y &= r \sin(\gamma + \chi), \\ X^2 - Y^2 &= (x^2 - y^2) \cos 2\gamma - 2xy \sin 2\gamma, \\ 2XY &= (x^2 - y^2) \sin 2\gamma + 2xy \cos 2\gamma. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \left( \frac{D}{2\sqrt{\Phi}} \cos 2\gamma - \eta \Delta \sin 2\gamma \right) (x^2 - y^2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( \frac{D}{2\sqrt{\Phi}} \sin 2\gamma + \eta \Delta \cos 2\gamma \right) xy. \end{aligned} \quad (27)$$

Wir schreiben

$$S = \frac{1}{2} S_1 (x^2 - y^2) - S_2 xy, \quad (28)$$

wobei also  $S_1$  und  $S_2$  folgende als bekannt vorauszusetzende Funktionen von  $z$  bedeuten:

$$\begin{aligned} S_1(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{D}{2\sqrt{\Phi}} \cos 2\gamma - \eta \Delta \sin 2\gamma \right), \\ S_2(z) &= \frac{1}{2} \left( \frac{D}{2\sqrt{\Phi}} \sin 2\gamma + \eta \Delta \cos 2\gamma \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Mit diesen Funktionen lauten nach (21) und (25) die Differentialgleichungen der achsennahen Elektronenbahnen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} x' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' + \eta^2 H^2) x &= (S_1 x - S_2 y), \\ \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} y' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' + \eta^2 H^2) y &= -(S_1 y + S_2 x). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Aus (30) erkennt man, da im rein elektrischen Feld  $\gamma = 0$ , also  $S_2 = 0$  ist, daß in diesem Falle (30) in eine Differentialgleichung allein für  $x$  und in eine solche allein für  $y$  zerfällt. Sie lauten

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} x' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' - D) x &= 0, \\ \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} y' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' + D) y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

so daß ein Achsenpunkt durch die beiden Elektronenstrahlbüschel, die in je einer der Feldsymmetrieebenen liegen, in zwei verschiedene Bildpunkte

abgebildet wird. Man hat ein astigmatisches Bündel vor sich und man kann von den zwei verschiedenen „Brechkräften“ des Feldes in den beiden Symmetrieebenen sprechen. Im Gegensatz zum Verhalten im rein elektrischen Feld kann jedoch die Koppelung der beiden Koordinaten  $x$  und  $y$  in den Gleichungen (30) bei Vorhandensein eines Magnetfeldes nicht mehr beseitigt werden. Die Bewegung in der einen Symmetrieebene ( $x - z$ -Ebene) erfolgt also nicht mehr unabhängig von der Bewegung in der anderen Feldsymmetrieebene ( $y - z$ -Ebene) wie im elektrischen Feld. Es ist dies eine Folge der Schraubenbewegung der Elektronen, die bei einer Abweichung von der Rotationssymmetrie nicht mehr durch ein sich mitdrehendes System beseitigt werden kann.

Die Abweichungen  $D(z)$  und  $\Delta(z)$  von der Rotationssymmetrie sollen nun weiterhin als kleine Störungen vorausgesetzt werden. Die achsennahen Elektronenbahnen, welche für das rotationssymmetrische Feld ( $D = 0$ ,  $\Delta = 0$ )

$$x = x_0 g + x_B h, \quad y = y_0 g + y_B h \quad (32)$$

( $x_B, y_B$  = Blendenkoordinaten) lauten würden, werden durch die Abweichung von der Rotationssymmetrie ( $D \neq 0$ ,  $\Delta \neq 0$ ) zu

$$x = x_0 g + x_B h + \sigma, \quad y = y_0 g + y_B h + \tau \quad (33)$$

abgeändert, wobei zugleich mit  $S_1$  und  $S_2$  auch  $\sigma$  und  $\tau$  Null werden, so daß wir  $\sigma S_1$ ,  $\sigma S_2$ ,  $\tau S_1$  und  $\tau S_2$  als klein von zweiter Ordnung gegenüber  $S_1$  und  $S_2$  voraussetzen können. Setzt man daher (33) in (30) ein, so ergeben sich — da  $g$  und  $h$  Lösungen der homogenen Teile von (30) sind — für die Abweichungen  $\sigma$  und  $\tau$  die Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} \sigma' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' + \eta^2 H^2) \sigma &= [S_1(x_0 g + x_B h) - S_2(y_0 g + y_B h)], \\ \frac{d}{dz} \sqrt{\Phi} \tau' + \frac{1}{4\sqrt{\Phi}} (\Phi'' + \eta^2 H^2) \tau &= -[S_1(y_0 g + y_B h) + S_2(x_0 g + x_B h)]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Bezeichnet man die rechten Seiten von (34) mit  $f_1$  und  $f_2$ , also

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= x_0 S_1 g - y_0 S_2 g + x_B S_1 h - y_B S_2 h, \\ f_2 &= -y_0 S_1 g - x_0 S_2 g - y_B S_1 h - x_B S_2 h, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

so lautet die „mittels Variation der Konstanten“ bestimmte Lösung von (34), welche den Bedingungen

$$\sigma(z_0) = 0, \quad \sigma(z_B) = 0; \quad \tau(z_0) = 0, \quad \tau(z_B) = 0 \quad (36)$$

genügt, wegen

$$gh' - g'h = h'_0 \sqrt{\frac{\Phi_0}{\Phi}}, \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z h f_1 dz + h(z) \int_{z_B}^z g f_1 dz \right], \\ \tau &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z h f_2 dz + h(z) \int_{z_B}^z g f_2 dz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Mit den Gleichungen (35) ergeben die Lösungen (38) für  $\sigma$  und  $\tau$  die Ausdrücke:

$$\sigma = a_1 x_0 - a_2 y_0 + \alpha_1 x_B - \alpha_2 y_B, \quad \tau = a_2 x_0 - a_1 y_0 - \alpha_2 x_B - \alpha_1 y_B, \quad (39)$$

wobei  $a_1(z)$ ,  $a_2(z)$ ,  $\alpha_1(z)$  und  $\alpha_2(z)$  folgende Funktionen von  $z$  bedeuten:

$$\left. \begin{aligned} a_1(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_1 g h dz + h(z) \int_{z_B}^z S_1 g^2 dz \right], \\ a_2(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_2 g h dz + h(z) \int_{z_B}^z S_2 g^2 dz \right], \\ \alpha_1(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_1 h^2 dz + h(z) \int_{z_B}^z S_1 g h dz \right], \\ \alpha_2(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_2 h^2 dz + h(z) \int_{z_B}^z S_2 g h dz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_1 h^2 dz + h(z) \int_{z_B}^z S_1 g h dz \right], \\ \alpha_2(z) &= \frac{1}{h'_0 \sqrt{\Phi_0}} \left[ g(z) \int_{z_0}^z S_2 h^2 dz + h(z) \int_{z_B}^z S_2 g h dz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Die achsennahen Elektronenbahnen können mit (40) und (41) nach (33) und (39) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$\left. \begin{aligned} x &= (g + a_1) x_0 - a_2 y + (h + \alpha_1) x_B - \alpha_2 y_B \\ y &= (g - a_1) y_0 - a_2 x_0 - \alpha_2 x_B + (h - \alpha_1) y_B. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (g + a_1) x_0 - a_2 y_0 \quad \text{und} \quad x_B = r_B \cos \varphi, \\ \eta &= (g - a_1) y_0 - a_2 x_0 \quad \quad \quad y_B = r_B \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

so lauten die Aberrationskurven in der Ebene  $z = z$

$$\left. \begin{aligned} x - \xi &= (h + \alpha_1) r_B \cos \varphi - \alpha_2 r_B \sin \varphi, \\ y - \eta &= -\alpha_2 r_B \cos \varphi + (h - \alpha_1) r_B \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$



Man erkennt, daß die Gleichungen (44) bei variablem  $\varphi$  eine Ellipse mit dem Mittelpunkt  $\xi, \eta$  darstellen, wenn man sie nach  $\cos \varphi$  und  $\sin \varphi$  auflöst und  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$  setzt. Hat man allgemein die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \varphi + b \sin \varphi, \\ y &= c \cos \varphi + d \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

so ist der Winkel  $\vartheta$ , den die Hauptachsen der dadurch dargestellten Ellipse mit der  $x$ -Achse bilden, durch

$$\operatorname{tg} 2 \vartheta = -2 \frac{bd + ac}{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}$$

gegeben und mit  $\delta = ad - bc$  und  $s = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  folgt für die beiden Hauptachsen  $A_1$  und  $A_2$

$$A_{1,2} = \frac{1}{2} (s \pm \sqrt{s^2 - 4 \delta^2}).$$

In unserem Falle ergibt sich, wie durch Vergleich von (44) mit (45) folgt,

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 2 \vartheta &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\ A_1 &= r_B \sqrt{h^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2h \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \\ A_2 &= r_B \sqrt{h^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2h \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Für einen Achsenpunkt  $x_0 = 0, y_0 = 0$  wird auch  $\xi = 0, \eta = 0$ , d. h. der Mittelpunkt der „Bildellipse“ fällt gleichfalls auf die Achse.

Wir sehen also, daß infolge der Abweichung von der Rotationssymmetrie ein Achsenpunkt nicht wieder stigmatisch in einem Achsenpunkt abgebildet wird, sondern in jeder achsensenkrechten Auffangebene entsteht als „Bild“ eine Ellipse, deren Hauptachsen durch (46) gegeben sind und also dem Blendenradius proportional sind. Wir wollen diese durch die Abweichung von der Rotationssymmetrie bedingte Erscheinung „axialen Astigmatismus“ nennen, da er im Gegensatz zu dem gleichnamigen Bildfehler dritter Ordnung rotationssymmetrischer Felder auch für Achsenpunkte nicht verschwindet. Für besondere Lagen der Auffangebene kann diese Ellipse in eine ihrer Hauptachsen oder in einen Kreis ausarten. Dieser „Kreis der kleinsten Verwirrung“ wird der Ersatz für den Gaußschen Bildpunkt bei rotationssymmetrischen Feldern sein. Der Gaußsche Bildpunkt  $z_1$  des rotationssymmetrischen Feldes ist durch  $h(z_1) = 0$  gegeben. Gerade aber für  $h(z_1) = 0$  wird nach (46)  $A_1 = A_2$ , d. h. die Astigmatismusellipse geht in den Kreis der kleinsten Verwirrung über. Der Radius  $r_A$  desselben ist somit durch

$$r_A = r_B \sqrt{\alpha_1^2(z_1) + \alpha_2^2(z_1)} \quad (47)$$

gegeben, wobei die Größen  $\alpha_1(z_1)$  und  $\alpha_2(z_1)$  nach (41) folgendermaßen dargestellt sind:

$$\alpha_1 = \frac{V}{h_0 \sqrt{\Phi_0}} \int_{z_0}^{z_1} S_1 h^2 dz, \quad \alpha_2 = \frac{V}{h_0 \sqrt{\Phi_0}} \int_{z_0}^{z_1} S_2 h^2 dz \quad (48)$$

und  $S_1$  und  $S_2$  durch Gleichung (29) definiert werden.

Betrachtet man die Abbildung eines nicht auf der Achse liegenden Punktes, so befindet sich nach (43) der Mittelpunkt  $\xi, \eta$  des zu  $x_0, y_0$  gehörigen ellipsenförmigen Bildscheibchens im Punkte

$$\begin{aligned} \xi &= (V + a_1) x_0 - a_2 y_0, \\ \eta &= (V - a_1) y_0 - a_2 x_0, \end{aligned} \quad (49)$$

wobei die Größen  $a_1(z)$  und  $a_2(z)$  nach (41) gegeben sind. Bei der Abbildung auf die Ebene, wo die Bildscheibchen kreisförmig werden und den Radius (47) haben, lauten sie wegen  $h(z_1) = 0$

$$a_1(z_1) = \frac{V}{h_0 \sqrt{\Phi_0}} \int_{z_0}^{z_1} S_1 g h dz, \quad a_2(z_1) = \frac{V}{h_0 \sqrt{\Phi_0}} \int_{z_0}^{z_1} S_2 g h dz. \quad (50)$$

Die Koordinaten  $\xi, \eta$  aus (49) treten in unserem Falle an die Stelle des Gaußschen Dingpunktes für das rotationssymmetrische Feld. Zwischen den Dingpunktskoordinaten  $x_0, y_0$  und den „Bildpunktskoordinaten“  $\xi, \eta$  besteht also im allgemeinen ein linearer (affiner) Zusammenhang. Um den Einfluß der einzelnen Koeffizienten zu erkennen, ist es am einfachsten, die zugehörige Verzerrungsmatrix zu bilden. Es folgen so aus (49) für die Dehnungen  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  in den beiden Symmetrieebenen

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x_0} = V + a_1, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \eta}{\partial y_0} = V - a_1. \end{aligned} \quad (51)$$

Es sind also die Abbildungsmaßstäbe  $\varepsilon_x$  und  $\varepsilon_y$  in den beiden Symmetrieebenen verschieden, so daß das Bild in der einen Richtung gedehnt, in der anderen gestaucht erscheint. Für die Winkeländerung  $\gamma_{xy}$  eines in der Dingebene rechtwinkligen Netzes findet man

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y_0} + \frac{\partial \eta}{\partial x_0} = -2 a_2. \quad (52)$$

Im Magnetfeld ( $a_2 \neq 0$ ) ist also außer diesen beiden verschiedenen *Dehnungen* (51) auch noch eine *Scherung* (52) vorhanden. Ein quadratisches Netz wird sonach in etwas übertriebener Darstellung entsprechend Fig. 2 abgebildet.

Den Einfluß einer Abweichung von der Rotationssymmetrie wollen wir nun für ein bestimmtes Abbildungsfeld<sup>1)</sup>, das nach den Messungen von Dosse<sup>2)</sup> den tatsächlichen Verhältnissen in den Objektiven des Übermikroskops genügend nahekommt, numerisch bestimmen, indem wir den auf die Dingenbene bezogenen Radius des Kreises der kleinsten Verwirrung  $\delta_A = \frac{r_A}{V}$  nach (47) berechnen. Wir legen also den Rechnungen folgenden Feldverlauf zugrunde:

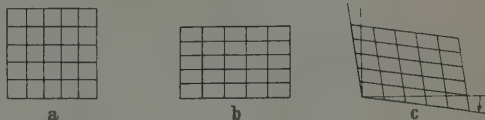


Fig. 2. Abbildung eines quadratischen Netzes a) bei gestörter Drehsymmetrie: b) im rein elektrischen Feld, c) im magnetischen Feld.

$$H(z) = \frac{H_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}. \quad (53)$$

Für die Funktion  $\Delta(z)$ , welche die Abweichung von der Rotationssymmetrie bestimmt, ist nun eine Annahme nötig. Die einfachste wäre wohl nach (13)  $\Delta(z)$  proportional  $H'(z)$ , also

$$\Delta(z) = QH'(z) \quad (Q \text{ Proportionalitätskonstante})$$

zu setzen. Hierbei ergeben sich jedoch für die Ausrechnung sehr unübersichtliche Integrale, und auch der „Unsymmetrie-Faktor  $Q$ “ erhält keine einfache anschauliche Bedeutung.

Wir setzen daher im folgenden

$$\Delta(z) = \frac{QH'}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}, \quad (54)$$

nehmen also an, daß die Abweichung  $\Delta(z)$  von der Rotationssymmetrie stärker als  $QH'(z)$  nach beiden Feldseiten abfällt. Der dimensionslose Unsymmetriefaktor  $Q$  bedeutet dann nach (15)

$$Q = \frac{a^2}{r^2} \frac{H_z(0, r, 0) - H_z(r, 0, 0)}{H_0}, \quad (55)$$

wobei also  $H_z(r, 0, 0)$  den Feldwert  $H_z$  in einer durch die Feldmitte ( $z = 0$ ) gehenden achsensenkrechten Ebene auf der  $x$ -Achse in der Achsenentfernung  $r$  bedeutet.  $H_z(0, r, 0)$  ist der Wert der  $z$ -Komponente des Magnetfeldes in der Entfernung  $r$  auf der  $y$ -Achse in der gleichen Ebene.  $H_0$  ist schließlich

<sup>1)</sup> W. Glaser, ZS. f. Phys. 117, 285, 1941. — <sup>2)</sup> J. Dosse, ebenda 117, 722, 1941, insbesondere Fig. 1, S. 728.

der Feldwert in der Feldmitte (siehe Fig. 3). Da  $H_z(0, r, 0) - H_z(r, 0, 0)$  proportional zu  $r^2$  ist, fällt natürlich  $r^2$  aus (55) heraus. Wir verwenden

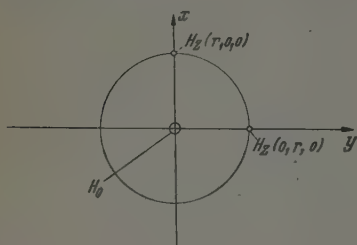


Fig. 3. Zur Erklärung des Unsymmetrie-Faktors

$$Q = \frac{a^3}{r^3} \frac{H_z(0, r, 0) - H_z(r, 0, 0)}{H_0}$$

im folgenden wieder<sup>1)</sup> den Parameter  $k^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U}$  und den durch  $z = a \cotg \varphi$  eingeführten Hilfs-  
winkel  $\varphi$ . In  $\varphi$  geschrieben lautet so  $\Delta$

$$\Delta = -\frac{2 Q H_0}{a} \sin^5 \varphi \cos \varphi. \quad (56)$$

Da die Strahlendrehung  $\gamma$  in dem Felde (53)<sup>1)</sup> durch

$$\gamma = -k(\varphi - \varphi_0) \quad (57)$$

gegeben ist, erhält man nach (29) für  $S_1$  und  $S_2$

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= -\frac{2Q}{a^2} k \sin 2k(\varphi - \varphi_0) \sin^5 \varphi \cos \varphi, \\ S_2 &= -\frac{2Q}{a^2} k \cos 2k(\varphi - \varphi_0) \sin^5 \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Die achsennahe Bahn  $h(z)$  ist mit  $\omega = \sqrt{k^2 + 1}$  durch

$$h(z) = \frac{\sin \varphi_B}{\sin \omega(\varphi_B - \varphi_0)} \frac{\sin \omega(\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}, \quad h'_0 = -\frac{\omega}{a} \frac{\sin \varphi_0 \sin \varphi_B}{\sin \omega(\varphi_B - \varphi_0)} \quad (59)$$

dargestellt. Damit ergeben sich schließlich nach (48) für  $\alpha_1(z_1)$  und  $\alpha_2(z_1)$  die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(z_1) &= \frac{k}{\omega} \frac{Q V}{\sin \omega(\varphi_0 - \varphi_B)} \frac{\sin \varphi_B}{\sin \varphi_0} \times \\ &\quad \times \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \omega(\varphi - \varphi_0) \sin 2k(\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi d\varphi, \\ \alpha_2(z_1) &= \frac{k}{\omega} \frac{Q V}{\sin \omega(\varphi_0 - \varphi_B)} \frac{\sin \varphi_B}{\sin \varphi_0} \times \\ &\quad \times \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \omega(\varphi - \varphi_0) \cos 2k(\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Die Ausrechnung der beiden Integrale

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \omega(\varphi - \varphi_0) \sin 2k(\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi d\varphi, \\ J_2 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sin^2 \omega(\varphi - \varphi_0) \cos 2k(\varphi - \varphi_0) \sin 2\varphi d\varphi \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. 117, 285, 1941, Gl. (46).



ergibt mit Rücksicht auf die Abbildungsgleichung  $\omega(\varphi_0 - \varphi_1) = \pi$

$$J_1 = -\frac{k^2 + 1}{8k(k+1)} \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \cos \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) -$$

$$-\frac{k^2 + 1}{8k(k-1)} \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \cos \left( 2\varphi_0 + \frac{k-1}{\omega} \pi \right),$$

$$J_2 = \frac{k^2 + 1}{8k(k+1)} \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \sin \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) -$$

$$-\frac{k^2 + 1}{8k(k-1)} \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \sin \left( 2\varphi_0 + \frac{k-1}{\omega} \pi \right).$$

Setzt man

$$A = \frac{\sin(k+1) \frac{\pi}{\omega}}{k+1}, \quad B = \frac{\sin(k-1) \frac{\pi}{\omega}}{k-1}, \quad (61)$$

so ergibt sich für  $J_1^2 + J_2^2$

$$J_1^2 + J_2^2 = \frac{(k^2 + 1)^2}{64k^2} \left[ A^2 + B^2 + 2AB \cos \left( 4\varphi_0 - \frac{2\pi}{\omega} \right) \right]$$

und der auf die Dingenbene bezogene Radius des astigmatischen Zerstreuungskreises wird somit nach (47) und (60)

$$\delta_A = \frac{Qr_B}{8} \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sin \omega(\varphi_0 - \varphi_B)} \frac{\sin \varphi_B}{\sin \varphi_0} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \left( 4\varphi_0 - \frac{2\pi}{\omega} \right)}, \quad (62)$$

wobei die Größen  $A$  und  $B$  durch (61) gegeben sind. Für den Fall sehr hoher Vergrößerung  $\varphi_0 = \varphi_f = \frac{\pi}{\omega}$  und Blendenort in der Feldmitte  $\varphi_B = \frac{\pi}{2}$  erhält man

$$\delta_A = \frac{Qr_B}{8} \frac{\sqrt{k^2 + 1}}{\sin \frac{\omega\pi}{2} \sin \frac{\pi}{\omega}} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{2\pi}{\omega}}. \quad (63)$$

Ersetzt man schließlich den Blendenradius  $r_B$  noch gemäß  $\alpha = r_B h'_0$  durch die Apertur  $\alpha$ , so wird

$$\delta_A = \frac{\alpha Q}{8} \frac{a}{\sin^2 \varphi_0} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \left( 4\varphi_0 - \frac{2\pi}{\omega} \right)}. \quad (64)$$

Für den bei der Übermikroskopie wichtigen Fall sehr hoher Vergrößerung  $\varphi_0 = \frac{\pi}{\omega}$  ergibt sich mit  $f = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}}$  als Brennweite der Ausdruck

$$\delta_A = \frac{\alpha Q}{8} \frac{f}{\sin \frac{\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}} \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + 1}}}. \quad (65)$$

Gleichung (65) gilt für einen willkürlichen Wert des Systemparameters  $k^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U}$ . Seine Größe ergibt sich aus den Feld- und Betriebsdaten. Man arbeitet in der Übermikroskopie gewöhnlich bei Werten bis zu  $k^2 = 1,5$  (Normalwerte  $0,5 \dots 1$ ). Die Ausrechnung für diesen Wert ergibt nach (65) und (61)

$$\delta_A = 0,80 Q \alpha f. \quad (66)$$

Setzt man daher z. B.  $\alpha = 10^{-3}$  und  $f = 1$  mm, so wird  $\delta_A = 3 \cdot 10^{-4}$  Q mm; will man also z. B. eine Auflösung von einem Millionstel Millimeter, so darf die Feldunsymmetrie  $Q$  drei Promille nicht überschreiten. Schreibt man die Formel (65) in der Gestalt

$$\delta_A = \alpha f Q \cdot K(k^2), \quad (67)$$

so ist  $K(k^2)$  für hohe Vergrößerung allein eine Funktion des Parameters  $k^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U}$ , welche in Fig. 4 dargestellt ist. Sie nimmt von ihrem Werte 0,75 für  $k^2 = 0$  monoton mit wachsendem  $k^2$  ab und wird Null für  $k^2 \rightarrow \infty$ .

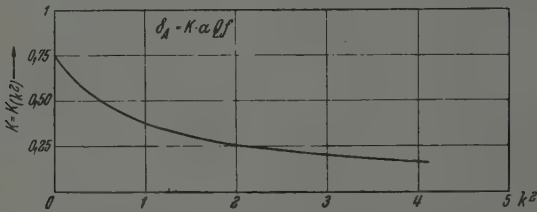


Fig. 4. Darstellung des objektbezogenen Kreises der kleinsten Verwirrung  $\delta_A$  für ein Magnetfeld mit dem Unsymmetriegrad  $Q$ , der Brennweite  $f$  und der Apertur  $\alpha$  als Funktion des Parameters

$$k^2 = \frac{e H_0^2 a^2}{8 m U} \text{ in der Gestalt } \frac{\delta_A}{\alpha Q f} = K(k^2).$$

Ebenso wie dies für  $\delta_A = \frac{r_A}{V}$  geschehen ist, kann nun auch für das betrachtete Feld (53) mit der Unsymmetrie (54) der durch

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y = 2 a_1 \quad (68)$$

gegebene Unterschied der Vergrößerung in den beiden Feldsymmetrieebenen und die Scherung

$$\gamma_{xy} = -2 a_2 \quad (69)$$

auf Grund der Formeln (50) berechnet werden. Man hat dazu nur außer  $h$  aus (59) für  $g$  die Funktion

$$g = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \omega (\varphi_0 - \varphi_B)} \cdot \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_B)}{\sin \varphi}$$

in die Integrale (50) einzusetzen. Man findet so nach einer etwas längeren Rechnung

$$\begin{aligned}
 a_1(z_1) = & \frac{QV}{8} \sqrt{k^2+1} \left[ \frac{1}{k-1} \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \cos \left( 2\varphi_0 + \frac{k-1}{\omega} \pi \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{k+1} \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \cdot \cos \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) \right] \operatorname{ctg} \omega (\varphi_0 - \varphi_B) - \\
 & - \frac{QV}{8} \left[ \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \sin \left( 2\varphi_0 + \frac{k-1}{\omega} \pi \right) - \right. \\
 & \left. - \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \sin \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) \right]; \quad (70)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2(z_1) = & \frac{QV}{8} \sqrt{k^2+1} \left[ \frac{1}{k+1} \sin \frac{k+1}{\omega} \sin \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{k-1} \sin \frac{k-1}{\omega} \sin \left( 2\varphi_0 + \frac{k+1}{\omega} \pi \right) \right] \cdot \operatorname{ctg} \omega (\varphi_B - \varphi_0) + \\
 & + \frac{QV}{8} \left[ \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \cos \left( 2\varphi_0 - \frac{k+1}{\omega} \pi \right) + \right. \\
 & \left. + \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \cos \left( 2\varphi_0 + \frac{k-1}{\omega} \pi \right) \right]. \quad (71)
 \end{aligned}$$

Für hohe Vergrößerung  $\varphi_0 = \frac{\pi}{\omega}$  erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
 a_1(z_1) = & - \frac{QV}{8} \frac{\sqrt{k^2+1}}{k^2-1} \left( k \sin \frac{2k}{\omega} \pi - \sin \frac{2\pi}{\omega} \right) \operatorname{ctg} \omega \varphi_B - \\
 & - \frac{QV}{4} \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \sin \frac{k+1}{\omega} \pi; \quad (72)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2(z_1) = & - \frac{QV}{4} \frac{\sqrt{k^2+1}}{k^2-1} k \sin \frac{k+1}{\omega} \pi \sin \frac{k-1}{\omega} \pi \operatorname{ctg} \omega \varphi_B + \\
 & + \frac{QV}{8} \sin \frac{2k}{\omega} \pi. \quad (73)
 \end{aligned}$$

Für den Wert  $k^2 = 1,5$  ergibt sich

$$a_1(z_1) = QV [0,18 \operatorname{ctg} \omega \varphi_B + 0,10], \quad (74)$$

$$a_2(z_1) = QV [0,40 \operatorname{ctg} \omega \varphi_B - 0,12]. \quad (75)$$

Wäre der Blendenort  $z_B = a \operatorname{ctg} \omega \varphi_B$  bekannt, so könnte man nach (74) und (75) aus dem gemessenen Dehnungsunterschied  $2a_1$  bzw. aus der gemessenen Scherung  $2a_2$  den Unsymmetriefaktor  $Q$  bestimmen, aus dem man wieder nach Gleichung (66) den Radius des Kreises der kleinsten Verwirrung berechnen könnte. Aus (74), (75) folgen übrigens noch die Blendenorte, für welche Maßstabs- und Scherungsfehler verschwinden.

Der Verfasser dankt der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Überlassung einer vollautomatischen Rechenmaschine.

## Aufnahmen von Elektronenlawinen in der Nebelkammer.

Von W. Riemann.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Juli 1942.)

In der vorliegenden Notiz werden einige Nebelkammerbilder von Elektronenlawinen und ihre Herstellung beschrieben, die ich während meines Studienurlaubs im Wintersemester 1941/42 aufgenommen habe. Sie stellen einen Teil einer eingehenderen Untersuchung der Lawinen in verschiedenen Gasen dar, die infolge der Kürze der Zeit nicht abgeschlossen werden konnte. Da die Aufnahmen gegenüber früher publizierten<sup>1)</sup> einen Fortschritt darstellen, sollen sie als ein vorläufiges Ergebnis veröffentlicht werden.

Als Apparatur diente die von Raether verwendete und beschriebene Anordnung zur Untersuchung der Elektronenlawinen in der Nebelkammer<sup>1)</sup>. Es wurden jedoch hinsichtlich der Beleuchtung der Nebelspuren, hinsichtlich der Spannungsanlage sowie der Wahl des Dampfes zur Bildung des Nebels Abänderungen getroffen.

*Beleuchtung der Spuren.* Für genauere Messungen war es vor allem notwendig, die Güte der Aufnahmen zu verbessern, die wesentlich von der Beleuchtung der Nebelspur abhängt. Die früher verwendete Bogenlampe (80 Amp., Dochtkohlen, Spiegel 60 cm Durchmesser) reichte schon damals nicht aus, auf dem engen Nebelkammerraum, in dem die Lawinen entstehen, eine genügende Intensität zu konzentrieren, um die Belichtungszeit unter  $\frac{1}{25}$  sec zu senken. Die Unregelmäßigkeit des automatischen Nachschubs der Kohlen und Verlagerung der Brennstelle führten außerdem zu ständigen Schwankungen der Beleuchtungsstärke, die die Verwendung der Bogenlampe als ungeeignet erwiesen. Die Auflösung der Nebelspur in einzelne Tröpfchen gelang daher nicht. Eine Verbesserung der Lichtquelle war also vor allem notwendig.

Hierzu wurde eine Funkenentladung eines Kondensators in Argon bei einem Druck von 130 Torr verwendet. Der Druck von 130 Torr wurde gewählt, weil bei ihm die Lampe noch nicht zu sehr belastet wird und



Fig. 1. Lampe mit Argonfüllung von 130 Torr zur Beleuchtung der Nebelspuren. Über die Elektroden wird ein Kondensator von  $5 \mu\text{F}$  und 10 kV entladen. Die Hilfselektrode dient zur Zündung der Entladung.

<sup>1)</sup> H. Raether, ZS. f. Phys. 107, 31, 1937.

trotzdem eine ausreichende Helligkeit abgibt. Die Lampe<sup>1)</sup> besteht aus einem 160 mm langen Supremax-Glasrohr von 8 mm lichter Weite, an dessen Enden Kugeln von 40 mm Durchmesser angeblasen sind (Fig. 1). Mit Hilfe von Schliffen werden Aluminiumelektroden (Kugeln von 8 mm Durchmesser auf Molybdändraht, der in den Schliff eingeschmolzen ist) in die Mitte der Glaskugeln gebracht. Durch einen Hahn wird die Lampe mit Argon gefüllt. An die Elektroden wird eine Kapazität von  $5 \mu\text{F}$  (Firma R. Jahre) geschaltet, die über einen Widerstand von  $10000 \Omega$  auf 10 kV geladen wird. Die Entladung wird über eine seitlich angebrachte Hilfselektrode, die ähnlich den Hauptelektroden gebaut und etwa in der Mitte zwischen ihnen angebracht ist, mit einem Hochfrequenzvakuumprüfer (Radiolux, Wapastrahler) gezündet. Dieser Vakuumprüfer hat überdies den Vorteil, daß er die Zündung auch ohne Benutzung der Hilfselektrode

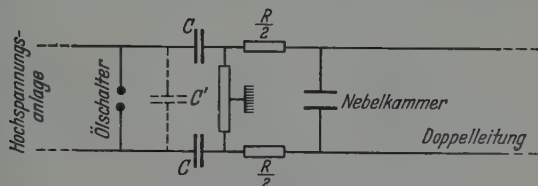


Fig. 2. Schaltanordnung.

ermöglichen kann. Sein Einschalten erfolgt zusammen mit den übrigen Vorgängen (Expansion, Wanderwelle, Aufnahme) auf einem Pendelbrett.

Nach einigen 100 Zündungen mußte die Lampe gereinigt und die Elektroden abgeschnirgelt werden, weil die angeschmorten Elektroden eine störende Verzögerung des Belichtungszeitpunktes ergaben. Duranglas erhielt nach längerem Betrieb eine große Zahl feiner Risse an den Innenwänden, so daß zu Supremax-Glas übergegangen wurde, welches bis jetzt keine Schädigungen durch die thermische Überlastung zeigte.

Mit Hilfe eines Zylinderspiegels und einer Zylinderlinse wird ein paralleles Lichtbündel zur Beleuchtung der Kammermitte verwendet, die sich in einem Abstand von 30 cm von der Lampe befindet. In einem Winkel von  $120^\circ$  zur Einfallsrichtung des Lichtes wird photographiert, wobei die im Sechseck angeordneten Seitenflächen der Nebelkammer zur Vermeidung von Streulicht mit Picein geschwärzt wurden, das den Vorteil geringer elektrischer Leitfähigkeit hat.

<sup>1)</sup> Die Anregung zum Bau dieser Lampe verdanken wir Herrn Dr. Bagge (Berlin-Dahlem), der sie erfolgreich bei seinen Nebelkammeraufnahmen verwendete.



Die Lichtstärke ist für photographische Aufnahmen mit einem Zeiss-Tessar 1:4,5 ( $f = 13,5$  cm) mit Agfa Isopan Ultra und JSS Film (23/10

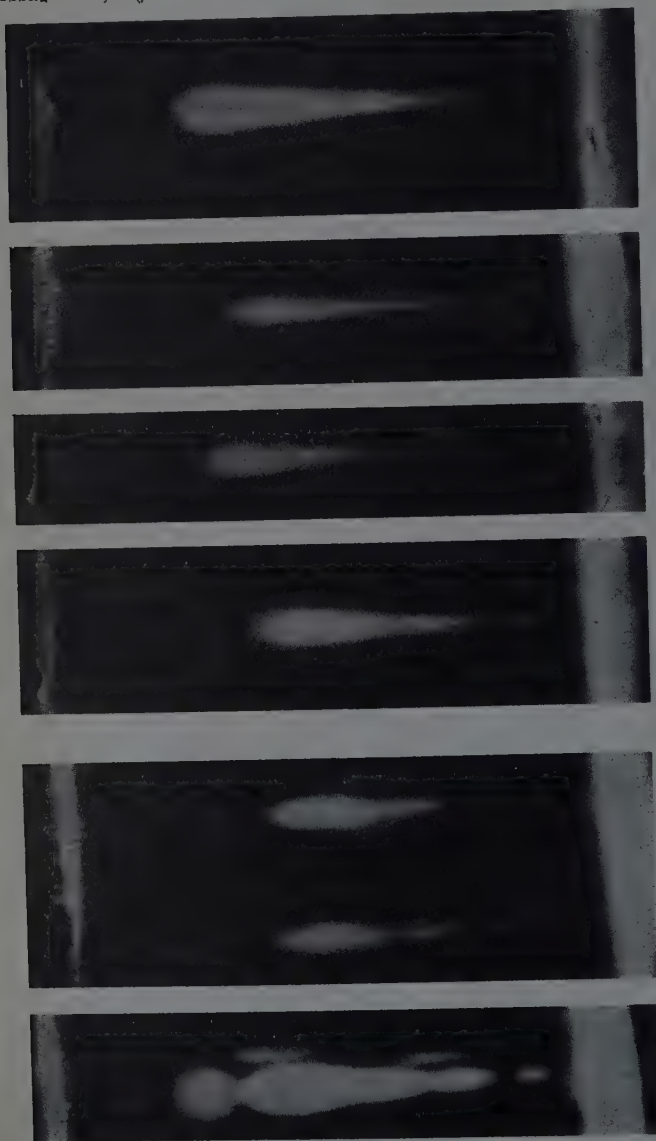


Fig. 4. Einzelne Elektronenlawinen; teils Stickstoff- teils Kohlendioxidfüllung der Nebelkammer. Druck etwa 150 Torr (ebenso Fig. 5).

Fig. 3. Elektronenlawinen, die in einem nicht konstanten Spannungsfälle laufen. Der Stoßwelle überlagerte sich eine Schwingung, die zu einer wechselnden Stoßionisierung innerhalb der Lawine führte. (Luft, 150 Torr.)

und 21/10 DIN) ausreichend. Die Aufnahmen erfolgten auf Kleinbildfilm in 0,8 natürlicher Größe.

*Spannungsanlage.* Der Abfall des Rückens des Spannungsstoßes, der der Doppelleitung und damit der Nebelkammer zugeführt wird, ist abhängig

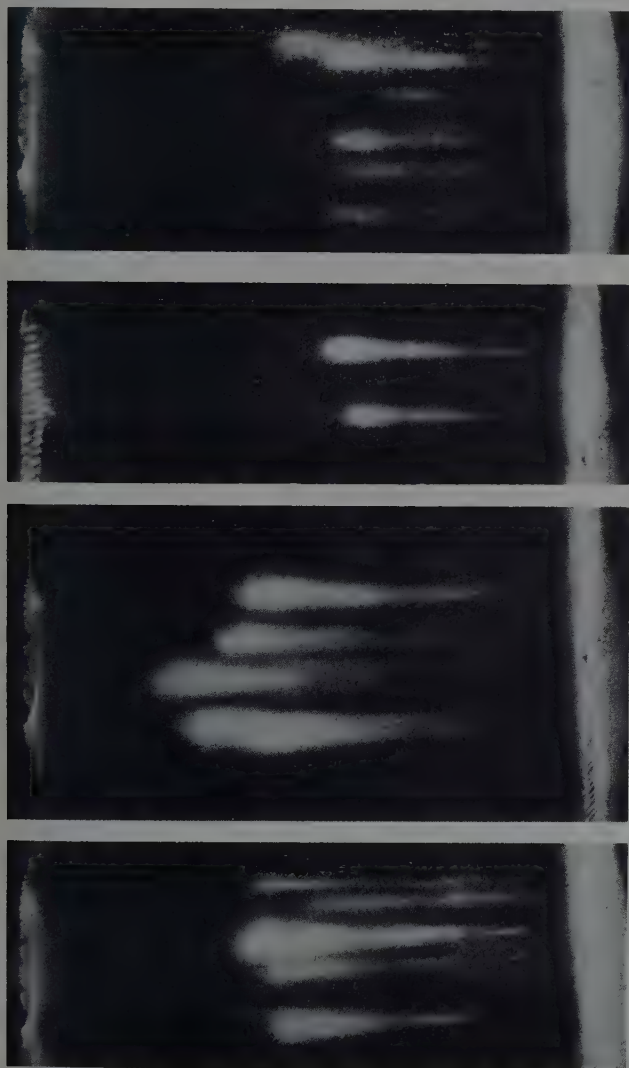


Fig. 5. Gruppen von Elektronenlawinen. In dem Bild rechts ist die Verstärkung so niedrig gewählt, daß die Auflösung der Spur in Tröpfchen fast bis an ihr Ende zu verfolgen ist. In der oberen Elektrode (Anode) befindet sich ein Fenster (das Gitter verhindert die Foklverzerrung), durch welches das Licht zur Auslösung der Photoelektronen auf die Kathode fällt. Durch das die Kathode bildende Netz findet die Entspannung der Nebelkammer statt.

von der Zeitkonstanten  $RC$  [ $C$  Kapazität, die auf die Leitung entladen wird,  $R$  = Widerstand ( $R = Z$ ) am Anfang der Leitung, der die am Leitungsende reflektierte Welle verschluckt]. Durch Erhöhung von  $C$  auf  $0,02 \mu\text{F}$  wurde die Zeitkonstante auf  $1,5 \cdot 10^{-5} \text{ sec}$  vergrößert. Der Spannungsabfall der

Stoßwelle während einer Stoßdauer von  $1 \cdot 10^{-7}$  sec beträgt daher nur mehr ein halbes Prozent. Die Vergrößerung von  $C$  (Nebeneinanderstellen von je zwei Meirowsky-Kondensatoren) brachte jedoch anfangs eine Erhöhung der Querkapazität  $C'$  mit sich (s. Fig. 2), die zusammen mit der Selbstinduktion der Leitung zum Ölschalter einen Schwingungskreis bildete, dessen Schwingungen durch den Funken im Ölschalter angeregt wurden und sich der Stoßwelle überlagerten. Fig. 3 zeigt den Einfluß dieser Überlagerung auf die Lawine. Die Stoßdauer betrug hierbei  $1 \cdot 10^{-7}$  sec, so daß aus dem Abstand der Verdichtungen der Spur auf eine überlagerte Schwingung von etwa  $5 \cdot 10^{-7}$  sec $^{-1}$  geschlossen werden kann. Man sieht aus Fig. 3, wie nach Ablauf der Stoßwelle unter dem Einfluß der Schwingung die Elektronen aus dem Lawinenkopf gezogen werden (aber wohl kaum nochmals stoßionisieren) und eine Tröpfchenwolke bilden, die um eine der Schwingungsdauer entsprechende Wegstrecke hinter dem Lawinenkopf liegt. Die folgenden Schwingungsmaxima reichen offenbar infolge der Dämpfung nicht aus, die Elektronen noch weiter herauszuziehen. Diese unerwünschte Störung wurde durch Vergrößerung des Abstandes zwischen den Kapazitäten  $C$  beseitigt (Verkleinerung der Querkapazität  $C'$ ).

*Dampffüllung der Kammer.* Als Nebelkammerfüllung wurde ein Gemisch aus 1 : 1 Volumenteilen Methylalkohol und Wasser benutzt. Dieses Gemisch zeichnet sich bei etwas kleinerem Expansionsverhältnis (1,13) gegenüber Äthylalkohol—Wassergemisch (1,19)<sup>1)</sup> durch Bildung größerer Tröpfchen aus, außerdem ist die Einhaltung des richtigen Expansionsverhältnisses nicht so genau erforderlich wie bei Äthylalkohol.

*Aufnahmen.* Einige der erhaltenen Aufnahmen zeigen die Fig. 4 und 5, die erstere Einzellawinen, d. h. schwache Bestrahlung der Kathode, die letztere Gruppen von Lawinen, da eine größere Zahl von Photoelektronen die Kathode verließen. Die Verbesserung geht vor allem aus der Auflösung der Nebelspur in Tröpfchen hervor, die besonders am Anfang der Spur, bei noch mäßiger Zahl von Sekundärelektronen, gut zu sehen ist. Bei geringerer Verstärkung der Lawine ist der Aufbau der Spur aus einzelnen Tropfen fast bis an ihr Ende zu verfolgen (vgl. Fig. 5 rechts).

Für Anregung und Hilfe danke ich Herrn Dr. H. Raether.

Jena, Physikalisches Institut.

<sup>1)</sup> J. A. Froemke C. R. Bloomquist u. E. X. Anderson, ZS. f. phys. Chem. (A) 166, 305, 1933.

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

## Über das elektrostatische Emissions-Übermikroskop.

Von **W. Mecklenburg** aus Berlin-Reinickendorf.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 3. Juli 1942.)

Es wird ein Emissions-Elektronen-Übermikroskop mit elektrischen Linsen beschrieben, mit dem bisher eine Auflösung von 40  $m\mu$  unterschritten werden konnte. Es werden weiterhin einige mit dieser Apparatur gemachte Aufnahmen von Oxydkathoden wiedergegeben.

In den letzten Jahren war das Interesse für die Elektronen-Übermikroskopie fast ausschließlich auf das Durchstrahlungsmikroskop gerichtet. Es schien, als wäre mit den Arbeiten von Brüche, Johannson und Knecht<sup>1)</sup> die Leistungsfähigkeit des elektrostatischen Emissionsmikroskops erschöpft und als sei ein Überschreiten der Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops nicht möglich. — Brüche und Knecht<sup>1)</sup> erreichten 1934 eine Auflösung von 3  $\mu$ . — Zwar wurde mehrfach darauf hingewiesen<sup>2)</sup>, daß kein Grund zur Annahme vorhanden wäre, daß ein übermikroskopisches Auflösungsvermögen nicht erreichbar sei; doch bewies erst kürzlich Recknagel<sup>3)</sup> die theoretische Möglichkeit des Emissions-Übermikroskops. Recknagel rechnete aus, daß man mit einer Feldstärke von 20 kV/cm vor der Kathode eine Auflösung von mindestens 130  $m\mu$  mit dem Emissionsmikroskop erwarten könne.

Mit den Erfahrungen, die wir mit dem elektrostatischen Durchstrahlungs-Übermikroskop gesammelt hatten, gingen wir auch an die experimentelle Lösung der Aufgabe heran, das Emissions-Übermikroskop zu verwirklichen. Eine Aufgabe, deren Lösung schon seit Jahren geplant war, aber wegen anderer Arbeiten immer wieder zurückgestellt werden mußte.

Mahl<sup>4)</sup> erreichte mit einem einfachen System (Kathode—Wehneltzylinder-Anodenblende) praktisch die Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops. Boersch<sup>5)</sup> gelang es, mit einer ähnlichen Anordnung bis 70  $m\mu$  vorzudringen. Ich selbst erreichte gleichzeitig bei etwas strengeren Ansprüchen an die Trennung der zur Bestimmung dienenden Punkte etwa

---

<sup>1)</sup> E. Brüche u. H. Johannson, Naturwiss. **20**, 353, 1932; E. Brüche u. W. Knecht, ZS. f. Phys. **92**, 462, 1934. — <sup>2)</sup> Vgl. E. Brüche u. W. Henneberg, Erg. d. exakt. Naturwiss. **15**, 365, 1936. — <sup>3)</sup> A. Recknagel, ZS. f. Phys. **117**, 689, 1941. — <sup>4)</sup> H. Mahl, ZS. f. techn. Phys. **23**, 117, 1942. — <sup>5)</sup> H. Boersch-Wien, Naturwiss. **30**, 120, 1942.

140 m $\mu$ .<sup>1)</sup> Inzwischen hat auch Kinder<sup>2)</sup> mit dem magnetischen Emissionsmikroskop die Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops überschritten. Ich selbst habe meine Resultate auf mindestens 40 m $\mu$  verbessern können. Über den heutigen Stand ist eine zusammenfassende Darstellung von Brüche in der Kolloid-Zeitschrift im Druck<sup>3)</sup>.

### 1. Das Emissions-Übermikroskop.

Als Objektlinse, der wesentlichste Teil des Mikroskops, wurde das Immersionsobjektiv gewählt, wie es schon Johannson<sup>4)</sup> in ähnlicher Form benutzt und genau untersucht hat. Es wurde den Forderungen nach hohen Feldstärken angepaßt.

Johannson verwendete ein einfaches Lochblendensystem. Das neue System paßte sich dem bewährten Aufbau der Einzellinse des Durchstrahlungs-Übermikroskops<sup>5)</sup> an. Ersetzt man in Fig. 1 die Kathode *K* durch eine Außenelektrode, so haben wir im wesentlichen die normale Einzellinse des elektrostatischen Über-

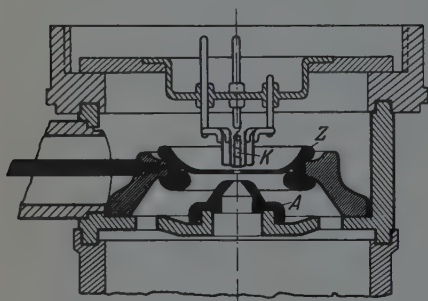


Fig. 1. Immersionsoptik. *K* = Kathode, *Z* = Zwischenblende, *A* = Anodenblende.

mikroskops. In der Schnittzeichnung ist die Kathode *K* zu erkennen. Sie ist eine indirekt geheizte Plankathode von besonders stabilem Aufbau. Die Kathodenhülse ist zur Herabsetzung des Heizstromes von einem Strahlungsschutzzyylinder umgeben. Unterhalb der Kathode im Abstand von etwa 0,1 bis 0,8 mm erkennt man die Zwischen-

blende *Z*. Sie ist aus der Mittelelektrode der Einzellinse hervorgegangen und hat eine Bohrung von 2 mm Durchmesser bei einer Stärke von 0,7 mm. Die Anodenblende *A* hat von der Zwischenblende einen Abstand von 2 mm und eine Bohrung von etwa 2,4 mm Durchmesser. Bisher wurde mit einer Beschleunigungsspannung von 20 bis 30 kV gearbeitet. An der Zwischenblende lag dann ein Potential von + 700 bis - 700 Volt gegenüber der Kathode, je nach dem benutzten Kathodenabstand. Durch Variieren des

<sup>1)</sup> Vgl. C. Ramsauer, Elektronenmikroskopie, S. 6. Berlin, Springer, 1942. — <sup>2)</sup> E. Kinder, Naturwiss. **39**, Heft 38/39, 1942. — <sup>3)</sup> Anm. b. d. Korr.: Inzwischen erschienen E. Brüche, Kolloid-ZS. **100**, 192, 1942; vgl. auch Vortrag von E. Brüche im VDI-Berlin am 18. Februar 1942. — <sup>4)</sup> H. Johannson, Ann. d. Phys. **18**, 385, 1933. — <sup>5)</sup> Vgl. E. Brüche u. A. Recknagel, Elektronengeräte, S. 307. Berlin, Springer, 1942.



Zwischenpotentials ist es in bequemer Weise möglich, die Scharfeinstellung des Bildes vorzunehmen. Durch Änderung des Kathodenabstandes kann man ferner die Vergrößerung des Systems von etwa 60fach bis 120fach wählen.

Bei der Beschleunigungsspannung von 20 kV haben wir eine Feldstärke von etwa 40 kV/cm vor der Kathode. Damit ist also nach Recknagel



Fig. 2 a.

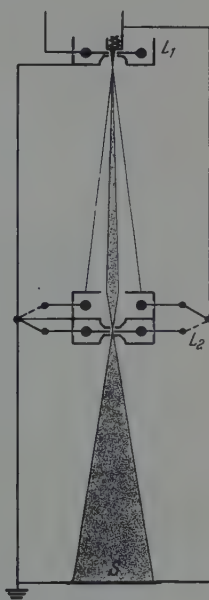


Fig. 2 b.

Fig. 2. a) Aufbau des Emissions-Übermikroskops, b) Strahlengang im Emissions-Übermikroskop.  $L_1$  = Immersionsoptik,  $L_2$  = umschaltbare Projektionsdoppellinse,  $S$  = Leuchtschirm bzw. Photoplatte.

die Bedingung zum Überschreiten der Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops gegeben. Die Vergrößerung dieses Systems betrug bei den weiter unten wiedergegebenen Aufnahmen 115:1.

Im übrigen wurde weitgehend der bewährte Aufbau des elektrostatischen Durchstrahlungsmikroskops benutzt. So wurden die Plattenschleuse und die Projektionslinsen unverändert übernommen. Über diese Teile ist bereits mehrfach in der Literatur<sup>1)</sup> berichtet worden.

In Fig. 2 ist eine Ansicht des Gesamtaufbaus und daneben der Strahlengang im Mikroskop schematisch wiedergegeben. Hieraus ist auch ersichtlich,

<sup>1)</sup> Vgl. E. Brüche u. A. Recknagel, Elektronengeräte, S. 307. Berlin. Springer, 1942.

daß als Projektionslinse eine Doppellinse vorgesehen ist, wie sie beim Durchstrahlungsmikroskop Anwendung gefunden hat. So ist es möglich, durch

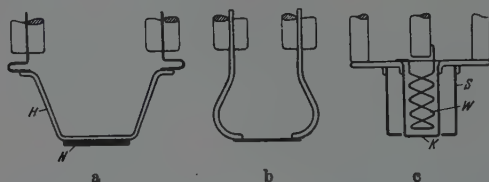


Fig. 3. Kathodensystem für das Emissions-Mikroskop.

a) direkt geheizte Flächenkathode, b) Bändchenkathode, c) indirekt geheizte Plankathode.

$H$  = Wolframheizdrähte,  $N$  = Nickelplättchen,  $S$  = Wärmeschutzzyylinder,  $W$  = Heizwendel,  $K$  = Kathodenfläche (Nickel).

Umschalten der Hochspannung von einem Übersichtsbild in 1800facher Vergrößerung zu einer höheren Vergrößerung überzugehen.

Für die ersten Abbildungsversuche wurde eine Kathode verwendet, wie sie in Fig. 3a dargestellt ist, und wie sie auch schon in ähnlicher

Form früher von Johannson benutzt wurde. Auf zwei Wolframheizdrähte  $H$  ist ein Nickelplättchen von 5 mm Durchmesser aufgeschweißt, auf das eine Barium-Strontium-Paste aufgetragen wurde. Durch den benötigten relativ hohen Heizstrom von 10 bis 20 Amp. wird ein magnetisches Feld erzeugt, das sich störend auf die Abbildung der Immersionsoptik auswirkt<sup>1)</sup>; hinzu kommt noch, daß diese Kathode verhältnismäßig erschütterungsempfindlich ist. Daher ergaben die hiermit erreichten Emissionsbilder nur eine relativ geringe

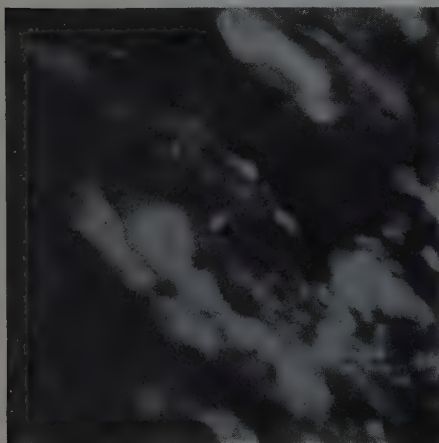


Fig. 4. Emissionsbild einer Molybdän-Bändchenkathode.

1  $\mu$

Auflösung von etwa 200 bis 500  $\mu$ . Das eben Gesagte gilt auch für eine Bändchenkathode nach Fig. 3b. Ein Molybdänbändchen von 0,03 mm Stärke war bei dieser Kathode zwischen Tantalfedern straff gespannt und

<sup>1)</sup> Vgl. H. Boersch, Naturwiss. 30, 120, 1942.

wurde direkt geheizt. In Fig. 4 ist das Bild einer solchen Bändchenkathode wiedergegeben. Man erkennt gut die streifige Struktur des gedehnten Bandes, sieht aber auch, daß das Bild in 3000facher Vergrößerung an Schärfe zu wünschen übrigläßt.

Bei den weiteren Versuchen wurden aus obigen Gründen ausschließlich indirekt geheizte Kathoden benutzt (Fig. 3c), wie sie in ähnlicher Ausführung in Oszillographenröhren üblich sind. Der Pastenträger war eine plangeschliffene und polierte Nickelkappe, auf die eine Barium-Strontium-Paste aufgetragen wurde.

## 2. Auflösung des Emissions-Übermikroskops.

Zur Bestimmung der Auflösungsgrenze wurde nach dem heute allgemein eingeführten Verfahren von Brüche und Knecht<sup>1)</sup> der Abstand zweier

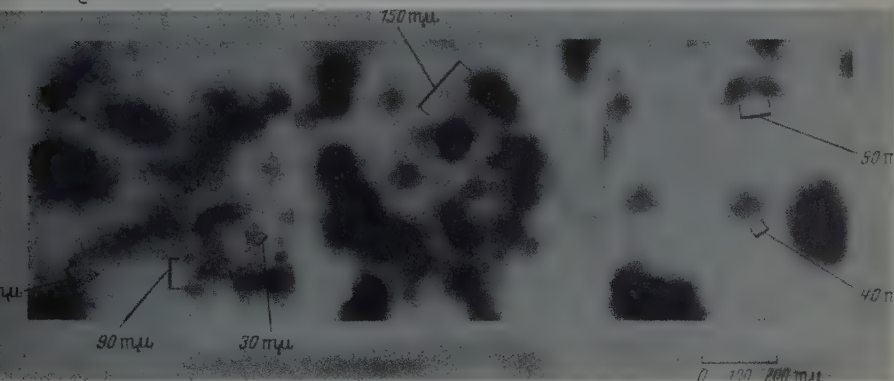


Fig. 5. Emissionsbilder von Ba-Sr-Pastekathoden zur Auflösungsbestimmung.

Bildpunkte, die noch eindeutig getrennt sind, von Mittelpunkt zu Mittelpunkt gemessen. Da bisher vorwiegend Pastekathoden untersucht wurden, sind auch diese zur Auflösungsbestimmung herangezogen worden. Hierbei gelang es nur bei sehr dünn pastierten Kathoden, ein ausreichend feines Korn zu erhalten, das entsprechend kleine Raumladungsgebiete aufweist. Es scheint jedoch, als sei die weiter unten angegebene Auflösungsgrenze lediglich durch das Korn der Kathode bestimmt. Hinzu kommt, daß die Oberflächenbeschaffenheit der Kathode bei dem Emissionsmikroskop mit elektrostatischen Immersionslinsen eine wesentliche Rolle spielt, da Unebenheiten in der Kathode durch zusätzliche Linsenwirkung Verzeichnungen und Unschärfen hervorrufen.

<sup>1)</sup> E. Brüche u. W. Knecht, l. c.

In Fig. 5 sind Ausschnittsvergrößerungen auf 50 000 : 1 von elektronenoptisch 1800fach vergrößerten Emissionsbildern wiedergegeben. Man erkennt, daß Punkte mit 40 m $\mu$  Abstand noch einwandfrei getrennt werden. Man kann nach den bisherigen Versuchen annehmen, daß eine Auflösung von 20 m $\mu$  wahrscheinlich erreicht ist. Es ist anzunehmen, daß bei Benutzung geeigneter Kathoden noch ein wesentlich höheres Auflösungsvermögen zu erzielen ist. Bereits heute sind wir also zwei Zehnerpotenzen weiter als 1934; damals wurden 3  $\mu$  beobachtet. Damit hat nun auch die Emissionsmikroskopie eine entsprechende Verbesserung erfahren wie die Durchstrahlungsmikroskopie, die damals der Auflösungsgrenze des Lichtmikroskops (200 m $\mu$ ) nahegekommen war, während sie heute in den günstigsten Fällen bei 2 m $\mu$  liegt.

### 3. Anwendung des Emissions-Übermikroskops.

Im folgenden sind Ausschnitte einiger Emissionsbilder wiedergegeben, die mit dem beschriebenen zweistufigen System aufgenommen wurden. Es kam eine elektronenoptische 1800fache Vergrößerung zur Anwendung. Die Aufnahmen wurden dann auf 3000 : 1 nachvergrößert.

In Fig 6 ist das Elektronenbild einer Pastekathode wiedergegeben. Eine Barium-Strontium-Carbonat-Aufschleimung war in etwa  $\frac{1}{10}$  mm dicker Schicht auf die plane Nickelnkathode aufgetragen worden. Dann war bei langsam ansteigender Heizung zunächst ohne Anodenspannung die Kathode eingebrannt und schließlich bei normaler Heizung die Anodenspannung angelegt und aktiviert worden. Man erkennt großflächige, stark emittierende Gebiete; infolge der vorgelagerten starken Raumladung werden diese nicht scharf abgebildet, sondern zeigen eine „wolkige“ Struktur. Nur einige Emissionszentren, die über diese Raumladungswolke hinausragen, konnten scharf abgebildet werden. Von diesen Emissionszentren gehen strahlenförmige Verzeichnungen aus. Man beobachtet weiter auf der Abbildung eine Anzahl scharf abgebildeter schwarzer Punkte, die bei Annäherung der Kathode an die Blende als starke Raumladungsgebiete erkannt werden konnten. Da bei der Aufnahme auf einzelne hervorragende Emissionspunkte scharf eingestellt wurde, werden nichtemittierende Stellen vorgetäuscht, was vermutlich durch eine zusätzliche Linsenwirkung besonders starker kleiner Raumladungswolken zu erklären sein dürfte. Es handelt sich offenbar um denselben Effekt von „vorgetäuschter Bildumkehr“, mit dem sich schon Richter<sup>1)</sup> bei kleinen Auflösungen beschäftigt hat (vgl. auch Fig. 10d). Will man demnach Aufnahmen höchster

<sup>1)</sup> E. F. Richter, ZS. f. Phys. **86**, 697, 1933.

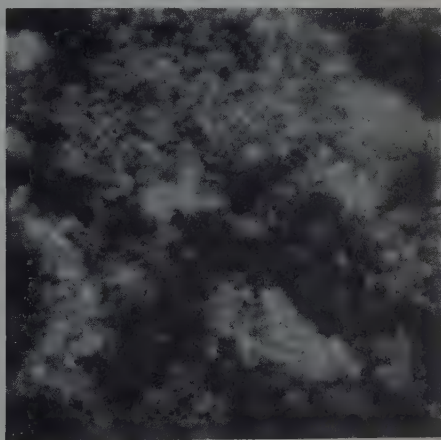
Auflösung und einwandfreie Abbildungen von Pastekathoden erhalten, so muß man die Paste in dünnster Schicht auf eine gut plangeschliffene und polierte Fläche auftragen, um starke Raumladungen und Verzeichnungen zu vermeiden.

In Fig. 7 ist eine solche dünnpastierte Kathode ebenfalls mit einer Barium-Strontium-Paste belegt wiedergegeben. Die Aufnahme wurde nach etwa einstündigem Einbrennen der Kathode gemacht. Man sieht, daß einzelne Gebiete bereits stark ausgebrannt sind, während andere Glühinseln



└─ 1μ

Fig. 6. Emissionsbild einer Ba-Sr-Pastekathode (Schichtdicke etwa 0,1 mm).



└─ 1μ

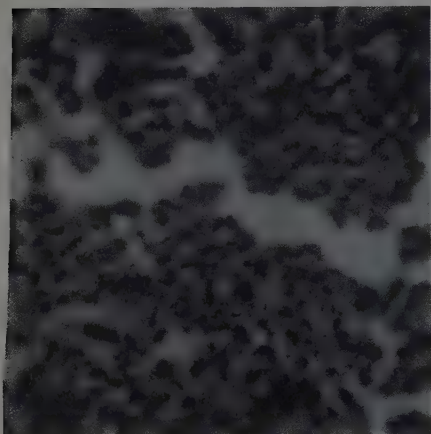
Fig. 7. Emissionsbild einer dünn belegten Pastekathode.

noch geringe Raumladungsbezirke aufweisen. Die Kathode zeigt eine feine Struktur mit Emissionszentren bis zu 50 mμ herab. Hier sind die dunklen Stellen nichtemittierende Gebiete, die durch geringe Veränderung der Einstellung auch scharf abgebildet werden konnten, ohne daß eine „Bildumkehr“ auftrat, wie es bei der vorigen Aufnahme Fig. 6 der Fall war.

Eine weitere Kathode (Fig. 8) wurde normal pastiert und sodann durch starkes Überheizen die Hauptmasse der Emissionssubstanz abgedampft. Es bildeten sich hierbei starke Risse in der Metalloberfläche aus, in denen sich das noch stark emittierende Bariummetall angesammelt hat. Die kleinsten zu beobachtenden Emissionszentren haben einen Durchmesser von etwa 0,2 μ und zeigen starke Raumladung. Eine Kathode, bei der besonderer Wert auf eine möglichst feine Verteilung der Paste in dünnster Schicht gelegt wurde, ist in Fig. 9 wiedergegeben. Man erkennt neben



einzelnen stark emittierenden Punkten mit großer Raumladung Gebiete mit feinen gleichmäßig verteilten Emissionszentren. Es zeichnen sich auch einige Kratzer auf der Nickeloberfläche ab; sie erscheinen als gleichmäßig emittierende Striche. Nach vierstündigem Brennen bei normaler Heizung machen sich ausgebrannte Stellen und eine Abnahme der großen Raumladungsgebiete bemerkbar. Es treten bei dieser Kathode keine starken Rißbildungen auf und auch keine großen Zusammenballungen der emittierenden Schicht. Sehr deutlich ist hier die strahlenförmige Verzeichnung zu er-



└─ 1μ

Fig. 8. Emissionsbild einer normal belegten, dann abgedampften Pastekathode.



└─ 1μ

Fig. 9. Emissionsbild einer extrem dünn belegten Pastekathode.

kennen, die von dem großen Emissionszentrum und Raumladungsgebiet bis weit in die dünn pastierten Bezirke hineinragt.

Die nächste Abbildung (Fig. 10) zeigt eine Kathode in verschiedenen Brennstadien. Die Pastierung war besonders dünn vorgenommen worden. Nach einhalbstündigem Formieren bei schwacher Heizung zeigen sich größere und kleinere Emissionszentren mit kräftiger Raumladung (Fig. 10a). Nach einem halbstündigen weiteren Brennen bei angelegter Anodenspannung ergab sich Fig. 10b. Die Emissionszentren sind wesentlich kleiner geworden und besonders die Raumladung ist nun auffallend gering. Es konnten Emissionszentren von nur 70 mμ gemessen werden. Man kann auch bereits einige Risse auf der Nickeloberfläche als helle und dunkle Striche im Bilde erkennen. Bei erhöhter Heizung nahm das Emissionsbild innerhalb kurzer Zeit ein ganz anderes Aussehen an (Fig. 10c). Die feinkörnige Struktur

der Pastenbelegung ist völlig verschwunden, und man erkennt ein auffallendes Strichmuster. Es sind Gleitebenen sichtbar geworden, wie sie schon Mahl und Schenk<sup>1)</sup> beobachten konnten. Eingelagert sind noch

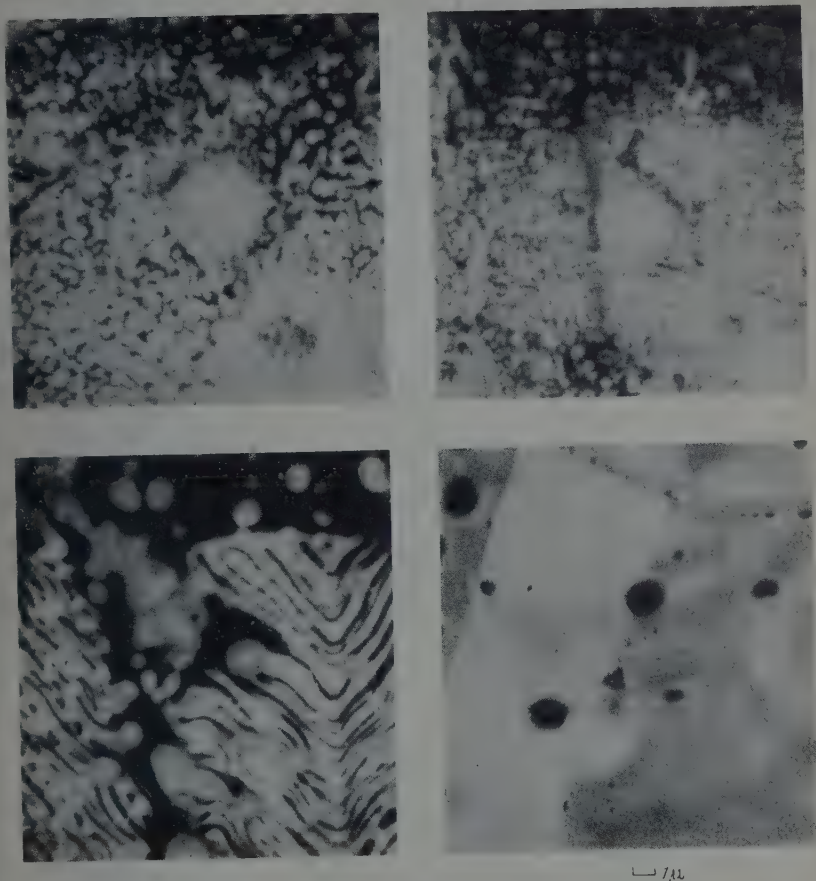


Fig. 10. Verschiedene Brennstadien einer dünn belegten Pastekathode. *a* oben links: nach halbstündigem Heizen ohne angelegte Anodenspannung; *b* oben rechts: nach halbstündigem Brennen mit angelegter Anodenspannung; *c* unten links: bei erhöhter Heizung (Ausbildung von Gleitebenen); *d* unten rechts: nach Abdampfen der Hauptmasse der aktiven Schicht.

starke Emissionszentren; andere Stellen sind schon fast gänzlich frei von emittierender Substanz.

In diesem Stadium wurde die Kathode unter dem Lichtmikroskop beobachtet. In der Dunkelfeldabbildung konnte man die in Fig. 10c wieder-

<sup>1)</sup> H. Mahl u. D. Schenk, ZS. f. Phys. **101**, 117, 1936.

gegebene auffallende Struktur gut wiedererkennen. Einzelne Emissionszentren zeichneten sich als helle Punkte ab, offenbar kleine Bariumkügelchen, die sich noch nicht auf der Kathodenoberfläche ausgebreitet hatten bzw. noch nicht übergedampft waren.

Die Kathode wurde nun abermals in das Emissions-Übermikroskop eingesetzt und vorsichtig hochgeheizt. Das emittierende Barium hat sich in dünner Schicht ziemlich gleichmäßig über die ganze Kathode ausgebreitet und Korngrenzen sind sichtbar geworden (Fig. 10d). Die Emission auf den verschiedenen Kristallflächen zeigt wesentliche Intensitätsunterschiede. Eine besonders auffallende Erscheinung sind die dunklen Stellen verschiedener Größe. Bei Annäherung der Kathode an die Linse erschienen diese Störungsstellen als Gebiete mit starker Raumladung. Es handelt sich hier wieder um eine „vorgetäuschte Bildumkehr“, wie wir sie schon in Fig. 6 beobachten konnten. Bei dieser Aufnahme wurde auf die Korngrenze scharf eingestellt und die Emissionszentren werden durch eine Linsenzirkulation der Raumladungswolke verzeichnet wiedergegeben.

Nach den bisherigen Erfahrungen mit dem elektrostatischen Emissions-Mikroskop ist zu erwarten, daß durch weitere Steigerung der Feldstärke an der Kathode und durch geeignetere Durchbildung der Kathodenfläche die Auflösung weiter erhöht werden kann. Auch scheint es nach diesen Vorversuchen möglich, das Emissions-Übermikroskop auf eine große Anzahl von Aufgaben anzuwenden, wie es bei geringerer Vergrößerung in den ersten Jahren der Entwicklung der Elektronenmikroskopie bereits geschehen ist.

#### *Zusammenfassung.*

1. Im vorstehenden wird zunächst ein zweistufiges Emissions-Übermikroskop mit elektrischen Linsen beschrieben. Als Objektlinse wurde ein Immersionsobjektiv benutzt, das den Forderungen nach hoher Feldstärke angepaßt wurde.

2. Bei einer Beschleunigungsspannung von 20 kV entsprechend einer Feldstärke von 40 kV/cm vor der Kathode wird eine Auflösung von mindestens 40 m $\mu$  durch Ausmessen des Abstandes zweier Punkte sichergestellt.

3. In Anwendung des Emissions-Übermikroskops werden einige Aufnahmen von Ba-Sr-Pastekathoden verschiedener Pastierungsstärke wiedergegeben. Dick pastierte Kathoden ergaben durch starke Raumladung eine „wolkige“ Struktur. Emissionsbilder einer Kathode in verschiedenen Brennständen werden bis zum Auftreten von Gleitebenen und Korngrenzen verfolgt.

*Berlin-Reinickendorf, den 30. Juni 1942.*

## Über die Bedeutung des Steenbeckschen Minimumprinzips.

Von R. Rompe in Berlin und W. Weizel in Bonn.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 14. August 1942.)

Das Steenbecksche Minimumprinzip sagt aus, daß der Durchmesser eines Lichtbogens sich so einstellt, daß bei konstantem Strom die Brennspannung einen Minimumswert annimmt. Es wird in der vorliegenden Arbeit untersucht, ob es sich bei diesem Prinzip um ein echtes Minimumprinzip handelt, oder ob es nur eine empirisch begründete Regel ist. Die Diskussion der radialen thermischen und elektrischen Verhältnisse einer Bogenentladung zeigt, daß ein Bestreben des Bogens vorhanden ist, sich zu verkürzen; dieses führt zu Ergebnissen, die dem Minimumprinzip weitgehend entsprechen. Man kann also dem Minimumprinzip jedenfalls die Bedeutung einer praktisch bewährten Regel zuweisen, die es ermöglicht, ohne die komplizierte Diskussion der radialen Verhältnisse zu brauchbaren Resultaten zu gelangen. Andererseits läßt sich zeigen, daß in allgemeiner Form das Minimumprinzip nur dann gilt, wenn die Leitfähigkeit eine reine Ortsfunktion ist, also z. B. bei Leitern, die dem Ohmschen Gesetz gehorchen. Hängt die Leitfähigkeit z. B. von der Temperatur ab, so liefert das Minimumprinzip nicht das richtige Ergebnis. Man kann ferner zeigen, daß die den Bogen beschreibende Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung nicht die Eulersche Gleichung des Minimumprinzips ist. — Das Minimumprinzip gilt also nicht allgemein für Entladungen, sondern stellt eine allerdings praktisch sehr bequeme und brauchbare Erfahrungsregel dar.

Steenbeck hat das Postulat aufgestellt, daß der Entladungskanal eines Lichtbogens einen solchen Durchmesser annehmen soll, daß bei konstant gehaltenem Strom die Brennspannung möglichst klein wird<sup>1)</sup>. Diese einleuchtende Forderung ist als *Steenbecksches Minimumprinzip* bekanntgeworden. Ähnliche Überlegungen sind auch schon früher angestellt, wenn auch nicht so präzise formuliert worden. Seit man Entladungen mit fallender Charakteristik kennt, pflegt man die Notwendigkeit eines Vorschaltwiderstandes damit zu begründen, daß sonst der Strom immer weiter wächst und die Spannung sinkt, d. h. daß ohne Widerstand die Entladung nicht stabil ist. Engel und Steenbeck haben die konstante Stromdichte des normalen Kathodenfalls auch aus der Forderung abgeleitet, daß der Kathodenfall ein Minimum sein soll und dies durch eine Stabilitätsbetrachtung begründet<sup>2)</sup>. Vor einiger Zeit konnten wir zusammen mit Schön die Brennfleckbildung an den Elektroden eines Lichtbogens darauf zurückführen, daß

<sup>1)</sup> M. Steenbeck, Phys. ZS. **33**, 809, 1932; s. auch A. v. Engel u. M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen, Bd. II. Berlin 1934. — <sup>2)</sup> A. v. Engel u. M. Steenbeck, l. c.

die Querkontraktion des Entladungskanals den Spannungsbedarf des Raumladungsgebietes vor der Elektrode vermindert, bis ein Minimum erreicht ist<sup>1)</sup>. Obwohl es zunächst sehr plausibel erschien, daß der Entladungsmechanismus sich immer so einstellt, daß möglichst wenig Spannung nötig ist, haben wir doch das Bedürfnis gefühlt, diesen Vorgang bei der Brennfleckbildung im einzelnen zu verfolgen und ähnlich wie Engel und Steenbeck beim normalen Kathodenfall durch eine Stabilitätsbetrachtung zu sichern<sup>2)</sup>.

Wenn auch die Minimumforderung ohne weiteres einleuchtet, ist gerade die Steenbecksche Anwendung auf den Durchmesser des Lichtbogenkanals auf Widerspruch gestoßen, trotzdem sie mit experimentellen Beobachtungen gut in Einklang steht. Wie von verschiedenen Seiten, insbesondere von Seeliger<sup>3)</sup>, festgestellt worden ist, kann die Bedeutung der Minimumforderung verschieden aufgefaßt werden. Einmal kann sie eine rein empirisch begründete Regel sein, die die Berücksichtigung gewisser Eigenschaften der Entladung ersetzt. Sodann ist aber nicht von der Hand zu weisen, daß es sich um ein Minimumprinzip im echten Sinne handelt, ähnlich wie die mechanischen oder thermodynamischen Extremalprinzipien.

Wir sind uns darüber klar, und wir glauben uns auch mit Steenbeck darüber einig, daß die Bedeutung des Minimumprinzips nicht an dem speziellen Fall des Bogenkanals klargestellt werden muß, für welchen es ursprünglich ausgesprochen wurde. Man muß vielmehr das Problem ganz allgemein diskutieren, ob sich eine Entladung so ausbildet, daß eine möglichst kleine Brennspannung benötigt wird bzw. unter welchen Umständen dies geschieht.

Der Zweck dieser Arbeit ist, die Anwendbarkeit des Minimumpostulats auf verschiedenartige Entladungen zu untersuchen und die Diskussion darüber auf eine breitere Basis zu stellen.

### *Stabilität von Lichtbogenentladungen und das Prinzip der minimalen Brennspannung.*

Wir beginnen damit, zu zeigen, daß Diskussionen der radialen Verhältnisse zylindersymmetrischer Entladungen, wie wir selbst sie für die Bogenkathode und v. Engel und Steenbeck für den normalen Kathodenfall gegeben haben, weitgehend in der Lage sind, die Stabilisierung von Entladungen zu erklären und zu Resultaten führen, die dem Minimumprinzip weitgehend entsprechen.

<sup>1)</sup> W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **115**, 179, 1940. —

<sup>2)</sup> W. Weizel u. R. Rompe, ebenda **119**, 366, 1942. — <sup>3)</sup> R. Seeliger, ebenda **116**, 207, 1940.



Wir denken uns eine Bogenentladung zwischen sehr ausgedehnten ebenen Elektroden, die etwas gegeneinander geneigt werden können. Die Entladung werde bei paralleler Stellung der Elektroden zwischen zwei solchen Punkten gezündet, daß die Stromlinien auf den Elektroden senkrecht stehen. Es wird sich dann ein Entladungskanal ausbilden, in dem die Temperatur von der Mitte nach außen abnimmt. Der Temperaturabfall wird durch die Wärmeleitung zusammen mit der Ausstrahlung bestimmt. Am Rande des Kanals soll die Temperatur so niedrig sein, daß keine Ionisation und deshalb keine elektrische Leitfähigkeit mehr besteht. Wir machen die Annahme, daß hier die Temperatur den Wert  $T = T_0$  hat. Dieser Wert kann natürlich nicht durch die Wärmeleitung allein hergestellt werden, da ohne Ionisation und Ausstrahlung einfach die Formel:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1)$$

gilt, die die Lösung

$$T = A + \ln r \quad (2)$$

ergibt. Wir helfen uns durch die Annahme, daß durch die Konvektion in einem Radius  $R$  von der Entladungsmitte die Temperatur  $T = T_0$  erzielt werde. Wir werden in einer anderen Arbeit zeigen, wie man sich von dieser doch etwas gekünstelten und mit der Erfahrung nicht ohne weiteres in Übereinstimmung stehenden Annahme frei machen kann<sup>1)</sup>. Hier wollen wir modellmäßig die Entladung durch ein Rohr vom Radius  $R$  ersetzen, in dem sich der Bogenkanal ausbildet, wobei die Rohrwand durch eine Konvektion definiert wird. Würde sich die Entladung seitlich verschieben, so würde das Rohr mitgeführt werden.

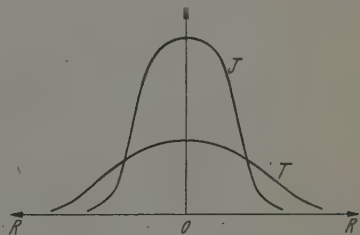


Fig. 1. Verteilung von Stromdichte  $J$  und Temperatur  $T$  senkrecht zur Achse einer Bogenentladung in Abhängigkeit vom Radius  $R$  (schematisch).

Jetzt betrachten wir die Verteilung der Temperatur und der Stromdichte über den Entladungsquerschnitt. Beide Verteilungen werden zylindersymmetrisch sein, wie etwa in Fig. 1 dargestellt. Würden wir jetzt die Elektroden gegeneinander neigen, so würde das Minimumprinzip verlangen, daß die Entladung in der Richtung zu wandern beginnt, in der der Elektrodenabstand sich verkleinert, da bei konstantem Strom, Stromdichte und Temperaturverteilung die Spannung abnehmen oder bei konstanter Spannung

<sup>1)</sup> R. Rompe, W. Thouret u. W. Weizel, ZS. f. Phys. im Druck.

die Stromstärke zunehmen müßte. Es besteht kein Zweifel, daß die Entladung wirklich bei Neigung der Elektroden diesen Verlauf nimmt, wenn man von dem Einfluß magnetischer Kräfte absehen kann.

Diese Entwicklung können wir im einzelnen verfolgen. Verkleinert sich beim Neigen der Elektrodenabstand nach rechts (s. Fig. 1), so wird die Feldstärke auf der rechten Seite des Entladungsquerschnittes größer, auf der linken kleiner. Auch wenn die Temperaturverteilung noch zunächst dieselbe wie bei parallelen Elektroden bliebe, wird dadurch die Stromdichte rechts größer und links kleiner. Dasselbe gilt für die Dichte der Stromleistung  $E \cdot i$ . Durch die Unsymmetrie der Leistungsdichte wird aber auch eine unsymmetrische Temperaturverteilung herbeigeführt. In der rechten Entladungshälfte wird die Temperatur höher als in der linken, und die ganze Entladung verlagert sich somit nach rechts.

Befindet sich die Entladung wirklich in einem Rohr, so würde sie sich bei schiefen Elektroden der einen Rohrwand nähern, wenn der Elektrodenabstand nicht zu klein ist und sich bei einer gewissen Annäherung stabilisieren. Da unser Rohr in Wirklichkeit nur ein Bild für die Wirkung der Konvektion ist, folgt es der Entladung und diese wandert an den Rand der Elektroden.

Die Ursache für die Verlagerung in dem Sinne, daß dabei die Stromstärke anwächst, besteht darin, daß mit der Feldstärke schon bei konstantem Leitvermögen die Stromdichte, mit der Stromdichte die Leistungsdichte, mit ihr die Temperatur und das Leitvermögen steigt und daß auf diese Weise sich die Stromlinien immer mehr verlagern.

Als nächstes Beispiel betrachten wir einen Entladungsschlauch von kreisförmigem Querschnitt, der aber selbst wieder aus irgendwelchen Gründen zu einem Kreis gebogen sei, so daß also der Entladungskanal ein Stück eines Kreisringes bildet. Liegt an den beiden Stirnflächen eine feste Spannung, so ist die Feldstärke an der Außenseite am kleinsten und auf der Innenseite am größten. Nach den soeben angestellten Überlegungen bringt dies in der Entladung eine Tendenz hervor den Ring zu verrücken, was bei festen Elektroden als Stirnflächen zu einer nahezu geradlinigen Überbrückung führen muß. Ganz allgemein sucht sich ein gekrümmter Entladungsschlauch in Richtung auf den Krümmungsmittelpunkt hin zu verschieben.

Jetzt beschäftigen wir uns mit einem Bogen, der zwischen zwei sehr ausgedehnten Elektroden brennt, aber den Abstand nicht auf dem kürzesten Weg überbrückt. Stellt er eine Schlangenlinie dar, so wird er sich zunächst strecken. Da an den Elektroden die Feldstärke im wesentlichen auf deren

Oberfläche senkrecht steht, wird kurz vor den Brennflecken eine Krümmung des Schlauches bestehen, durch die an den Elektroden eine Verschiebung, wie in der Fig. 2

durch Pfeile bezeichnet, einsetzt. Sie führt eine Überbrückung des Elektrodenzwischenraumes durch die Entladung auf kürzestem Wege herbei.

Die Tendenz der Bewegung in der Richtung des Krümmungsmittelpunktes hat in mancher Hinsicht dieselben Wirkungen wie der

von Steenbeck angenommene Längszug. Eine Schwierigkeit wird aber dabei vermieden. Es ist bekannt, daß ein Lichtbogen auf die Elektroden keinen Zug, sondern einen Druck ausübt, und dies wäre ein Widerspruch gegen den Längszug in der Säule.

Die Diskussion dieser Beispiele zeigt uns, daß sich offenbar aus dem thermisch-elektrischen Verhalten des Bogens ein ähnliches Resultat wie aus dem Steenbeckschen Minimumprinzip ergibt, wenn der Spannungsbedarf mit der Länge der Entladung monoton zunimmt. Denn dann führt jede Verkürzung der Entladungsstrecke auch zu einer Spannungseinsparung im Sinne des Minimumprinzips.

Wir haben durch diese Stabilitätsüberlegungen allerdings noch nichts über die grundsätzliche Bedeutung des Minimumprinzips erfahren. Die Diskussion der Temperatur-, Träger- und Leistungsdichteverteilung über den Querschnitt läßt die Verhältnisse im Bogen überblicken. Es stellt sich dabei heraus, daß der Bogen so lange nicht stabil brennt, als noch eine wesentliche Verringerung der Brennspannung durch seine Veränderung erreicht werden kann. Man kommt also durch die detaillierte Betrachtung zu der Aussage des Minimumprinzips, ohne dieses selbst als Postulat verwenden zu müssen. Ersetzt man den Bogen durch das Modell eines Entladungskanals von bestimmtem Querschnitt und konstanter Temperatur, so kann man die Diskussion der Temperaturverteilung über den Querschnitt durch das Minimumprinzip ersetzen und mit ihm im wesentlichen zu den gleichen Aussagen gelangen. In den oben betrachteten speziellen Fällen ist also das Minimumprinzip einfach eine Regel, mit der man näherungsweise richtige Resultate erhalten kann.

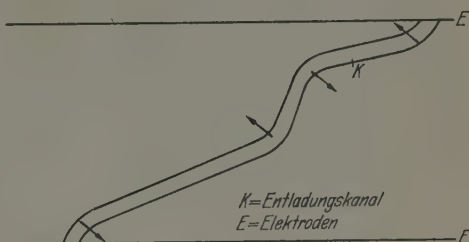


Fig. 2. Schematische Darstellung eines mehrfach gekrümmten Entladungskanals  $K$  zwischen zwei Elektroden  $E$ . Die Pfeile geben die Richtung an, in der sich der Kanal verschiebt.

*Das Minimumprinzip und die Elenbaassche Differentialgleichung.*

Unter diesem Gesichtspunkt wollen wir kurz auf eine Diskussion eingehen, die vor längerer Zeit zwischen Elenbaas und Kesselring<sup>1)</sup> über die prinzipielle Berechtigung der Anwendung des Minimumprinzips auf Hochdrucksäulen stattgefunden hat. Elenbaas stellte sich auf den Standpunkt, daß die Beschreibung der Hochdruckentladung durch eine Differentialgleichung<sup>2)</sup> (Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung) keinen Raum für die Anwendung eines Minimumprinzips mehr offenlasse, während Kesselring von vornherein das Modell eines Kanaldurchmessers konstanter Temperatur zugrunde legte und die Benutzung des Minimumprinzips für unerläßlich hielt. Beide konnten ins Feld führen, daß die von ihnen bevorzugte Art der Beschreibung gewisse Züge der Entladung richtig wiedergibt.

Hierzu wäre nach unserer Ansicht folgendes zu sagen. Die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung beschreibt die radiale Temperaturverteilung im Bogen mit gewissen Vereinfachungen. Z. B. wird die ambipolare Trägerdiffusion von der Bogenmitte zum Rand<sup>3)</sup> und die Radialkomponente der elektrischen Feldstärke nicht berücksichtigt. Würde man diese Vereinfachungen nicht vornehmen, so hätte man statt der klassischen Wärmeleitung eine verwickeltere Funktion der Temperatur einzusetzen und hätte dann eine etwas abgeänderte Differentialgleichung. Zusammen mit den Randbedingungen, die auf der Rohrwand eine bestimmte Temperatur und ein Temperaturmaximum in der Rohrachse vorschreiben, wird hierdurch die Temperaturverteilung über den Querschnitt festgelegt und es besteht weder eine Notwendigkeit noch die Möglichkeit, außerdem ein Minimumprinzip zu verwenden. Selbst wenn man die Konvektion am Energietransport in irgendeiner Form beteiligen würde, könnte sich nichts Grundsätzliches an dieser Situation ändern, so daß also der Elenbaassche Standpunkt durchaus berechtigt ist, daß neben der Differentialgleichung ein Minimumprinzip überflüssig ist.

Eine Frage, die aber trotzdem noch gestellt werden kann, ist die, ob nicht dieselbe Differentialgleichung aus einem Minimumprinzip hergeleitet werden kann, etwa aus der Forderung, daß die radiale Temperatur- und Stromdichteverteilung so beschaffen sei, daß die Brennspannung so klein als möglich wäre, wenn der Gesamtstrom vorgeschrieben ist. Bei näherer Untersuchung dürfte sich allerdings ergeben, daß man diese Frage verneinen muß. Es kann aber nun sinnvoll weitergefragt werden, ob man aus der

<sup>1)</sup> W. Elenbaas u. F. Kesselring, *Elektrot. ZS.* **57**, 1497, 1936. —

<sup>2)</sup> G. Heller, *Physics* **6**, 389, 1935. — <sup>3)</sup> R. Rompe u. P. Schulz, *ZS. f. Phys.* **113**, 10, 1939.

Minimumforderung eine Temperaturverteilung ableiten könne, die mit der wirklichen nicht gerade übereinstimmt, ihr aber doch so ähnlich ist, daß sie praktisch an deren Stelle treten könne. Wenn auch dies nicht zutrifft, kann man endlich noch die Frage untersuchen, ob nicht eine Temperatur- und Stromdichteverteilung, die eine wesentlich größere als die minimale Brennspannung liefert, notwendig ziemlich weit von der wirklichen Verteilung entfernt sein müsse. Es ist nämlich möglich, daß die wirkliche Temperaturverteilung zu einer Brennspannung gehört, die sehr nahe bei der Minimalspannung liegt und daß alle Temperaturverteilungen, die eine wesentlich größere Brennspannung ergeben, von der wirklichen weit abweichen. Dies hat noch nicht zur Folge, daß die wirkliche Temperaturverteilung der minimalen ähnlich ist. In diesem Falle würde das Minimumprinzip zwar die ungefähr richtige Spannung bestimmen, ohne sie jedoch genau zu treffen, während man die Temperaturverteilung auch nicht annähernd aus ihm gewinnen könnte.

Wenn man mit dem viel größeren Modell des Entladungskanals konstanter Temperatur arbeitet, stellt sich die Sache ganz anders dar. Für den Kanal gilt die Gleichung

$$J = \pi R^2 F(T) \cdot E, \quad (3)$$

wo  $J$  die Stromstärke,  $R$  den Kanalradius,  $T$  die Temperatur,  $F(T)$  die Leitfähigkeitsfunktion und  $E$  die Feldstärke ist.  $R$  und  $T$  sind hierbei „Modellgrößen“. Die Energiebilanz liefert noch eine zweite Gleichung, z. B. wenn der Energietransport nur durch nichtreabsorbierte Strahlung erfolgt

$$EJ = \pi R^2 S(T), \quad (4)$$

wo  $S(T)$  eine Funktion ist, die die Ausstrahlung beschreibt. Kommt noch Wärmeableitung hinzu, so verändert sich die Gestalt der Gleichung, was aber nichts an der Tatsache ändert, daß zur Bestimmung von  $R$ ,  $T$  und  $E$  bei vorgegebener Stromstärke nur zwei Gleichungen zur Verfügung stehen. Um also alle drei Größen festzulegen, bedarf es einer weiteren Beziehung und an dieser Stelle wird das Steenbecksche Minimumprinzip eingesetzt.

Nun wird, wie vor einiger Zeit der eine von uns zusammen mit Schulz gezeigt hat<sup>1)</sup>, in diesem Modell mit Größen gearbeitet, die einer direkten Messung nicht zugänglich sind. Denn die Temperatur im Modell ist ja nicht diejenige, die man als lokale Temperatur an irgendeiner Stelle der Entladung durch direkte Temperaturmessung finden kann, sondern eine solche, daß sie mit dem Kanaldurchmesser kombiniert die richtigen Werte

<sup>1)</sup> R. Römpe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. 112, 691, 1939.



von Leitfähigkeit und Ausstrahlung liefert. Der Kanaldurchmesser ist an sich weitgehend willkürlich und hängt von der experimentellen Art seiner Feststellung ab.

Angesichts dieser Sachlage ist es klar, daß man nicht behaupten kann, daß das Minimumprinzip überflüssig sei; allenfalls könnte man folgende Einwände vorbringen. 1. Das Modell des Kanals konstanter Temperatur ist überhaupt unbrauchbar. 2. Das Minimumprinzip mit diesem Modell kombiniert liefert unbrauchbare Resultate. Beide Einwände wären wohl unberechtigt. Es ist nämlich bekannt, daß dieses einfache Modell eine zwar grobe, aber erstaunlich gute Beschreibung vieler Lichtbogeneigenschaften gibt und sich als sehr nützlich erweist, wenn man die Ansprüche nicht überspannt. Besonders überzeugend konnte Steenbeck kürzlich zeigen, daß man durch Kombination des Kanalmodells mit dem Minimumprinzip zu Resultaten gelangt, die mit der Beobachtung in gutem Einvernehmen stehen<sup>1)</sup>. Gerade diese Übereinstimmung erfordert eine Erklärung, die auch inzwischen von Seeliger gegeben worden ist<sup>2)</sup>. Er zeigte, daß das Ergebnis der Anwendung des Minimumprinzips auf das Kanalmodell praktisch mit demjenigen übereinstimmt, welches man durch unmittelbare Integration der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung findet, wenn nur die klassische Wärmeleitung den Abtransport der Energie aus der Säule bewirkt und wenn man als Kanalradius denjenigen nimmt, wo in Wirklichkeit der Temperaturabfall am steilsten ist. Bei praktischen Messungen des Kanalradius dürfte man meistens diesen Wert einigermaßen treffen, wie eine Durchsicht des uns zugänglichen Materials zeigte.

Hat man mehrere Arten des Energietransportes, etwa Ausstrahlung und Wärmeleitung gleichzeitig, so wird man letztere zweckmäßig durch einen Ausdruck der Form

$$2\pi\lambda T'$$

berücksichtigen, wo  $\lambda$  der (als konstant angenommene) Wärmeleitungskoeffizient,  $T'$  eine mit der Kanaltemperatur  $T$  nicht unmittelbar zusammenhängende Größe ist. Denn die sinngemäße Definition der Größen  $R$  und  $T$  fordert, daß  $R$  und  $T$  sowohl die elektrische Leitfähigkeit wie die Abstrahlung des Kanals richtig wiedergeben, was dadurch geschehen kann, daß noch über die Größen  $J$  und  $E$  entsprechend verfügt wird. Damit entfällt aber die Möglichkeit, die Wärmeleitung als ein Glied der angegebenen Form mit  $R$  und  $T$  darzustellen. Man könnte natürlich allgemein einen

<sup>1)</sup> M. Steenbeck, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Konzern XIX, 59, 1940.

— <sup>2)</sup> R. Seeliger, ZS. f. Phys. 116, 207, 1940.



funktionalen Zusammenhang  $f(R, T)$  einführen, welcher so gewählt wird, daß der Betrag der durch Wärmeleitung der Säule entzogenen Energie richtig wiedergegeben wird, doch ist dann diese Funktion nicht aus theoretischen Erwägungen heraus angebbar, sondern müßte empirisch bestimmt werden. Mit Einführung von  $T'$  erweitert sich die Zahl der zu bestimmenden Größen und es muß außer der Minimumforderung für den Gradienten noch eine weitere Bedingung gefordert werden. So führt z. B. die Bedingung  $T = \text{Min}$  in einigen Fällen zu praktisch brauchbaren Ergebnissen. Sind nicht zwei, sondern mehrere definiert verschiedene Arten der Energieabgabe möglich, so steigt entsprechend die Zahl der zu fordernden Nebenbedingungen.

*Die Minimumforderung als allgemeines Prinzip für elektrische Entladungen.*

Das Minimumprinzip kann, wie oben gesagt, in drei verschiedenen Arten aufgefaßt werden. Die anspruchsloseste Formulierung ist folgende: Kann eine Entladung durch Änderung ihrer Stromverteilung (eventuell Temperaturverteilung) ihre Brennspannung wesentlich erniedrigen, so ist sie nicht stabil und entwickelt sich im Laufe der Zeit zu einer Form, deren Brennspannung nicht sehr weit von der minimalen liegt. Eine stabile Entladung besitzt eine Brennspannung, die nicht mehr sehr erheblich durch Abändern der Stromverteilung erniedrigt werden kann, die stabile Stromverteilung hingegen braucht keine Ähnlichkeit mit derjenigen zu haben, bei der die Brennspannung ein Minimum wäre. In dieser Form dürfte das Prinzip wahrscheinlich richtig sein. In einigen Fällen läßt sich dies durch Stabilitätsbetrachtungen im einzelnen dartun, wie dies zu Beginn dieser Untersuchung an einigen Beispielen geschehen ist.

Etwas weitergehend ist die Behauptung, daß die stabile Stromverteilung und Brennspannung sich nicht sehr von derjenigen unterscheide, die zu der minimalen Brennspannung gehört. Wenn diese Behauptung auch in vielen Einzelfällen richtig sein mag, so möchten wir ihr doch keine Allgemeingültigkeit zubilligen. Diese beiden Formulierungen des Minimumprinzips ergeben eine Art von experimentellen Faustregeln, die im Gebrauch sehr nützlich sind, aber vorsichtig gehandhabt werden müssen. Das Resultat ihrer Anwendung sollte, wenn möglich, stets durch andere Gründe noch gesichert werden. Ein Naturgesetz im eigentlichen Sinne ist das Minimumprinzip in dieser Ausdrucksform hingegen nicht.

Eine dritte Formulierung würde behaupten, daß die stabile Stromverteilung einer Entladung stets diejenige wäre, bei der die Brennspannung den kleinsten Wert hätte. Wenn das Minimumprinzip in dieser Form richtig wäre, müßte man seine Bedeutung ungefähr ebenso hoch einschätzen

wie die der mechanischen Integralprinzipien, etwa des Hamiltonschen Prinzips. Es müßte dann eine Reihe von mit einer detaillierten Beschreibung der Entladung verträglichen Folgerungen ergeben. Gleichungen wie die Elenbaas-Hellersche sollten sich als zu dem Minimumprinzip gehörige Eulersche Gleichungen erweisen. Leider trifft in dieser Form das Minimumprinzip sicher nicht zu. Dies wollen wir etwas mehr im einzelnen verfolgen.

Wir wollen zunächst die Diskussion auf eine etwas breitere Basis stellen. Zwei Flächenstücke  $F_1$  und  $F_2$  mögen sich auf dem Potential  $V_1$  und  $V_2$  befinden. Durch  $F_1$  möge der Strom  $J$  zugeführt und durch  $F_2$  wieder abgeführt werden. Die Elektroden  $F_1$  und  $F_2$  sollen also durch eine Strombahn überbrückt werden, die sich entweder in einem Gas oder in einer Flüssigkeit oder in einem festen Leiter ausbilden kann. Wir wollen jetzt die Richtigkeit folgender Behauptungen untersuchen: Die Stromlinien zwischen  $F_1$  und  $F_2$  und die Feldverteilung sind so beschaffen, daß bei vorgegebenem Gesamtstrom die an den Elektroden liegende Potentialdifferenz  $V_1 - V_2$  ein Minimum, bei vorgegebener Spannung  $V_1 - V_2$  der Strom  $J$  ein Maximum ist. Diese Behauptung ist offenbar eine Verallgemeinerung des Steenbeckschen Prinzips und man ist geneigt ihr ebenso wie diesem eine gewisse Plausibilität zuzubilligen. Wir werden aber im folgenden leicht zeigen können, daß der Satz wenigstens in dieser Allgemeinheit falsch ist.

Die Elektroden  $F_1$  und  $F_2$  seien durch ein beliebig geformtes Medium überbrückt, dessen Leitvermögen eine beliebige Funktion des Ortes sei, aber auch nur davon abhängen. Insbesondere soll das Leitvermögen  $\kappa$  weder direkt noch indirekt von der Stromdichte etwa auf dem Umwege über die Temperatur abhängen. Es soll also zwischen Stromdichte und Feldstärke in jedem Punkt des Raumes der lineare Zusammenhang

$$i = \kappa \cdot \mathfrak{E} \quad (5)$$

gelten, wo  $\kappa(x, y, z)$  eine reine Ortsfunktion ist.

Nun denken wir uns die Schar der Äquipotentialflächen  $V = \text{konstant}$  bezeichnet und den ganzen Raum in Volumenelemente  $d\tau = df \cdot dr$  zerlegt, wo  $df$  in einer Äquipotentialfläche liegt und  $dr$  zu einer Stromlinie parallel ist. Wir bilden dann das Integral

$$\iiint (i \mathfrak{E}) d\tau = \int i df \int (\mathfrak{E} dr) = J (V_1 - V_2). \quad (6)$$

Soll bei konstant gehaltenem Strom

$$V_1 - V_2 = \int \mathfrak{E} dr \quad (7)$$

ein Minimum sein, so bedeutet dies, daß unter den gleichen Umständen der Energieumsatz  $J(V_1 - V_2)$  ein Minimum ist. Soll bei konstanter Spannung der Strom  $J = \int i df$  ein Maximum sein, so muß der Energieumsatz ein Maximum werden, wenn  $V_1 - V_2$  vorgegeben ist. Auf jeden Fall soll also

$$\iiint (\mathfrak{E}) d\tau = \iiint (\kappa \mathfrak{E}^2) d\tau \quad (8)$$

einen stationären Wert besitzen, d. h.

$$\delta \iiint \kappa \mathfrak{E}^2 d\tau = \delta \iiint \kappa \left\{ \left( \frac{dV}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dy} \right)^2 + \left( \frac{dV}{dz} \right)^2 \right\} d\tau = 0 \quad (9)$$

gelten. Ist die Spannung vorgegeben und wird das Strommaximum gesucht, so besteht keine Nebenbedingung und nach den Gesetzen der Variationsrechnung folgt hieraus sofort

$$2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \kappa \frac{dV}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \frac{dV}{dy} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{dV}{dz} \right\} = 2 \operatorname{div} \kappa \mathfrak{E} = 2 \operatorname{div} i = 0. \quad (10)$$

Dies ist nichts anderes als die bekannte Stationaritätsbedingung

$$\operatorname{div} i = 0$$

der Elektrodynamik.

Befindet sich zwischen zwei Elektroden ein Medium von nur ortsabhängigem Leitvermögen, so bildet sich tatsächlich eine solche Stromverteilung heraus, daß bei vorgegebener Spannung zwischen den Elektroden der Strom ein Maximum ist. Bei festem Strom wird in diesem Falle naturgemäß die Spannung ein Minimum. Man geht wohl nicht zu weit mit der Meinung, daß gewisse Erfahrungen, die man an solchen Fällen gesammelt hat, dazu verleiten, das Minimumprinzip allgemein für richtig zu halten.

Wir zeigen jetzt aber leicht, daß Forderung (9) zu unrichtigen Konsequenzen führt, wenn die Leitfähigkeit nicht eine Funktion des Ortes allein ist, sondern außerdem z. B. noch von der Feldstärke abhängt. In diesem Falle enthält  $\kappa$  auch noch  $\partial V / \partial x$ ;  $\partial V / \partial y$ ;  $\partial V / \partial z$  und statt (10) gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_x} (\kappa \mathfrak{E}^2) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_y} (\kappa \mathfrak{E}^2) + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \mathfrak{E}_z} (\kappa \mathfrak{E}^2) = 0, \quad (11)$$

wenn man

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= \mathfrak{E}_x; & -\frac{\partial V}{\partial y} &= \mathfrak{E}_y; & -\frac{\partial V}{\partial z} &= \mathfrak{E}_z; \\ \left( \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 &+ \left( \frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 &+ \left( \frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 &= \mathfrak{E}^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

einsetzt. Hieraus erhält man leicht

$$\begin{aligned} 2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \kappa \mathfrak{E}_x + \frac{\partial}{\partial y} \kappa \mathfrak{E}_y + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \mathfrak{E}_z \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \mathfrak{E}_x} + \frac{\partial}{\partial y} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \mathfrak{E}_y} + \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{E}^2 \frac{\partial \kappa}{\partial \mathfrak{E}_z} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Da nun  $\kappa$  sicher nur vom Betrage  $|\mathfrak{E}|$  der Feldstärke, nicht aber von ihrer Richtung, also nicht von den Komponenten  $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{E}_y, \mathfrak{E}_z$  einzeln abhängt, ist

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \mathfrak{E}_x} = \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \cdot \frac{\partial |\mathfrak{E}|}{\partial \mathfrak{E}_x} = \frac{\mathfrak{E}_x}{|\mathfrak{E}|} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \quad (14)$$

und (13) geht in

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{div} \kappa \mathfrak{E} + \frac{\partial}{\partial x} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_x \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} + \frac{\partial}{\partial y} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_y \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} |\mathfrak{E}| \mathfrak{E}_z \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} = 2 \operatorname{div} i + \operatorname{div} \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \end{aligned} \quad (15)$$

über. Soll dies mit der Stationaritätsbedingung  $\operatorname{div} i = 0$  verträglich sein, so findet man

$$\operatorname{div} \left\{ \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} = 0.$$

Hierfür kann man auch

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \left\{ \mathfrak{E} |\mathfrak{E}| \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} &= \operatorname{div} \left\{ \kappa \mathfrak{E} \frac{|\mathfrak{E}|}{\kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial |\mathfrak{E}|} \right\} \\ &= \operatorname{div} \left\{ \kappa \mathfrak{E} \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right\} = \operatorname{div} \left\{ i \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right\} \\ &= \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \cdot \operatorname{div} i + \left( i \operatorname{grad} \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right) = \left( i \operatorname{grad} \frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln |\mathfrak{E}|} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

schreiben. Diese Bedingung wird im allgemeinen nicht erfüllt sein, sondern kann nur zufällig richtig sein.

Wir diskutieren noch einen Spezialfall genauer. Wenn  $\kappa$  vom Ort nicht explizit abhängt, sondern von Ort zu Ort nur deshalb veränderlich ist, weil an verschiedenen Orten verschiedene Feldstärken herrschen, ist

$$\frac{d \ln \kappa}{d \ln |\mathfrak{E}|} = F(|\mathfrak{E}|) = f(\mathfrak{E}^2) \quad (17)$$

eine Funktion von  $\mathfrak{E}^2$  allein und (16) geht über in

$$\left( i \frac{df}{d\mathfrak{E}^2} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 \right) = 0, \quad (18)$$

woraus

$$i \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 0 \quad (19)$$

folgt. Die Minimumbedingung verlangt also jetzt, daß die Stromdichte senkrecht auf der Richtung steht, in der sich der Beitrag der Feldstärke am schnellsten ändert. Nun ist aber

$$\operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 2 [\mathfrak{E} [\operatorname{rot} \mathfrak{E}]] + 2 (\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \mathfrak{E} \quad (20)$$

und wegen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$$

$$\operatorname{grad} \mathfrak{E}^2 = 2 (\mathfrak{E} \operatorname{grad}) \mathfrak{E},$$

womit die Minimumforderung in

$$i(\mathfrak{E} \text{ grad}) \mathfrak{E} = 0 \quad (21)$$

übergeht. Bilden wir also den Vektor  $(\mathfrak{E} \text{ grad}) \mathfrak{E}$ , so muß seine Komponente in Richtung der Stromlinien verschwinden. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß der Betrag der Feldstärke längs einer Stromlinie konstant sein muß.

Für die Entladung gelten also dann die Beziehungen:

$$i(\mathfrak{E} \text{ grad}) \mathfrak{E} = 0$$

und

$$\text{div } i = \text{div}(\kappa \mathfrak{E}) = \mathfrak{E} \text{ grad } \kappa + \kappa \text{ div } \mathfrak{E}.$$

Unter den gemachten Voraussetzungen ist ferner

$$\text{grad } \kappa = \frac{d\kappa}{d\mathfrak{E}^2} \text{grad } \mathfrak{E}^2 = 2 \frac{d\kappa}{d\mathfrak{E}^2} (\mathfrak{E} \text{ grad}) \mathfrak{E} \quad (22)$$

und wir finden

$$2 \frac{d\kappa}{d\mathfrak{E}^2} \frac{1}{\kappa} i(\mathfrak{E} \text{ grad}) \mathfrak{E} + \kappa \text{ div } \mathfrak{E} = 0, \quad (23)$$

so daß aus (21)

$$\text{div } \mathfrak{E} = 0$$

folgt. Die Extremalbedingung verlangt also eine raumladungsfreie Entladung, falls das Leitvermögen nur von dem Betrage der Feldstärke abhängt.

Leider hängt bei fast allen Entladungen die Leitfähigkeit nicht nur von der Feldstärke ab. Viel häufiger, in Lichtbögen z. B., ist  $\kappa$  eine Funktion der Temperatur. Nur in dem speziellen Fall, daß die Stromwärme, die in einem Volumenelement entwickelt wird, nur durch Ausstrahlung abgegeben und die Wärmeableitung überhaupt nicht am Energietransport beteiligt ist, treffen die eben gemachten Überlegungen zu. In diesem besonderen Falle also müßte die Entladung von einem völlig neutralen Plasma getragen werden. Die Minimumforderung würde Raumladungen nur in dem Maße erlauben, als sich auch Wärmeableitung an der Beseitigung der Energie beteiligt.

In einer Entladung von Zylindersymmetrie würde  $\text{div } \mathfrak{E} = 0$  die Poissonsche Gleichung

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

liefern, worauf sich bei konstanter Längsfeldstärke  $-\frac{dV}{dz} = \mathfrak{E}_z$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{dV}{dr} = 0$$



mit der allgemeinen Lösung

$$V = z \cdot \mathfrak{E}_z + C \ln r \quad (24)$$

ergeben würde. Hier muß natürlich  $C = 0$  sein, da sonst für  $r = 0$  das Potential unendlich würde, d. h. das Minimumprinzip läßt keine radiale Feldstärke zu. Umgekehrt müßte in einer Entladung ohne radiale Komponente des Feldes die Längskomponente der Feldstärke konstant sein.

Sehr viel schwieriger ist eine Entladung zu behandeln, bei der die Stromwärme durch Wärmeleitung beseitigt wird. Für die Wärmeableitung gilt die Differentialgleichung

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = \kappa \mathfrak{E}^2, \quad (25)$$

die bei konstantem Wärmeleitungskoeffizienten  $\lambda$

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \frac{\kappa}{\lambda} \cdot \mathfrak{E}^2$$

ergibt. Setzt man in die Minimumbedingung

$$\delta \int \kappa \mathfrak{E}^2 d\tau = 0 \quad (26)$$

die Temperatur ein, so erhält man

$$\delta \int \operatorname{div} \operatorname{grad} T d\tau = 0. \quad (27)$$

Führt man zunächst mit dem Gaußschen Satz die Integration über das Volumen aus und führt den Wärmestrom

$$j = -\lambda \operatorname{grad} T$$

ein, so geht dies in

$$\delta \oint j df = \delta Q = 0 \quad (28)$$

über. Das Minimumprinzip verlangt jetzt, daß die aus der Entladung abgeleitete Wärmeleistung extremal sei. Eine Forderung, die ziemlich trivial erscheint.

Der Durchrechnung der Minimaufgabe stellen sich aber jetzt formale Schwierigkeiten in den Weg. Hängt  $\kappa$  nur vom Potential, der Feldstärke, dem Ort und von höheren Ableitungen des Potentials ab, so liegt eine Minimaufgabe ohne Nebenbedingung vor, bei der die gesamte Funktion des Potentials auf dem Rande des Bereichs vorgegeben ist. Diese Aufgabe wird durch die Eulersche Gleichung gelöst. Führen wir dagegen die Temperatur ein, und betrachten wir sie als die zu bestimmende Ortsfunktion, so sind ihre Werte auf dem Rande des Bereiches auch vorgegeben, außerdem sind aber auch die Werte des Potentials auf dem Rande vorgeschrieben. Da Temperatur und Potential über die Differentialgleichung

$$-\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} T = \kappa (\operatorname{grad} V)^2 \quad (29)$$

zusammenhängen, hängt  $V$  nicht nur von der Temperatur an derselben Stelle, sondern von der Temperaturverteilung im Raum ab und die Festlegung von  $V$  auf dem Rande trägt den Charakter einer Nebenbedingung. Man kann sie durch

$$\delta \int (\text{grad } V ds) = 0 \quad (30)$$

formulieren, wo die Integration über eine Stromlinie auszuführen ist.

In besonders günstigen Fällen jedoch, z. B. wenn die Entladung zylindrisch ist, kann man die Rechnung doch ausführen. In diesem Falle ist die Stromstärke

$$J = \int \kappa \mathfrak{E} df = 2\pi \mathfrak{E}_z \int_0^R \kappa r dr. \quad (31)$$

Die Leitfähigkeit sei allein von der Temperatur abhängig. Der Energieabtransport geschehe durch Strahlung und Wärmeleitung. Dann gilt

$$\kappa \mathfrak{E}_z^2 = -\text{div} (\lambda \text{grad } T) + S(T). \quad (32)$$

Soll bei konstantem Strom der Gradient  $\mathfrak{E}_z$  ein Minimum sein, so muß

$$\begin{aligned} J \mathfrak{E}_z &= \int_0^R \left\{ S(T) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \lambda \frac{dT}{dr} \right\} r dr \\ &= \int_0^R \left\{ S \cdot r - \lambda r \frac{d^2 T}{dr^2} - \lambda \frac{dT}{dr} - r \frac{d\lambda}{dT} \left( \frac{dT}{dr} \right)^2 \right\} dr \end{aligned} \quad (33)$$

ein Minimum werden. Diesmal ist auf dem Rand  $R$  des Bereiches  $T$  vorgeschrieben, und wir können einfach die Eulerschen Gleichungen bilden. Bei konstantem  $\lambda$  lauten sie:

$$r \frac{\partial S}{\partial T} - \frac{d^2}{dr} \lambda r = 0, \quad (34)$$

woraus

$$\frac{\partial S}{\partial T} = 0 \quad (35)$$

folgt.

Bei konstantem Wärmeleitvermögen gibt es also ein Minimum des Gradienten überhaupt nicht, da die Ausstrahlung mit der Temperatur monoton ansteigt. Ist  $\lambda$  eine Funktion von  $T$ , so erhalten wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die aber mit der Elenbaas-Hellerschen nicht identisch ist, da sie ja gar nicht die Feldstärke  $E$  enthält.

Hiermit wäre zunächst festgestellt, daß die Elenbaas-Hellersche Differentialgleichung nicht als Eulersche Gleichung aus dem Prinzip der

minimalen Brennspannung abgeleitet werden kann. Dieses Prinzip ist kein echtes Minimumprinzip, das die wahre Stromverteilung einer Entladung festlegt. Seine Brauchbarkeit ist vielmehr auf besonders günstige Fälle beschränkt, wo es als eine Art Faustregel benutzt werden kann. Den Grund für das Versagen des Minimumprinzips kann man darin erblicken, daß die Entladung keine rein elektrische Erscheinung ist, da sich an ihr auch thermische Prozesse (Wärmeleitung) unter starker Mitwirkung der Materialeigenschaften abspielen. Für einen rein elektrischen Entladungsvorgang, bei dem das Leitvermögen nur Ortsfunktion wäre, würde das Minimumprinzip die richtige stationäre Stromverteilung liefern.

In diesem Zusammenhang möchten wir bemerken, daß auch z. B. das Hamiltonsche Prinzip der Mechanik seine Gültigkeit einbüßt, wenn bei der Bewegung nicht konservative Kräfte beteiligt sind, d. h. wenn die Bewegung mit Umwandlung von Energie in Wärme verbunden ist. In ähnlicher Weise wird das rein elektrische Prinzip vom Minimum der Brennspannung unanwendbar, wenn die Vorgänge nicht mehr rein elektrisch sind. Dieser ziemlich einleuchtende Umstand nimmt aber diesem Prinzip für die Gasentladungen die allgemeine Bedeutung.

*Bonn*, Institut f. theor. Physik.

*Berlin*, Studienges. f. elektr. Beleuchtung m. b. H.

---

## Die Steigerung der Intensität offener Röntgenröhren durch bewegliche Anoden.

Von M. Straumanis, Riga.

(Unter Mitarbeit von A. Dravnieks.)

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 13. August 1942.)

Es wird eine bewegliche, wassergekühlte Anode beschrieben, die längs einer Kegelmantellinie rotiert. Die Herstellung solcher Anoden ist ziemlich einfach und sie können direkt an schon vorhandene offene Röntgenröhren, z. B. an Seemann-Röhren angeschlossen werden. Bei einer Umdrehungszahl von 2200 in der Minute läßt sich die Intensität der Röhre in Halbwellschaltung zweifach steigern, wobei eine spezifische Belastbarkeit des Brennflecks von 150 Watt/mm<sup>2</sup> erreicht wird. Das Anstechen des Brennrings erfolgt hierbei eben noch nicht. Werden beide Phasen gleichgerichtet, so ist eine nochmalige Abnahme der Belichtungsdauer für Feinstrukturuntersuchungen zu erwarten.

*Einleitung.* Die Gründe, weshalb fortwährend versucht wird, zu Röntgenröhren mit möglichst intensiver Strahlung zu gelangen, sind so bekannt, daß man diesen Punkt hier nicht mehr zu berühren braucht. Als intensivste Röhren, für Dauerbetrieb berechnet, haben sich die offenen erwiesen. Unter diesen zeichnen sich aber durch besonders hohe Intensität solche mit beweglichen Anoden aus. Für den Dauerbetrieb sind Röhren von Stintzing<sup>1)</sup>, Clay<sup>2)</sup>, Fournier, Gondett und Mathieu<sup>3)</sup>, Du Mond und Youtz<sup>4)</sup>, Whiggle<sup>5)</sup>, Müller und Clay<sup>6)</sup>, Beck<sup>7)</sup>, Hosemann<sup>8)</sup> u. a.<sup>9)</sup> konstruiert worden. Sieht man sich aber die Beschreibungen der Apparate an, wie die z. B. von Müller und Clay (50 kW), Du Mond und Youtz (30 kW), so findet man, daß es ganz große Einrichtungen sind. Auch der verhältnismäßig einfache Apparat von Beck (10 kW) ist schwer zu handhaben.

Indessen sind intensive Röntgenapparate auch in kleineren, wenig bemittelten Laboratorien dringend notwendig. Wenn Aufnahmen mikroskopischer Kriställchen 20 und mehr Stunden dauern, so stellt sich die

<sup>1)</sup> H. Stintzing, Phys. ZS. **27**, 844, 1926. — <sup>2)</sup> R. E. Clay, Proc. phys. Soc. **46**, 703, 1934. — <sup>3)</sup> M. M. Fournier, W. Gondett u. M. Mathieu, J. Physique **8**, 160, 1937. — <sup>4)</sup> J. W. M. Du Mond u. J. P. Youtz, Rev. Scient. Inst. **8**, 291, 1937. — <sup>5)</sup> R. S. Whiggle, J. Inst. el. Engin. **83**, 306, 1938. — <sup>6)</sup> A. Müller u. R. E. Clay, ebenda **84**, 261, 1939. — <sup>7)</sup> J. Beck, Phys. ZS. **40**, 474, 1939. — <sup>8)</sup> R. Hosemann, ZS. f. techn. Phys. **20**, 203, 1939. — <sup>9)</sup> Weitere Angaben hierzu s. W. Wittstadt, ZS. f. Elektrochem. **46**, 521, 1940; H. Stintzing u. Hesse, Metallwirtschaft **1941**, S. 45—53.

lange Belichtungszeit als besonders hindernd in den Weg, ganz abgesehen davon, daß viele Untersuchungen, z. B. Verfolgung schneller Strukturänderungen, überhaupt nicht mit gewöhnlichen Röntgenröhren durchgeführt werden können. Mit einer Verkürzung der Expositionszeit z. B. auf die Hälfte wäre hier schon sehr viel geholfen.

Es wurde deshalb versucht, im Gegensatz zu den bisherigen Bemühungen, eine bewegliche Anode zu konstruieren, die imstande wäre, hohe Strahlungsintensitäten ohne anzustechen auszuhalten, die aber *an schon vorhandene offene Röntgenröhren* angebracht werden könnte. Die weiter unten beschriebene Anode paßt direkt zu Seemann-Röhren und kann ebenso leicht eingeführt und ausgewechselt werden, wie jede andere Seemann-Anode.

*Die Belastbarkeit ruhender Anoden.* Wird eine Röntgenröhre durch eine kW-Zahl oder mA-Zahl charakterisiert, so ist damit über die Intensität der Röhre in bezug auf Feinstrukturuntersuchungen noch nichts Bestimmtes gesagt, denn eine Röhre mit großer mA-Zahl kann sich für die genannten Zwecke als weniger intensiv erweisen, als eine andere mit kleinerer. Hier kommt es nur auf die *spezifische Belastbarkeit* der Röhre, ausgedrückt in Watt/mm<sup>2</sup> des Brennflecks, bei der das Metall noch *nicht* angegriffen wird, an. Nach Berthold <sup>1)</sup> liegt die Grenze etwa bei 60 bis 70 Watt/mm<sup>2</sup>, bei Eisen auf die Hälfte niedriger; auch 80 Watt wird für Kupferanoden angegeben <sup>2)</sup>. Bevor zu den beweglichen Anoden überzugehen, mußte diese Zahl geprüft werden, und zwar für die hier vorhandene Apparatur in Halbwellschaltung.

Da bei der Verkleinerung des Brennflecks, wie das schon früher betont wurde, die spezifische Belastbarkeit zunimmt, so ist es vorteilhaft, einen möglichst kleinen Brennfleck zu wählen <sup>3)</sup>. Hierdurch ist man weiter imstande, beim Übergang auf bewegliche Anoden den Röhrenstrom mehrfach zu steigern, ohne die Transformatoren zu überlasten. Allein darf die kurze Achse der Brennflecksprojektion auf die Strahlenrichtung auf keinen Fall den Präparatdurchmesser unterschreiten, weil dadurch unsymmetrische Aufnahmen entstehen könnten. Man kommt so zum Schluß, daß bei einer 1-mm-Blende und deren Neigung von 10 bis 15° zum waagerechten Anodenspiegel der runde Brennfleck einen günstigsten Durchmesser von etwa 3 mm besitzen mußte. Durch Probieren wurde eine solche Größe des Brennflecks eingestellt, sein Durchmesser mit Hilfe von Lochkamera-

<sup>1)</sup> R. Berthold, ZS. f. Metallkde. 20, 350, 1928. — <sup>2)</sup> J. Beck, Phys. ZS. 40, 474, 1939. — <sup>3)</sup> M. Straumanis u. O. Mellis, ZS. f. Phys. 94, 186, 1935.



aufnahmen bei vierfacher Vergrößerung (acht Aufnahmen)<sup>1)</sup> festgestellt und der Fleck auf Belastbarkeit geprüft. Es erwies sich hierbei, daß bei 10 mA Röhrenstrom, 40000 Volt Spannung und Wasserkühlung die Kupferanode im Laufe einer Stunde noch nicht angestochen wurde. Wurde die Stromstärke auf etwa 11 bis 13 mA gesteigert, so geschah das sehr bald. Man dürfte also im Falle der Halbwellenschaltung 73,4 Watt/mm<sup>2</sup> für Kupferanoden als den Höchstwert der spezifischen Belastbarkeit ansehen (Durchmesser des runden Brennflecks 2,88 mm, Stromstärke 12 mA, also 1,835 mA/mm<sup>2</sup>). Diese Zahl steht in ziemlicher Übereinstimmung mit den obigen Angaben. Dauernd wird man wohl nur mit 10 mA arbeiten, da durch gelegentlich auftretende Stromschwankungen, im Falle der Arbeit mit 12 mA, diese Grenze leicht überschritten werden könnte, was ein Anstechen zur Folge hätte<sup>2)</sup>. Durch das Ausdehnen der Brennofläche, ohne den Durchmesser des auftreffenden Elektronenstrahls zu vergrößern, was durch Bewegung der Anode zu erzielen ist, kann die Intensität des ausgeblendeten Röntgenstrahls wesentlich gesteigert werden.

*Die Belastbarkeit rotierender Anoden.* Eine wie hohe Steigerung der Intensität ist in solchen Fällen zu erwarten? Müller<sup>3)</sup> hat darüber theoretische Betrachtungen angestellt, die von Du Mond<sup>4)</sup>, Fournier, Gondett und Mathieu<sup>5)</sup> vervollständigt und berichtigt worden sind. Hier soll jedoch versucht werden, von einer anderen Seite dem Problem näherzutreten und im Falle einer Halbwellenschaltung für wassergekühlte Kupferanoden durch eine Abschätzung auf die aufgeworfene Frage zu antworten.

Rotiert eine Anode, die senkrecht zum Spiegel durch einen pulsierenden Elektronenstrahl getroffen wird, so ist es klar, daß ein jeder Impuls eine neue, kalte Stelle der Anode vorfinden wird. Das Aufeinanderfallen wird sich wohl nur nach einer größeren Zahl von Umdrehungen vollziehen, wobei die schon einmal belastete Stelle der Anode sich inzwischen erheblich ab-

<sup>1)</sup> Herrn Dr. H. Seemann, Freiburg i. Br. danke ich hierbei für die brieflich mitgeteilten Ratschläge. Über die Form und die Intensitätsverteilung innerhalb des Brennflecks s. H. Seemann, *Ergebn. d. techn. Röntgenkde.* III, 80, 1933; *ZS. f. Phys.* 79, 742, 1932; H. Seemann u. K. F. Schotzky, *ebenda* 71, 1, 1931. — <sup>2)</sup> Früher wurde 3 bis 4 mA/mm<sup>2</sup> angegeben (s. Fußn. 3, S. 48); diese Zahl bezog sich aber nur auf die Anstichfläche, da der Brennfleck damals nicht aufgenommen, sondern nur mit der Lochkamera beobachtet wurde. Der Brennfleck ist aber größer als die Anstichfläche. — <sup>3)</sup> A. Müller, *Proc. Roy. Soc. London (A)* 117, 30, 1927; 125, 507, 1929; 132, 646, 1931; s. auch A. Bouwers, *Ergebn. d. techn. Röntgenkde.* IV, 152, 1934; *ZS. f. techn. Phys.* 8, 271, 1927. — <sup>4)</sup> J. W. M. Du Mond, W. Watson u. W. Hicks, *Rev. Sci. Inst.* 6, 183, 1935. — <sup>5)</sup> M. M. Fournier, W. Gondett u. M. Mathieu, *J. Physique* 8, 160, 1937.

gekühlt haben wird. Beobachtet man dennoch bei größerer Stromdichte ein Anschmelzen (Anstechen) der rotierenden Anode, wie das die Fig. 1 zeigt, so folgt daraus, daß das Anstechen schon während der Dauer der



Fig. 1. Angestochene rotierende Anode; 25 mA, 40 kV, 1 Stunde; Durchmesser des ruhenden Brennflecks 2,88 mm. 2fach. 1250 Umdrehungen/Minute.

positiven Halbwelle (halbe Periode) in einer Zeit weniger als 0,01 Sekunde erfolgt. Diese läßt sich ziemlich leicht ungefähr ermitteln, wenn man einen Filmstreifen auf einer Scheibe befestigt, mit der Hand in Bewegung setzt, und vor einem ausgeblendeten Röntgenstrahl vorübergleiten läßt. Man erhält auf dem Film eine Reihe von Punkten oder Linien, je nach Geschwindigkeit der Rotation der Scheibe. Der Abstand zwischen zwei Schwärzungen wird in  $\frac{1}{50}$  Sekunde zurückgelegt (die Periodenzahl des Rigaschen Stromes ist fast genau 50). Eine der Aufnahmen, die

bei vier Geschwindigkeiten erhalten wurde, ist in der Fig. 2 wiedergegeben. Durch Vermessung der Leerlauf- und der geschwärzten Stellen wurde nun folgende Dauer der Röntgenimpulse festgestellt (Aufnahme auf Agfa-Laue-Film):

Nr. der Aufnahme	Länge		Geschwindigkeit des Filmes in cm/sec	Dauer des Röntgenimpulses in sec
	der Periode in mm	der Schwärzung in mm		
31	5,5	2,3	27,5	(0,0083)
32	27,5	10,0	137,5	0,0074
35	30,5	11,0	152,3	0,0072
36	40,0	16,6	200,0	(0,0083)
37	41,0	15,0	205,0	0,0073
38	51,0	18,0	255,0	0,0071
33	53,0	19,0	265,0	0,0072
34	70,0	25,0	350,0	0,0071
Ohne die eingeklammerten Zahlen Mittelwert				0,0072

Hieraus ist ersichtlich, daß ein Röntgenstrahlimpuls von filmschwärzender Intensität in Halbwellenschaltung 0,0072 Sekunden dauert. Die Zeitspanne jedoch, während der der Anodenfleck zum Schmelzen und Verdampfen gelangt, wird sicherlich noch kürzer als 0,0072 sein. Mit einer Dauer von 0,007 Sekunden soll deshalb weiter gerechnet werden.

Wenn der Brennfleck von rund 3 mm Durchmesser bei einer Belastung von 10 bis 12 mA noch eben nicht angestoßen wird, so muß die Fläche des Fleckes aus Wärmeabführungsgründen bei Verdoppelung des Röhrenstromes etwa verdreifacht werden: er muß in der Zeit von 0,007 Sekunden einen Weg von 9 mm beschreiben. Kennt man den Durchmesser des Brennrings, so läßt sich die Umdrehungszahl der Anode leicht berechnen. Im Falle der Seemann-Röhre konnte der Ring bis höchstens 14 mm Durchmesser erzielt werden. Hieraus findet man die notwendige Umlaufgeschwindigkeit der Anode: *1750 Umdrehungen in der Minute*. Unter solchen Umständen ist zu erwarten, daß der Brennring nicht angegriffen werden wird.

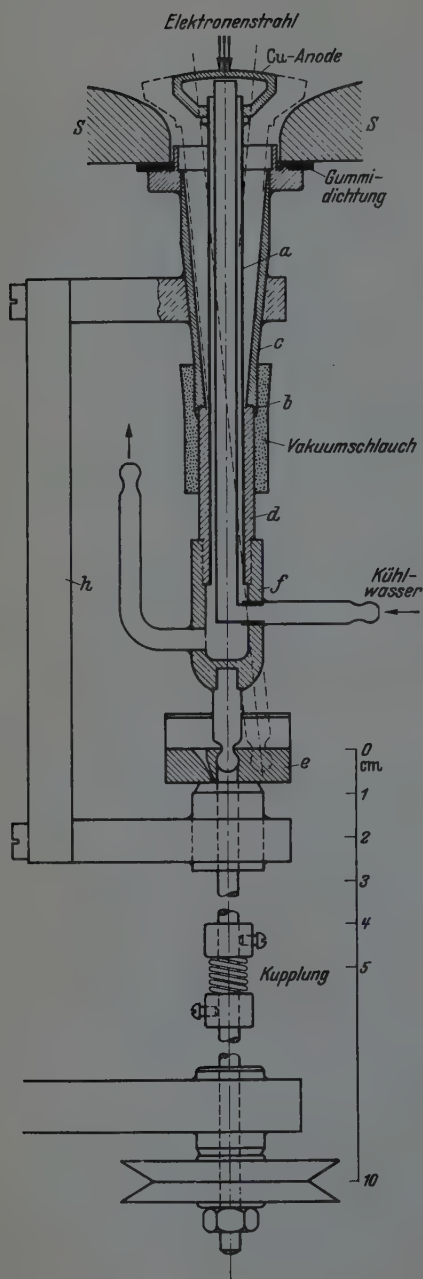


Fig. 2. Einwirkung des pulsierenden Röntgenstrahles auf einen vorübergleitenden Film. Der Abstand zwischen 2 Maxima der Schwärzungen wird in  $\frac{1}{100}$  Sekunde zurückgelegt. Aufnahme auf Agfa-Röntgenpapier.

Die spezifische Belastbarkeit der Röhre würde dann auf etwa 150 Watt/mm<sup>2</sup> gesteigert sein<sup>1)</sup> und die Leistung der Röhre würde bei 40 kV 1 kW betragen.

Aus der angegebenen Betrachtungsweise folgt weiter, daß beim Ausnutzen beider Halbwellen durch Gleichrichtung man schon bei 1750 Umdrehungen einen Effekt erzielen müßte, der einer Leistung von 2 kW in Halbwellenschaltung gleichkäme. Denn während an der ruhenden Anode durch die Verdoppelung der Zahl der Impulse in der Zeiteinheit der Wärme fluß erschwert wird, fällt im Falle einer rotierenden Anode das Elektronenbündel immer auf eine kalte Stelle. Die Dichte der Schwärzungen wird wohl zweimal größer sein als in Fig. 2, da der zweite Impuls in die etwa 0,018 Sekunden dauernde Leerstelle fällt, das Anstecken dürfte jedoch nicht erfolgen und die Aufnahmen könnten in zweimal kürzerer Zeit erledigt werden, weil die *effektive* Wattzahl zweimal größer ist als im Falle der Halbwellenschaltung.

<sup>1)</sup> Die *effektive* Wattzahl (Watt-Zeit) dürfte jedoch nur  $\frac{1}{3}$  des angegebenen Wertes ausmachen, da ja der Leerlauf sich auf  $\frac{2}{3}$  der Periode erstreckt; außerdem wird noch ein Teil der auftreffenden Elektronen aus dem Fleck heraus reflektiert: nach Seemann und Schotzky (ZS. f. Phys. 71, 1, 1931) sind es etwa 40 % der einfallenden Energie.



*Prüfung der Folgerungen durch eine bewegliche Anode.* Eine leicht an offene Röntgenröhren anzubringende rotierende Anode mit Wasserkühlung zu konstruieren ist schwierig. Ein Ausweg läßt sich aber finden, wenn man nach Du Mond und Youtz <sup>1)</sup> die Anodenachse eine Bewegung längs eines Kegelmantels beschreiben läßt. Solche „Wedelanoden“ lassen sich, wie die Erfahrung zeigt, verhältnismäßig leicht bauen. Die Anode ist im Schnitt in Fig. 3 dargestellt. Sie wird wie gewöhnlich, ebenso wie die ruhenden Anoden, mit einem Gummiring versehen und an der Anodenöffnung des Seemann-Rohres des Seemann-Rohres befestigt. Die Anodenachse *a*, gleichzeitig als Zu- und Abführungsrohr des Kühlwassers ausgebildet, stützt sich beim Rotieren mit Hilfe des aufgesteckten Rohres *d* auf die konische Hülse *c* bei *b*. Das Ende von *a* und *d* ist unten vakuumdicht (leicht) verlötet. Jetzt stülpt man über *d* und das untere Ende von *c* ein

<sup>1)</sup> J. W. M. Du Mond und J. P. Youtz, Rev. Scient. Inst. 8, 291, 1937.

Fig. 3. Wedel- oder Kegelmantelanode am Seemann-Rohr *S*. Die Abmessungen sind an Hand des beigelegten Maßstabes der Zeichnung zu entnehmen. Den Anodenkopf Cu hat man sich als nach vorn geneigt zu denken,

Stück guten Vakuummischlauchs, das die Röhre gegen die Außenluft vollständig abschließt. Zuletzt wird das Stück *f* mit den Wasserzuleitungen auf *d* wasserdicht aufgeschraubt (der Halter *h* ist hierbei natürlich entfernt). In rotierende Bewegung wird der Anodenkopf Cu nach Zusammenstellung der Einrichtung durch den Exzenter *e* gesetzt. Der obere Teil der Anode kann nun am Seemann-Rohr, wie schon erwähnt, angeschraubt werden. Der Antrieb (Fig. 3 und 4, unten) wird an der Pumpe oder am Stativ des Seemann-Rohres so befestigt (Fig. 4), daß die Achsen beider Teile sich genau gegenüberstehen. Die Federkupplung, die sich auf der Achse des einen Teiles befindet, wird zuletzt auf die andere Achse gestülpt und festgeschraubt. Der Antrieb erfolgt mit einem  $\frac{1}{8}$  HP Drehstrommotor. Die Anode läuft bis 1800 U/min sehr leicht und fast geräuschlos; über 2000 U/min macht sich aber ein knatterndes Geräusch



Fig. 4. Die Wedelanode mit Antriebswelle und Riemenscheibe am Seemann-Rohr.

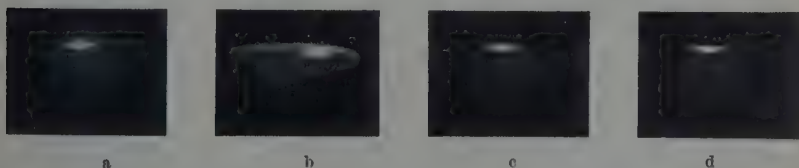


Fig. 5. Bremsfleck bei einigen Stellungen der Anode: a) Anodenkopf nach rechts; b) Anodenkopf nach links; c) Anodenkopf nach hinten; d) rotierender Anodenkopf. Nat. Gr.

infolge der unvollkommenen Konstruktion des Exzenters *e* bemerkbar. Die Erschütterungen des Rohres sind dennoch sehr gering.

Die Spiegelfläche des Anodenkopfes Cu ist als Teil der Kugelfläche  $r = 8$  cm ausgebildet, so daß der Bremsfleck beim Rotieren immer auf



derselben Höhe bleibt und sich auch seitlich nicht verschiebt. Der Brennfleck bei einigen verschiedenen Stellungen der Anode ist in Fig. 5 wiedergegeben. Die konstruierte Wedelanode ist vollkommen vakuumdicht. Es müssen aber vor der Betriebsaufnahme die adsorbierten Gase und das Glycerin (zum Aufstülpen des Gummischlauches verwandt) im Hochvakuum abgepumpt werden, wozu etwa 10 Stunden notwendig sind<sup>1)</sup>. Dann ist aber die Anode, auch nach wiederholtem Abnehmen und Wiederansetzen, zu jeder Zeit gebrauchsfertig. Gasausbrüche finden dann so gut wie gar nicht statt. Der Vakuumschlauch hält die einseitige Beanspruchung bei der wedelnden Bewegung der Anode ohne weiteres aus. Der Brennrings besitzt einen Durchmesser von 14 mm.

Was nun die Prüfung auf Leistungsfähigkeit betrifft, so wurde der Brennrings bei 1250 U/min und Verdoppelung des Röhrenstromes sehr stark angegriffen, wie das die Fig. 1 zeigt. Bei 1690 U/min war der Ring ebenfalls angestochen, jedoch schon viel weniger. Bei 2200 U/min war nur eine Mattierung zu sehen, ohne angeschmolzene Stellen. Eine weitere Steigerung der Umdrehungszahl wurde nicht vorgenommen, da die mechanische Ausführung der Anode es nicht zuließ. Die Steigerung der Umdrehungszahl ist aber ohne weiteres bei vollkommenerem Durchkonstruieren der Anode möglich, besonders wenn man deren Achse direkt mit einem Elektromotor kuppelt.

Wie ersichtlich, entspricht das Verhalten der Anode angenähert den Erwartungen. Wenn nun eine größere Umdrehungszahl notwendig ist (2200 statt der berechneten 1750), so ist das dadurch zu erklären, daß einzelne Stromschwankungen vorkommen, die über 25 mA reichen und die Mattierung des Spiegels hervorrufen, oder auch dadurch, daß das Anstechen in noch kürzeren Zeiten als 0,007 Sekunden erfolgt.

Beim Arbeiten erwies sich die Anode als fast ebenso bequem und betriebssicher wie eine ruhende und konnte zu jeder Zeit von der Röhre leicht abgenommen und wieder angesetzt werden, während die Riemenscheibe mit Lager und Kuppelung an der Röhre ständig angeschraubt blieb. Bei einem Röhrenstrom von 20 mA ließ sich eine zweifache Abkürzung der Exposition gegenüber früheren Aufnahmen bei 10 mA erzielen, gegenüber einer Siemens-Feinstrukturrohre aber unter den gleichen Bedingungen (20 mA) eine dreifache, wie das Al-Vergleichsaufnahmen zeigten. Aufnahmen von Mikrokriställchen ( $\text{PbF}_2$ ), die früher bei unscharfem Brennfleck 14 Stunden erforderten, konnten jetzt in 3 Stunden erledigt werden. Gute Al-Pulver-

---

<sup>1)</sup> Statt des Glycerins kann auch Apiezonoel verwandt werden.

aufnahmen mit sehr deutlichen letzten Linien ließen sich schon in 5 Minuten (in einer 64 mm-Kamera) anfertigen.

Der Röhrenstrom kann aber nach Vierkötter<sup>1)</sup> noch weiter gesteigert werden, wenn man einen dünneren Anodenspiegel verwendet.

Wie schon gesagt, könnte die Expositionszeit bei Ausnutzung beider Halbwellen noch zweimal, also im ganzen viermal gegenüber einer ruhenden Anode mit einem Röhrenstrom von 10 mA und Halbwellenschaltung gesteigert werden. Infolge des Fehlens einer Gleichrichtungsanlage konnte einstweilen diese Folgerung nicht geprüft werden.

Die Herstellung und Weiterentwicklung der beschriebenen beweglichen Anodeneinrichtung hat das Seemann-Laboratorium (Freiburg i. Br.) übernommen.

*Riga* (Ostland), Analytisches Laboratorium der Universität Lettlands.

---

<sup>1)</sup> P. Vierkötter, Siedestrahlröhre, Radiologie A.-G., Berlin W 35.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.)

## Absorption langsamer Neutronen in seltenen Erden und in Cadmium\*).

Von **H. Bomke** und **H. Reddemann\*\*).**

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 31. Mai 1942.)

Für 13 seltene Erden, von denen Präparate von besonders hohem Reinheitsgrad zur Verfügung standen, wurden die Wirkungsquerschnitte für thermische Neutronen gemessen. Die Reinheit der Versuchsproben wurde außerdem durch röntgenspektrographische Aufnahmen nachgeprüft. Es wurden die folgenden Werte für die Absorptionsquerschnitte der seltenen Erden gemessen: Yttrium  $\sigma \sim 4 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Lanthan  $\sigma = 10 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Terbium  $\sigma = 15 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Neodym  $\sigma = 72 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Samarium  $\sigma = 7040 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Europium  $\sigma = 2700 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Gadolinium  $\sigma = 22550 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Dysprosium  $\sigma = 780 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Holmium  $\sigma = 52 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Erbium  $\sigma = 185 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Thulium  $\sigma = 114 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Ytterbium  $\sigma = 50 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ; Cassiopeium  $\sigma = 165 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Außerdem wurde der Absorptionsquerschnitt von Cadmium für C-Neutronen neu bestimmt, der sich in sehr guter Übereinstimmung mit den in der Literatur angegebenen Werten zu  $\sigma = 2640 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  ergab.

*1. Einleitung.* Von den seltenen Erden haben die Elemente Gadolinium, Samarium, Europium und Dysprosium auffallend große Wirkungsquerschnitte für den Einfang langsamer (in Cadmium absorbierbarer) Neutronen. Ihre Wirkungsquerschnitte sind von der Größe  $10^{-21}$  bis  $10^{-20} \text{ cm}^2$  und rühren offenbar daher, daß die genannten Elemente im Gebiet thermischer Neutronenenergien Resonanzstellen für Neutroneneinfang haben. Aber auch ein Teil der anderen seltenen Erden hat — wenigstens nach den in der Literatur vorliegenden Messungen — Absorptionskoeffizienten für langsame Neutronen, die wesentlich größer sind, als man nach dem Gang der Absorptionskoeffizienten mit der Ordnungszahl erwarten sollte. Die bisher veröffentlichten Messungen von Wirkungsquerschnitten seltener Erden sind spärlich und zum Teil von geringer Genauigkeit. Das liegt weniger an meßtechnischen Schwierigkeiten als an dem Mangel an einwandfreiem Material. Die zu messenden Proben müssen nämlich entweder sehr rein oder ihre Analyse muß genau bekannt sein, damit die Absorptionsmessungen auf die zusätzliche Absorption durch Verunreinigungen korrigiert werden können.

---

\*) Vorgetragen am 10. Oktober 1942 auf der Berliner Gautagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. — \*\*) Ende Dezember 1941 in Rußland gefallen.

Ein Gehalt an 1% Gadolinium z. B. fälscht die Absorptionsmessung völlig, wenn Gadolinium einen 100 mal größeren Wirkungsquerschnitt als die zu messende Probe hat. Da uns von allen seltenen Erden mit Ausnahme von Praseodym und Terbium gute Präparate mit bekannten Analysen zur Verfügung standen, schien es lohnend, genauere Wirkungsquerschnittsbestimmungen zu machen. Die angegebenen Analysen wurden von uns außerdem durch röntgenspektrographische Aufnahmen kontrolliert und besonders auf Verunreinigung an den sehr stark absorbierenden seltenen Erden geprüft.

Mit der von uns verwendeten Meßanordnung wird der Gesamtwirkungsquerschnitt  $\sigma = \sigma_e + \sigma_s$  (Einfang, Streuung) für thermische Neutronen (C-Neutronen) gemessen. Bei vielen seltenen Erden ist  $\sigma_s \ll \sigma_e$ , so daß der bei ihnen gemessene Wirkungsquerschnitt praktisch  $\sigma_e$  entspricht. Durch die eingefangenen Neutronen kann ein stabiles oder instabiles höheres Isotop des einfangenden Kernes entstehen. Eine Zerlegung von  $\sigma_e$  in dieser Hinsicht durch Messung der künstlichen Radioaktivität der Proben ist für eine weitere Untersuchung in Aussicht genommen. Durch die in dieser Arbeit ausgeführten Absorptionsmessungen wird der Gesamteinfangquerschnitt bestimmt. Neben den seltenen Erden wurde auch das schwach verwandte Yttrium und zur Bestimmung von Korrekturen auch Cadmium gemessen.

2. *Untersuchungsmaterial.* In Tabelle 1 sind Herkunft und Analyse aller untersuchten Proben zusammengestellt. Die meisten seltenen Erden wurden uns von der Auer-Gesellschaft geliefert. Diese Präparate sind bis auf zwei Ausnahmen von Herrn Generaldirektor Dr. Feit hergestellt und analysiert. Daneben stellte uns Herr Dr. Feit noch andere Proben aus persönlichem Besitz in liebenswürdiger Weise zur Verfügung. Die von den Herstellern angegebenen Analysen (Spalte IV in Tabelle 1) wurden von uns durch röntgenspektrographische Untersuchung ergänzt. Es wurde dazu ein von Herrn Dr. Ewald in Betrieb gesetzter Vakuumspektrograph mit Steinsalz-Drehkristall (Dispersion 24,4 XE/mm) benutzt, auf dessen Antikathode die untersuchte Substanz in kleiner Menge aufgebracht war. Zur Analyse wurde das L-Spektrum verwendet, da die Betriebsspannung des Apparates nur 25 bis 30 kV betrug. Es kam vor allem darauf an, kleine Verunreinigungen der am stärksten absorbierenden Elemente Gadolinium, Samarium, Europium und Dysprosium festzustellen, da diese die Ergebnisse bei schwächeren Absorbern stark fälschen können. Es wurden, wie aus Spalte V zu ersehen, keine größeren Mengen der genannten Elemente in den untersuchten Proben gefunden. Wir schätzen die Mindestmenge an

Tabelle 1.

I Element	II Verbindung	III Herstellung	IV Angewandte Analyse	V Nach Röntgenspektrogramm
Yttrium .....	$Y_2O_3$	Auer-Gesellschaft	99,5% $Y_2O_3$ ; ~ 0,5% $Yb_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Yb < 1%
Lanthan .....	$La_2O_3$	s. <sup>1)</sup>	sehr rein	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Er ~ 1%; Yb ~ 0,1%
Cer .....	$Ce_2O_3$	Dr. Feit	nicht sehr rein	—
Praseodym .....	$Pr_2O_3$	Dr. Feit	sehr rein	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%
Neodym .....	$Nd_2O_3$	Dr. Feit	sehr rein	Gd, Eu, Dy < 0,1%; Er ~ 1%; Yb ~ 0,1%
Samarium .....	$Sm_2O_3$	Prof. Tomaschek (Auer)	0,03—0,04% Gd	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Er ~ 1%; Yb ~ 0,1%
Europium .....	$Eu_2O_3$	Dr. Feit	0,02—0,03% Sm	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Er ~ 1%; Yb ~ 0,1%
Gadolinium .....	$Gd_2O_3$	Dr. Feit	5% Sm einschließlich Eu; 3—4% Tb	—
Dysprosium .....	$Dy_2O_3$	Dr. Feit	95% Dy; 3% Ho; 1% Th; 0,5% Gd	—
Holmium .....	$Ho_2O_3$		96% $Ho_2O_3$ ; 3% $Dy_2O_3$ ; 1% $Y_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Er ~ 1%; Yb ~ 0,1%
Erbium .....	$Er_2O_3$	Dr. Feit (Auer)	99,5% $Er_2O_3$ ; 0,5% $Y_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Dy einige %; Y s. <sup>2)</sup>
Thulium .....	$Tu_2O_3$		93% $Tm_2O_3$ ; 3% $Yb_2O_3$ ; 4% $Cp_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Y s. <sup>2)</sup>
Ytterbium .....	$Yb_2O_3$		99,0% $Yb_2O_3$ ; 1,0% $Cp_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Yb und Cp einige %
Cassiopeium .....	$Cp_2O_3$		90% $Cp_2O_3$ ; 9% $Yb_2O_3$ ; 1% $Tm_2O_3$	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Er einige %; kein Cp
Cadmium .....	Cd	handelsüblich	mehr als 99% Cd	Gd, Sm, Eu, Dy < 0,1%; Tm ~ 1%; Yb mehrere %
Bor .....	B	handelsüblich, amorph	gereinigt	—

<sup>1)</sup> Aus handelsüblichem Nitrat von Dr. Strassmann hergestellt. — <sup>2)</sup> Yttrium wurde nicht gesucht.



Verunreinigung, die noch nachzuweisen war, auf weniger als 0,1%. Diese Menge entspricht bei einem Wirkungsquerschnitt des Gadoliniums von rund  $20000 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  einem zusätzlichen Wirkungsquerschnitt von  $20 \cdot 10^{-24}$ , kann also bei kleineren Wirkungsquerschnitten einen größeren Fehler bedingen. Als Beispiel für die Genauigkeit der Methode ist in Fig. 1 eine Aufnahme von reinem Samarium mit künstlich zugesetzter Verunreinigung von 0,4% Gd wiedergegeben. Die bezeichnete Gd-Linie entspricht  $\alpha_1$  mit 2041,9 XE.

Im übrigen bestätigten die Röntgenaufnahmen die Analyse nach Spalte IV bis auf eine Ausnahme: die Aufnahme des Ytterbium zeigte aus noch nicht aufgeklärten Gründen keine Linie des Cassiopeium, das nach Spalte IV zu 1% vorhanden ist. Diese Unstimmigkeit mag sich bei genauerer spektrographischer Untersuchung aufklären, hat aber für die Berechnung des Wirkungsquerschnittes von Yb keinerlei Bedeutung. Einige der Proben enthielten nach der Röntgenaufnahme kleine Mengen Erbium und Ytterbium. Die in Spalte V angegebenen Zahlen stellen nur annähernde Schätzungen aus der visuellen Betrachtung der Filmschwärzung dar. Besondere Kontrollaufnahmen mit bekannten zugesetzten Er- und Yb-Mengen wurden nicht gemacht, da diese Elemente wegen ihres kleinen Wirkungsquerschnittes für die Berechnung von geringer Bedeutung sind <sup>1)</sup>.

Wichtig ist ferner die genaue Gewichtsbestimmung bei den Absorbern. Wir verwandten zur Messung Oxyde, da Nitrats eine beträchtliche Menge Kristallwasser enthalten, das eine unerwünschte zusätzliche Absorption bedingt <sup>2)</sup>. Die Präparate wurden uns in Oxydform geliefert. Da die Oxyde der seltenen Erden Wasser und Kohlensäure aus der Luft anziehen, wurden sie in geschlossenen Büchsen gemessen. Außerdem hatte Herr Dr. Strassmann die große Freundlichkeit, die Proben nach der Messung nochmals sorgfältig zu glühen und zu wiegen. Die Gewichtsabnahme betrug im allgemeinen 2 bis 3% (vgl. Tabelle 2, Spalte II). Über die durch Wassergehalt notwendigen Korrekturen am gemessenen Wirkungsquerschnitt siehe Abschnitt 5. — Herrn Dr. Strassmann verdanken wir weiterhin die

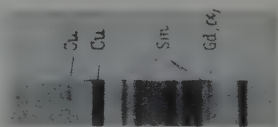


Fig. 1. Röntgenaufnahme von Sm + 0,4 % Gd.

<sup>1)</sup> Wir möchten deshalb die Angaben über Er- und Yb-Gehalt unter Vorbehalt machen, glauben aber sicher sein zu dürfen, daß Er- und Yb-Linien auf den Aufnahmen sind. Eine genauere besondere Untersuchung sämtlicher seltenen Erden mit dem Röntgenspektrographen ist geplant. — <sup>2)</sup> Z. B. ist für  $\text{Nd}_2\text{O}_3$   $\sigma = 82 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , für  $\text{Nd}(\text{NO}_3)_3 \cdot 6 \text{ H}_2\text{O}$  dagegen  $\sigma = 570 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

Analyse des untersuchten Cd-Blechtes und die mühsame Reinigung des amorphen Bors vom restlichen  $B_2O_3$  und von Magnesium- und Borverbindungen durch Auskochen mit Salzsäure.

Tabelle 2.

I	II	III	IV	V	VI	VII	Vgl. Fußnote
Element	$\frac{\Delta g}{\text{in } \frac{0}{0}}$	$\frac{g}{\text{cm}^2}$	$\frac{t}{t_0}$	$\mu d$	$\Delta o$	$\sigma \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$	
Y	—	0,286	0,98	$\sim 0,02$	7	$\sim 4$	
La	—	0,398	0,975	$0,025 \pm 0,006$	5	10	
Ce	—	0,423	0,967	$0,034 \pm 0,010$	5	15	
Pr	—	—	—	—	—	(25)	1)
Nd	0,2	0,304	0,906	$0,099 \pm 0,010$	6	72	
Sm 1	4,1	0,0433	0,296	$1,22 \pm 0,02$	22	7280	2)
Sm 2	1,1	0,0277	0,444	$0,811 \pm 0,023$	9	7360	3)
Sm 3	3,8	0,0275	0,500	$0,693 \pm 0,010$	23	6480	4)
Eu	4,2	0,0812	0,428	$0,848 \pm 0,026$	38	2700	
Gd 1	$\sim 5$	0,0121	0,381	$0,963 \pm 0,037$	300	22 300	5)
Gd 2	$\sim 5$	0,00958	0,458	$0,773 \pm 0,030$	300	22 800	
Dy	3,1	0,191	0,541	$0,614 \pm 0,006$	147	780	
Ho	0,6	0,190	0,945	$0,057 \pm 0,007$	33	52	
Er	0,5	0,196	0,873	$0,136 \pm 0,015$	5	185	
Tm	2,1	0,196	0,913	$0,091 \pm 0,010$	26	114	
Yb	3,0	0,194	0,956	$0,045 \pm 0,012$	17	50	
Cp	2,5	0,197	0,891	$0,115 \pm 0,006$	25	165	
Cd	—	0,0489	0,500	$0,692 \pm 0,010$	—	2640	6)

3. Anordnung zur Messung der Wirkungsquerschnitte. Zum Nachweis von langsamen Neutronen diente ein Borzählrohr von 3,5 cm Innendurchmesser, das mit Argon auf 18 cm Hg gefüllt war. Die Dicke der Borschicht war größer als die Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen. Die Borschicht (amorphes Bor) war mit Zaponlack auf einer Aluminiumfolie befestigt, die an der Innenwand des Zählraumes anlag. Das Zählrohr wurde im Multiplikationsbereich betrieben, da uns daran lag, mit einem möglichst einfachen Verstärker zu messen. In diesem Bereich hängt die Zählkreisbeute von der Zählrohrspannung ab. Bei 5 Volt Spannungsänderung auf 1400 Volt Zählrohrspannung änderte sich die Empfindlichkeit um 1%. Sie läßt sich mit Anodenbatterien über Stunden hin genügend konstant halten. Ein vorkommender zeitlicher Gang wurde stets durch einschließende Messungen herausgemittelt.

1) Von Dunning, Pegram, Fink u. Mitchell (l. c.) entnommen. —  
 2) Auer (Dr. Feit). — 3) Aus  $\text{Sm}(\text{NO}_3)_3$  durch Glühen hergestellt. — 4) Dr. Feit, neue Probe; jede der Proben 2) bis 4) wurde auf Gd-Gehalt geprüft. —  
 5) Dasselbe Ausgangsmaterial. — 6) Siehe Fig. 4.

Fig. 2 zeigt die Anordnung für die Absorptionsmessungen. Die langsamen Neutronen kommen aus einem zylindrischen Paraffinblock, der bei den Hauptmessungen in Stellung I stand <sup>1)</sup>. Das Neutronenpräparat befand sich in einer Bohrung 7 cm unter der Paraffinoberfläche. Der Strahlengang

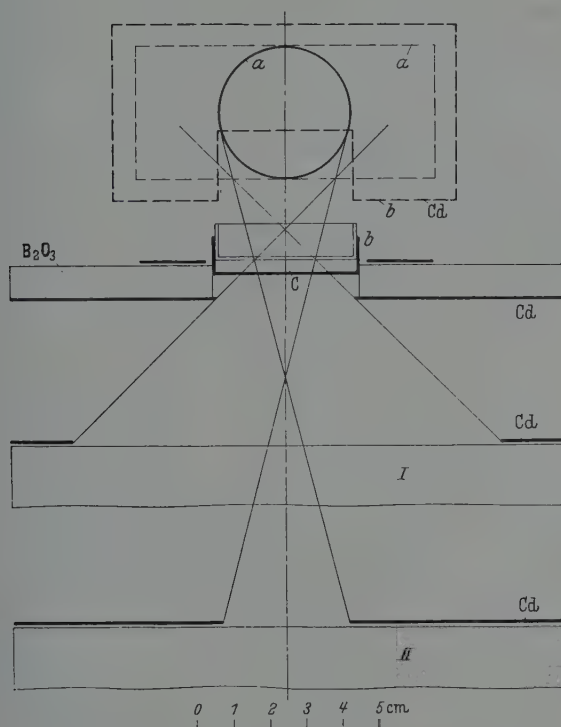


Fig. 2. Anordnung von Neutronenquelle, Absorber und Borzählrohr für die Absorptionsmessungen.

der thermischen Neutronen wurde durch die in der Figur eingezeichneten Cd-Blenden begrenzt, so daß in Anordnung I die schrägsten Strahlen einen Winkel von etwa 42° mit der Paraffinblockachse bildeten. Die Borschicht des Zählrohres ist im Querschnitt mit  $a$ , im Längsschnitt mit  $a'$  bezeichnet. Um aus der Umgebung in das Zählrohr hineingestreute langsame Neutronen zu vermeiden, war das Zählrohr bis auf eine Meßöffnung mit Cadmiumblech

<sup>1)</sup> Stellung II diente zur Bestimmung der Schiefekorrektionen (vgl. Abschn. 4).

umkleidet und außerdem die ganze Anordnung auf leichten Stativen frei im Raume aufgestellt. Eine dicke  $B_2O_3$ -Schicht, welche die nicht ausgenutzten Zählrohrteile vor langsamen Neutronen schützte, diente zur Herabsetzung des Nulleffektes. Die pulverförmigen Absorber befanden sich bei  $c$  in einer aus dünnem Blech gedrückten Büchse  $b$  von 3,6 cm Innendurchmesser. Die Substanzen wurden mit einer zweiten, gut in die untere Büchse passenden Büchse  $b'$  von der Luft abgeschlossen.

Stark absorbierende Proben von entsprechend kleiner Menge mußten, um eine zusammenhängende Schicht zu bekommen, auf ein Filter aufgebracht werden. Auch hierbei fanden wir bei Herrn Dr. Strassmann hilfsbereite Unterstützung. Die feingepulverten Oxyde wurden mit Chloroform aufgeschwemmt und in einer passenden Nutsche durch Absaugen des Chloroforms auf ein Filter gebracht. Der Filterrand wurde abgeschnitten und die Probe in einer verschlossenen Büchse gemessen.

Die Blechbüchsen gaben eine geringe zusätzliche Absorption, der durch Messung der Intensität ohne Absorber mit leerer Büchse Rechnung getragen wurde. Um die Wirkung der thermischen Neutronen allein zu bekommen, wurde wie üblich mit und ohne Cadmiumfilter gemessen und die Differenz beider Messungen gebildet. Die Teilchenzahl mit Cd-Filter betrug etwa 14% von der ohne Filter. Dabei wurde wahrscheinlich noch ein kleiner Teil der  $\gamma$ -Strahlung aus der Neutronenquelle mitgemessen. Die Intensität mit Cd-Filter (Nulleffekt) war unabhängig davon, ob sie mit oder ohne Absorber bestimmt wurde, da die nichtthermischen Neutronen durch die dünnen Absorberschichten praktisch nicht absorbiert werden. Mit einem verhältnismäßig schwachen  $RdTh + Be$ -Präparat (15 mg Ra-Äquivalent), welches uns für längere Messungen zur Verfügung stand, wurden ohne Absorber 25 thermische Neutronen in der Minute gezählt.

4. *Schiefekorrektion.* Bei Anordnung I (Fig. 2) durchsetzen die Neutronen den Absorber unter verschiedenen Winkeln zur Einfallsrichtung. Wird der Absorptionskoeffizient  $\mu$  aus dem Intensitätsverhältnis mit und ohne Absorber nach der für parallelen Strahlengang gültigen Formel  $i/i_0 = e^{-\mu d}$  ( $d$  = Absorberdicke) ausgerechnet, so kommt ein zu großer Wert für  $\mu$  heraus, der auf den richtigen Wert korrigiert werden muß. Zur Berechnung der Schiefekorrektion betrachten wir zunächst den ebenen Absorber  $A$  (Fig. 3) und den ebenen Indikator  $I$ , dessen künstliche Radioaktivität zum Neutronennachweis benutzt werde. Die Neutronen durchsetzen  $A$  und  $I$  unter verschiedenen Winkeln zur Einfallsrichtung. Dann

ergibt sich der Absorptionskoeffizient der thermischen Neutronen im Absorber  $A$  durch Auswertung des Ausdruckes

$$\frac{i}{i_0} = \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot e^{-\mu \frac{d}{\cos \vartheta}} \cdot \Phi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \right) : \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot \Phi \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \right). \quad (1)$$

Darin ist  $R(\vartheta) = \cos \vartheta + \sqrt{3} \cos^2 \vartheta$  die nach Fermi<sup>1)</sup> an Stelle von  $\cos \vartheta$  zu setzende Richtungsverteilung der aus der ebenen Paraffinoberfläche austretenden langsamen Neutronen, bei welcher in Rechnung gesetzt ist, daß die Neutronen auf ihrem Wege aus dem Paraffin heraus durch Einfang vermindert werden. In

$$\Phi = \frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_\beta \cdot \cos \vartheta} \cdot \left[ 1 - \left( e^{-\frac{\mu_i}{\cos \vartheta} d_i} + \mu_\beta \right) d_i \right]$$

ist  $\mu_i$  der Absorptionskoeffizient der thermischen Neutronen im Indikator,  $\mu_\beta$  der Absorptionskoeffizient der  $\beta$ -Strahlen im Indikator, deren Absorption beim Austritt aus dem Indikator exponentiell erfolgen möge.  $d$  und  $d_i$  sind

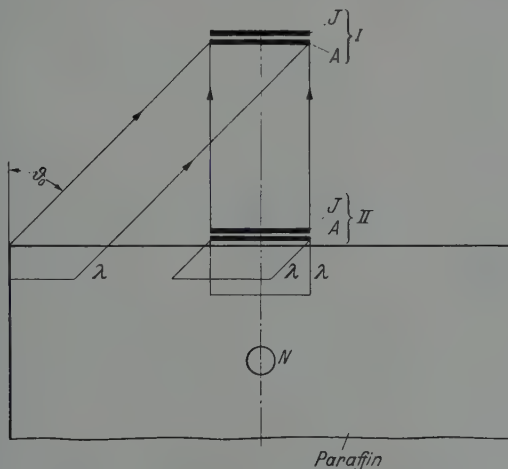


Fig. 3. Zur Berechnung der Schiefekorrektur.

Absorber- bzw. Indikatordicke. Der Grenzwinkel in (1) kann für geometrisch dünnen Absorber und Indikator, die unmittelbar auf der Paraffinoberfläche liegen (II in Fig. 3), annähernd gleich  $\pi/2$  gesetzt werden. Für größeren Abstand Absorber—Paraffin (I in Fig. 3) mag etwa der durch die Paraffinbegrenzung gegebene Winkel  $\vartheta_0$  genommen werden.

<sup>1)</sup> E. Fermi, Ric. 7, 13, 1936; vgl. auch E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899, 1936.



In (1) steckt die Annahme, daß die Quellstärke der Neutronen gleichmäßig über die ganze Paraffinoberfläche verteilt ist, was man annähernd durch Verteilung einer Anzahl von Neutronenquellen über den ganzen Paraffinquerschnitt erreichen würde. Befindet sich wie üblich eine einzige Neutronenquelle bei N, so ist die gemachte Annahme für Anordnung I, bei welcher die Neutronen aus weit getrennten Paraffingebieten stammen, kaum zutreffend, für II aber annähernd richtig, da die Neutronen aus dicht zusammenliegenden Gebieten kommen ( $\lambda$  = freie Weglänge der langsamen Neutronen).

Die Auswertung von (1) wird ermöglicht, wenn man, wie meist in praktischen Fällen, Indikatoren verwendet, die dünn oder dick für Neutronen oder  $\beta$ -Strahlen sind. In den beiden Fällen (a) Indikator dünn für Neutronen und für  $\beta$ -Strahlen, d. h.  $\left(\frac{\mu_i}{\cos \vartheta_0} + \mu_\beta\right) d_i \ll 1$  und (b) Indikator dünn für Neutronen, aber dick für  $\beta$ -Strahlen, also  $\mu_i \ll \mu_\beta$  vereinfacht sich (1) zu

$$\frac{i}{i_0} = \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot e^{-\mu \frac{d}{\cos \vartheta}} \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot d\vartheta \right) : \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot d\vartheta \right). \quad (2)$$

Ist (c) der Indikator dick für Neutronen und dünn für  $\beta$ -Strahlen, d. h.

$\mu_\beta \ll \mu_i$  und  $e^{-\left(\frac{\mu_i}{\cos \vartheta} + \mu_\beta\right) d} \ll 1$ , so wird aus (1) der Ausdruck

$$\frac{i}{i_0} = \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot e^{-\mu \frac{d}{\cos \vartheta}} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta \right) : \left( \int_0^{\vartheta_0} R(\vartheta) \cdot \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cdot d\vartheta \right), \quad (3)$$

der sich von (2) durch das Fehlen des Faktors  $1/\cos \vartheta$  unterscheidet. Ist schließlich der Indikator (d) dick für Neutronen und dick für  $\beta$ -Strahlen, so bleibt von  $\Phi$  der Faktor

$$\frac{1}{\mu_i + \mu_\beta \cdot \cos \vartheta}$$

stehen.

Bei Absorptionsmessungen mit *thermischen* Neutronen wird meist Fall (a) oder (b) zutreffen, wenn der Indikator nicht gerade eine Resonanzstelle im thermischen Gebiet hat. Für C-Neutronen ist  $\mu_i$  bei den meisten Elementen von der Größenordnung 0,1 cm<sup>2</sup>/g. Bei Messungen mit *Resonanzneutronen* läßt sich bei genügender Dünne des Indikators manchmal Fall (c) verwirklichen (Größenordnung von  $\mu_i$  für Resonanzneutronen 10 cm<sup>2</sup>/g)<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Für Resonanzneutronen gilt etwa dieselbe Richtungsverteilung  $R$ ; vgl. E. Amaldi u. E. Fermi (l. c.) und auch H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9, 133, 1937.

Eine Auswertung von (2) findet sich bei Amaldi und Fermi <sup>1)</sup> für  $\vartheta_0 = \pi/2$ , von (2) und (3) bei Frisch <sup>2)</sup> für den ganzen Winkelbereich  $\vartheta_0 = 0$  bis  $\pi/2$  angegeben. Nach der Rechnung des letzteren ist der Korrektionsfaktor  $\varphi$ , mit dem der nach der Formel  $i/i_0 = e^{-\mu d}$  zu hoch berechnete  $\mu$ -Wert zu verkleinern ist, für  $\vartheta_0 \leq 60^\circ$  unabhängig von der Absorberdicke (exponentielle Absorption) und für  $\vartheta_0 \leq 45^\circ$  von gleicher Größe für dicken und dünnen Absorber (Fälle *a*, *b* und *c*) <sup>3)</sup>. Wir wählten deshalb in unserer Meßanordnung in Fig. 2 einen Grenzwinkel von etwa  $42^\circ$ . Dadurch kann ein einmal bestimmter Faktor  $\varphi$  für alle Absorberdicken verwendet werden.

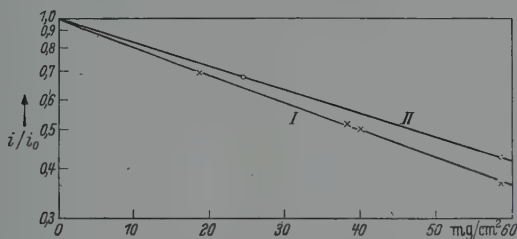


Fig. 4. Zur experimentellen Prüfung der Schiefekorrektion. Theoretische Kurven für die Anordnungen I und II als ausgezogene Geraden, Meßpunkte als Kreuze bzw. Kreise eingetragen.

Außerdem darf die von der Indikatordicke unabhängige Korrektion wohl auch für das zylindrische Borzählrohr, das eine für Neutronen und  $\alpha$ -Strahlen dicke Borschicht hat, mit einiger Genauigkeit angewandt werden. Es erschien uns aber zweckmäßig,  $\varphi$  auch experimentell zu bestimmen, weil es schwierig ist,  $\vartheta_0$  genau festzulegen, und weil die Neutronenquelle nicht flächenhaft im Paraffinblock verteilt war. Wir verwandten dazu Anordnung II in Fig. 2, bei welcher der Paraffinblock um 5 cm gesenkt war und die Neutronenstrahlen durch eine engere Cd-Blende von 3,5 cm ausgeblendet wurden. Die Messung mit dieser Anordnung ergibt, da  $\vartheta_0$  höchstens  $15^\circ$  beträgt, in guter Annäherung den richtigen  $\mu$ -Wert. Als Neutronenquelle diente bei diesen Versuchen ein 250-mg-Ra-Be-Präparat. Als Absorber wurden Cadmiumschichten verschiedener Dicke verwendet. Fig. 4 zeigt die exponentiell verlaufenden Absorptionskurven für Anordnung I und II. Aus der Verschiedenheit ihrer Neigung ergibt sich, daß der in Anordnung I bestimmte  $\mu$ -Wert mit dem Faktor 0,86 zu verkleinern

<sup>1)</sup> E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936. — <sup>2)</sup> O. R. Frisch, Mitt. Kgl. Dän. Akad. **14**, 5, 1937. — <sup>3)</sup> Eine Näherungsformel für Fall *d* mit  $\vartheta_0 = \pi/2$  findet sich bei R. Jaeckel, ZS. f. Phys. **104**, 762, 1937.

ist. Aus (2) oder (3) berechnet sich der Faktor 0,87. Die unerwartet gute Übereinstimmung ist wohl zufällig, da  $\vartheta_0$  ja nicht so genau festgelegt werden kann.

5. *Ergebnisse.* Die Meßergebnisse sind in Tabelle 2 zusammengestellt. Der Absorptionskoeffizient  $\mu$  in Spalte V bezieht sich auf die Gesamtprobe mit Sauerstoffgehalt und Verunreinigungen. Der zu messende Wirkungsquerschnitt  $\sigma$ , der in  $10^{-24} \text{ cm}^2$  angegeben wird, wurde aus  $\mu$  nach der Formel

$$\sigma = \left( \frac{\mu}{N \cdot p} - \sigma_1 \cdot \frac{N_1 \cdot p_1}{N \cdot p} - \sigma_2 \cdot \frac{N_2 \cdot p_2}{N \cdot p} \right) \varphi \quad (4)$$

ausgerechnet. Darin ist  $N$  die Zahl/Gramm der absorbierenden Kerne mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  und  $N \cdot p$  ihre Gesamtzahl im Absorber. Die Indizes 1, 2, ... bezeichnen die entsprechenden Werte der im Absorber enthaltenen anderen Atomarten.  $\varphi = 0,86$  ist die Schiefekorrektion. Die gewichtsmäßigen Anteile  $p_i$  der seltenen Erden in den Proben wurden aus Tabelle 1, Spalte IV, entnommen. Der Gehalt an Sauerstoff ( $\sigma = 4$ ) wurde durch das Korrektionsglied  $\frac{3}{2} \cdot 4$  berücksichtigt.

Bei den Proben, die erst nach der Messung gegläht wurden, ist außerdem auf die mitgemessene Absorption von Wasser und Kohlensäure zu korrigieren. Einige Prozent Wasser in einer Substanz mit kleinem  $\mu$  bedingen eine beträchtliche Korrektion, da  $\sigma_{\text{H}_2\text{O}} = 40$  ist und Wasser etwa zehnmal mehr Moleküle/Gramm enthält als die seltenen Erden. Deshalb wurden die schwächer absorbierenden Proben  $\text{Y}_2\text{O}_3$ ,  $\text{La}_2\text{O}_3$  und  $\text{CeO}_3$  nach dem Glühen gemessen und bei  $\text{Yb}_2\text{O}_3$  der durch das Glühen entweichende  $\text{H}_2\text{O}$ - und  $\text{CO}_2$ -Gehalt getrennt bestimmt. Das hier gefundene Verhältnis  $\text{H}_2\text{O} : \text{CO}_2 = \text{etwa } 2 : 1$  wurde auch für die anderen Oxyde, bei welchen die Korrektion auf Wasser weniger ausmacht, angenommen. Die durch das Glühen entstandene Gewichtsabnahme  $\Delta g$  steht in Spalte II, die gesamte Korrektion auf seltenen Erden, Wasser und Sauerstoff  $\Delta \sigma = \frac{\varphi}{N \cdot s} \sum \sigma_i N_i p_i$  in Spalte VI der Tabelle 2. Die Absorption der Kohlensäure ist zu vernachlässigen.

Die Genauigkeit der endgültigen  $\sigma$ -Werte der seltenen Erden in Spalte VII hängt, abgesehen von den Meßfehlern, sehr von der Sicherheit der chemischen Analysen ab. Es darf aber wahrscheinlich angenommen werden, daß die durch Analysungenauigkeit verursachten Fehler bei den meisten seltenen Erden nicht größer als die in Spalte V aufgeführten Meßfehler sind. Dort sind entweder die mittleren Beobachtungsfehler aus mehreren Meßreihen, oder, wenn nur eine Meßreihe angestellt wurde, die

mittleren statistischen Fehler angegeben. Eine weitere kleine Korrektur wäre noch in  $\sigma = \sigma_e + \sigma_s$  an  $\sigma_s$  anzubringen, weil ein Teil der gestreuten Neutronen ins Zählrohr hineingestreut wird. Sie hat für größere  $\sigma_e$  keine Bedeutung und wurde weggelassen.

Im folgenden wird ein Vergleich unserer Ergebnisse mit schon bekannten durchgeführt. Reine seltenen Erden standen Hevesy und Levi<sup>1)</sup> zur Verfügung. Ihre Messungen sind aber wohl nicht sehr genau abgeschätzt, da anscheinend nicht auf Schiefe korrigiert und keine Differenzmessung mit und ohne Cd gemacht wurde. Genauere Messungen stammen von Dunning und Mitarbeitern<sup>2)</sup>, die aber in den meisten Fällen keine analysierten Präparate verwandten. Im einzelnen ergibt sich:

*Yttrium*: nach<sup>3)</sup>  $\sigma = 31$ . Wir fanden bei einer ungeglühten Probe etwa denselben Wert, nach dem Glühen aber den Wirkungsquerschnitt  $\sigma \sim 4$ , den wir wegen seiner Kleinheit nur ungefähr angeben können. Nach<sup>4)</sup> ist  $\sigma < 14$ .

*Lanthan*:  $\sigma = 80$  nach<sup>5)</sup> ist wesentlich höher als unser Wert  $\sigma = 10$ . Die Ursache kann Verunreinigung oder Gehalt an Wasser sein, das von La stark angezogen wird.

*Cer*: nach<sup>5)</sup>  $\sigma$  geschätzt 25. Auch wir können nur ziemlich ungenau  $\sigma = 15$  angeben.

*Praseodym*: von uns nicht nochmal gemessen<sup>5)</sup>;  $\sigma = 25$ .

*Neodym*:<sup>5)</sup>  $\sigma = 220$ ; unsere Messung  $\sigma = 72$ .

*Samarium*:<sup>5)</sup>  $4700$ ; <sup>6)</sup>  $4600 \pm 100$ ; wir dagegen den viel höheren Wert  $6500$  bis  $7300$ . Wir vermuteten erst Gd-Gehalt in unseren Proben, konnten aber auf den sorgfältigen Röntgenaufnahmen kein Gd finden. Die Abweichung der dritten Probe von den beiden anderen ist für unsere Meßgenauigkeit zu hoch und möglicherweise durch Ungleichmäßigkeit der Absorberschicht hervorgerufen. Eine höckrige Schicht wirkt im Sinne zu kleiner Absorption. Wir glauben aber, daß der Mittelwert aus unseren drei Messungen dem richtigen Wert ziemlich nahekommt und möchten die niedrigeren Werte von<sup>5)</sup> und<sup>6)</sup>, die vermutlich an demselben Material gemessen sind, auf undefinierte Zusammensetzung der Proben zurückführen.

<sup>1)</sup> G. v. Hevesy u. H. Levi, Mitt. Kgl. Dän. Akad. **14**, 5, 1936. —

<sup>2)</sup> J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink, D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1938. — <sup>3)</sup> G. v. Hevesy u. H. Levi (l. c.). — <sup>4)</sup> M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937. — <sup>5)</sup> J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell (l. c.). — <sup>6)</sup> G. A. Fink, Phys. Rev. **50**, 738, 1936.

*Europium*: 1) schätzt  $\sigma \sim 1000$ ; 2)  $\sigma \sim 2000$ ; wir  $\sigma = 2700$ .

*Gadolinium*:  $\sigma = 22000 \pm 1000$  nach 3), stimmt gut mit unserem Wert  $\sigma = 22500$ .

*Terbium*: eine einzige Messung nach 1);  $\sigma$  geschätzt  $< 1000$ .

*Dysprosium*: 2) und 3) 700; wir  $\sigma = 780$ .

*Holmium*: 1) geschätzt 400; 2)  $\sigma \sim 200$ ; wir  $\sigma = 52$ .

*Erbium*, *Thulium*, *Ytterbium* und *Cassiopeium*: nur Messungen von 1) bekannt: Er 120; Tm geschätzt 500; Yb 90, Cp geschätzt 400. Unsere Werte 185, 114, 50 und 165.

*Cadmium*:  $\sigma = 2900 \pm 100$  nach 3), stimmt befriedigend mit unserer Messung  $\sigma = 2640$ , da die Werte von 3) vermutlich noch einer kleinen Erniedrigung wegen Schrägheit der Strahlen bedürfen.

Wir danken Herrn Professor Hahn für sein Interesse an dieser Untersuchung, Herrn Generaldirektor a. D. Dr. Feit und der Auer-Gesellschaft für die Bereitstellung der seltenen Erden, Herrn Dr. Strassmann für seine freundliche chemische Hilfe, Herrn Dr. Ewald für seine Unterstützung bei den Röntgenaufnahmen.

*Berlin-Dahlem*, den 3. Mai 1940.

*Nachtrag*. Die vorstehende Arbeit war im April 1940 abgeschlossen worden und lag Anfang Mai 1940 als Manuskript vor. Da jedoch Herr Dr. Reddemann im Mai 1940 ins Feld rückte und Ende Dezember 1941 in Rußland gefallen ist, hat sich die Veröffentlichung bis jetzt verzögert.

*Berlin-Charlottenburg*, den 15. April 1942.

---

1) J. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell (l. c.).  
 — 2) G. v. Hevesy u. H. Levi (l. c.). — 3) G. A. Fink (l. c.).



(Mitteilung aus der Osram G. m. b. H., K. G., Berlin.)

## Über Wachstums- und Abbauformen von Wolframkristallen, insbesondere über den Gleichstromeffekt.

Von Richard W. Schmidt in Berlin.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Juli 1942.)

Wachstumsform von Wolfram ist in Übereinstimmung mit theoretischen Vorstellungen das Rhombendodekaeder. Ätzform ist in alkalischer Kaliumferri-cyanidlösung das Oktaeder. In Flußsäure-Salpetersäuregemischen haben die (110)-Flächen die größte Lösungsgeschwindigkeit. Die durch Rekristallisation aus gezogenem Draht hergestellten Kristalle sind aus ungefähr  $1\ \mu$  dicken Schichten aufgebaut, die einer der drei Würfebenen des Wolframgitters parallel liegen. — Der Gleichstromeffekt wird durch Ionen verursacht, die unter dem Einfluß des elektrischen Feldes auf dem erhitzten Drahtkristall wandern. Sie bauen auf ihm regelmäßige Stufen auf. Das Erscheinungsbild des Effektes ist kristallographisch bedingt. Bevorzugt werden durch ihn die (111)-Bereiche verändert, dann auch die (110). (100) bleibt von Gleichstromstufen frei. Die Größe der Stufen ist von ihrer Entstehungstemperatur abhängig. Oberhalb von  $2400^\circ\text{K}$  scheint die Stufengröße einen Sättigungswert von etwa  $15\ \mu$  erreicht zu haben, während sie unterhalb mit sinkender Temperatur immer geringer wird und bei ungefähr  $1500^\circ\text{K}$  die Grenze der mikroskopischen Sichtbarkeit erreicht. Das von E. W. Müller und von Benjamin u. Jenkins mit dem Feld-elektronenmikroskop an feinen Drahtspitzen beobachtete Verhalten wandernder Ionen bildet offenbar die Fortsetzung des Gleichstromeffektes nach niederen Temperaturen. — Formal dieselbe Temperaturabhängigkeit wie der Gleichstromeffekt zeigen von anderen Realbauerscheinungen die Gleitlinienbildung und die Mosaikstruktur.

### 1. Einleitung.

Diese Arbeit wurde ursprünglich begonnen, um die beim Glühen von Drähten mit Gleichstrom auftretenden besonderen Kristallformen und ihre Ursachen näher zu studieren. Sie wird sich auch hauptsächlich mit diesem Punkt befassen. In ihrem Verlauf erwies es sich jedoch als wünschenswert, auch auf andere Wachstums- und Abbauformen an Wolfram einzugehen. Dadurch verliert die Untersuchung zwar an Geschlossenheit insofern, als sich neben Beobachtungen, die allgemeinerer Natur sind, auch solche befinden, die nur auf Wolfram selbst Bezug haben. Doch sind auch solche speziellen Ergebnisse von Wert als konkrete Unterlagen für die zur Zeit in starkem Fluß befindlichen Theorien des Kristallaufbaues.

## 2. Ältere Beobachtungen.

Folgende Kristallformen sind bisher an Wolfram beobachtet worden:

*Ätzstrukturen.* B. Schmidt<sup>1)</sup> findet als Ätzhabitus in alkalischen wässrigen Lösungen und alkalischen Schmelzen das Oktaeder, in Gemischen aus Flußsäure und Salpetersäure ein angenähertes Rhombendodekaeder. Die Angaben von I. Langmuir<sup>2)</sup>, wonach Wolfram sowohl beim Glühen im Vakuum als auch beim Auflösen in alkalischem Kaliumferricyanid die (110)-Flächen als Abbauf Flächen ausbildet, sind beide nicht zutreffend. Nach R. P. Johnson<sup>3)</sup> hat Langmuir seinen Glühversuch gar nicht im Vakuum, sondern in feuchtem Wasserstoff ausgeführt und unzulässig auf die Verdampfung im Vakuum verallgemeinert. Nach Versuchen des Verf., die mit denjenigen von B. Schmidt (l. c.) übereinstimmen, ergibt sich bei Lösung in alkalischem Kaliumferricyanid stets ein oktaedrischer Endkörper und nicht ein Rhombendodekaeder.

*Glühstrukturen.* Über Kristallformen, die sich beim Glühen von Wolframdrähten im Vakuum oder in einem inerten Gas ausbilden, ist trotz ihrer technischen Bedeutung lange Zeit nichts Genaueres veröffentlicht worden. Erst Johnson (l. c.) hat ihnen eine eingehende Arbeit gewidmet.

*Gleichstromeffekt.* Vor Johnson hat nur Skaupy<sup>4)</sup> das unterschiedliche Aussehen von Drähten beschrieben, die im Vakuum mit Wechselstrom bzw. mit Gleichstrom gebrannt worden sind. Glüht man einen anfänglich zylindrischen Draht längere Zeit mit Wechselstrom, so bleibt seine Oberfläche glatt und gerundet. Kanten bilden sich nicht aus. Glüht man ihn hingegen mit Gleichstrom, so zeigt die Oberfläche eine ausgeprägte Sägezahn- oder Treppenstruktur; diese Erscheinung nennt man Gleichstromeffekt. Bei den mit Wechselstrom geglühten, glatten Drähten treten jedoch an ganz bestimmten Stellen auch Sägezähne auf, nämlich in der Nähe der Halter und Stromzuführungen. Eine von Skaupy versuchte Erklärung scheiterte an der zu geringen Kenntnis der näheren Einzelheiten des Effektes.

Einen Fortschritt brachte erst Johnson<sup>5)</sup>. Er beobachtete mit Hilfe einer einfachen elektronenoptischen Anordnung, daß Thoriumionen auf einem mit Gleichstrom erhitzten Wolframdraht zur Kathode hin wandern. Daraus schloß er, daß auch Wolframionen auf dem Draht in gleicher Richtung wandern, und daß diese dem Zuge des elektrischen Feldes folgenden Ionen den Gleichstromeffekt hervorrufen. Bei Wechselstromheizung geht die

---

<sup>1)</sup> B. Schmidt, Diss. Greifswald 1924. — <sup>2)</sup> I. Langmuir, Phys. Rev. **22**, 374, 1923. — <sup>3)</sup> R. P. Johnson, ebenda **54**, 459, 1938. — <sup>4)</sup> F. Skaupy, ZS. f. techn. Phys. **5**, 563, 1924. — <sup>5)</sup> R. P. Johnson, Phys. Rev. **53**, 766, 1938; **54**, 459, 1938.

Wanderung der Ionen abwechselnd nach der einen oder anderen Seite, so daß eine besondere Oberflächenstruktur nicht zustande kommt. Nur an den Stellen, an denen der Glühdraht durch die notwendige Halterung eine Abkühlung erfährt, und damit ein Temperaturgefälle erzeugt wird, zeigt sich der Gleichstromeffekt. Er kommt hier offenbar zustande durch die einseitige Diffusion der Ionen vom heißeren zum kälteren Drahtende. Johnson bemerkt ferner, daß die Gleichstromstruktur einen Zusammenhang mit dem Gitterbau des Drahtes haben müsse, denn auf allen Windungen eines wendelförmigen Einkristalles wiederholte sie sich in gleicher Weise. Außerdem gibt er an, daß die Sägezähne immer so gerichtet seien, daß sie auf den negativen Pol hinweisen.

Der Gleichstromeffekt ist nicht auf Wolfram allein beschränkt, sondern läßt sich auch an Ta, Mo, Pt, Fe, Ni hervorrufen. Wolfram zeigt jedoch wegen seiner vergleichsweise geringen Verdampfung die Erscheinung am saubersten.

Graf<sup>1)</sup> hat zwei Aufnahmen des Gleichstromeffektes, die ihm der Verf. überlassen hatte, veröffentlicht. Er weist nach, daß die Gleichstromstruktur nicht identisch ist mit der von ihm an Wolfram und anderen Metallen beobachteten Lamellenstruktur. Seine Meinung jedoch, daß die auf den Aufnahmen sichtbaren Treppenstufen von Würfebenen gebildet seien, läßt sich nicht aufrechterhalten (s. weiter unten).

Gasstruktur. Glüht man einen Wolframdraht in einem inerten Gas, so bleiben die vom Draht abdampfenden Atome durch Zusammenstöße mit den umgebenden Gasatomen in der Nähe des Drahtes und diffundieren nur langsam weg. Der Draht brennt also gleichsam in einer untersättigten Atmosphäre seines eigenen Dampfes. Dadurch tritt nicht nur ein Abbauen, sondern auch ein Wiederanlagern von Wolframatomten an den Draht auf. Der Draht entwickelt dabei, gleichgültig, ob er mit Wechselstrom oder mit Gleichstrom geglüht wird, sowohl ebene als auch leicht gekrümmte Flächen, die in scharfen Graten aneinanderstoßen. Bei der Glühung mit Gleichstrom überlagert sich dieser Gasstruktur noch die von der Ionenwanderung herührende Gleichstromstruktur. Nach Johnson (l. c.) sind die planen Flächen, die häufig in ihrer Mitte ein elliptisches Grübchen haben, (110)-Ebenen, während die konkaven Flächen angenähert (100)-Ebenen sind. Aus diesen Beobachtungen folgert er, ohne daß er seine Folgerung näher begründet, daß an der Gleichgewichtsform die (110)-Flächen verschwunden sein müßten und nur die (100)-Flächen als Endflächen aufträten. Graf

<sup>1)</sup> L. Graf, ZS. f. Elektrochem. 48, 181, 1942.

(l. c.) hat in einem feinkristallinen Wolframniederschlag, der durch Reduktion von Wolframoxyd entstanden war, im Aufbau begriffene Kristalle beobachtet, die nach seinen Angaben nur von Würfebenen begrenzt sind.

*Realaufbau.* Wolframkristalle sind wie andere Kristalle über größere Gitterbereiche keineswegs ideal gebaut, sondern bestehen in dem von Graf (l. c.) untersuchten und mit schönen Aufnahmen belegten Fall aus  $0,3 \mu$  dicken Lamellen, die einer der drei Würfebenen parallel liegen. Eine Abweichung vom Idealkristall hat auch Leonhardt<sup>1)</sup> röntgenographisch an Pintschfäden von  $30 \mu$  Durchmesser gefunden. Seine Einkristalle bestanden aus rund  $150 \mu$  langen, in sich homogenen Subindividuen, die mit Winkelsprüngen von 15 bis 20 Minuten aneinandergesetzt waren.

### 3. Neue Beobachtungen.

*Wachstumsform.* Die beiden angeführten Arbeiten von Johnson und Graf glauben den Würfel als Endform des Wachstums ansehen zu können. Wenn dies zuträfe, so wäre das von größtem theoretischen Interesse. Denn nur an Wachstumsversuchen aus der Gasphase läßt sich ohne zusätzliche Annahmen eine Abschätzung der zwischen den Gitterbausteinen wirkenden Kräfte vornehmen. Nun weiß man seit den Arbeiten von Stranski und seinen Schülern<sup>2)</sup>, daß bei Cadmium und Zink im wesentlichen nur erstnächste Gitternachbarn für das Erscheinungsbild der Gleichgewichtsform wirksam sind. Man ist geneigt anzunehmen, daß auch bei anderen Metallen ein ähnliches Kraftgesetz maßgebend ist. Die Würfelflächen als Endflächen des kubisch raumzentrierten Wolframs würden jedoch diese Annahme hinfällig machen. Denn ihr Auftreten ließe sich allein durch die wesentliche Beteiligung weiterer als erster Gitternachbarn erklären. Wären bei Wolfram nur bzw. hauptsächlich erstnächste Nachbarn wirksam, müßte als Gleichgewichtsform oder, was auf dasselbe herauskommt, als Endform des Wachstums das Rhombendodekaeder erscheinen. Tatsächlich ergeben auch genaue Versuche im Gegensatz zu den zitierten Literaturstellen das Rhombendodekaeder als Wachstumsendform. Das damit zum Ausdruck kommende Kraftgesetz für Wolfram ist also dem für Cadmium und Zink beobachteten durchaus ähnlich und verwandt.

Die ersten sorgfältigen Untersuchungen dieser Art sind bereits vor mehr als 15 Jahren in der Studiengesellschaft für elektrische Be-

---

<sup>1)</sup> J. Leonhardt. Neues Jahrb. f. Mineralogie 64A, 1, 1931. — <sup>2)</sup> J. N. Stranski, ZS. f. phys. Chem. (B) 38, 451, 1938; Ber. d. Deutsch. chem. Ges. (A) 12, 141, 1939; B. Ronkow, Diss. Sofia 1940; N. Keremidschiew, Diss. Sofia 1941.

leuchtung in Zusammenarbeit mit R. Groß in Greifswald gemacht, aber bisher nicht veröffentlicht worden. Bei den damaligen Arbeiten ließ man Wolfram auf Einkristallkörper aus der Dampfphase aufwachsen. Man benutzte dazu entweder Wolframhexachlorid in Wasserstoffatmosphäre<sup>1)</sup> oder man trug einen hocharhitzten vielkristallinen Draht in feuchtem Wasserstoff durch Oxydation ab und ließ an dem entsprechend kälteren Einkristall durch Reduktion das Wolfram wieder aufwachsen. Fig. 1 zeigt eine derartige in feuchtem Wasserstoff gewachsene Einkristallkugel<sup>2)</sup>. Wie man sieht, ist der Körper bis auf die Ecken, die Wachstumsstörungen aufweisen, ein vollkommenes Rhombendodekaeder.

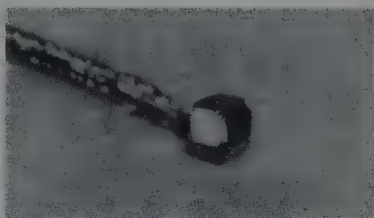


Fig. 1. Aus der Dampfphase auf einer Einkristallkugel aufgewachsenes Rhombendodekaeder. 24 : 1.

Bei Wachstumsversuchen mit stärkerer Übersättigung entstehen meist Subindividuen, die von (110)-Flächen begrenzt sind und orientiert auf dem Mutterkristall aufsitzen. Man beobachtet beim Weiterwachsen dieser Subindividuen häufig, daß das Wolfram sich bereits völlig im äußeren Teil



Fig. 2. Aus der Dampfphase bei stärkerer Übersättigung auf einem Draht aufgewachsene Subindividuen mit „ausgehöhlten“ (110)-Flächen. 20 : 1.

der (110)-Flächen, d. h. in der Nähe der Kanten niederschlägt, so daß der mittlere Teil der Fläche nicht zur Ausbildung kommt und im Kristall tiefe Gruben entstehen (Fig. 2). Derartige Wachstumsformen sind unter den Namen „ausgehöhlte Flächen“ oder „Kristallskelette“ bei vielen Kristallen

<sup>1)</sup> F. Koref, ZS. f. Elektrochem. 28, 511, 1922. — <sup>2)</sup> Herrn Dr. K. Moers danke ich für die freundliche Überlassung der Aufnahme



wohlbekannt. Auf dieselbe Art dürften auch die von Johnson (l. c.) beschriebenen elliptischen Grübchen in den (110)-Flächen derjenigen Drähte entstanden sein, die in gasgefüllten Lampen gebrannt worden waren.

*Ätzformen.* Die folgenden Beobachtungen über Ätz- und ebenso die weiteren über Gleichstromstrukturen sind an gezogenen und dann rekristallisierten Drähten von rund 0,1 mm Durchmesser gemacht worden. Zur Erzielung längerer Kristalle waren dem Wolfram dabei wie üblich Spuren von Alkalisilikaten und Aluminiumoxyd zugesetzt. Um alle Unebenheiten der Drahtoberfläche, wie beispielsweise Ziehriefen, vollkommen zu beseitigen, wurden die Drähte sorgfältig elektrolytisch poliert, bis sie spiegelnd waren.

Die durch Rekristallisation erzeugten Kristalle erfüllten den ganzen Drahtquerschnitt und hatten durchschnittlich eine Länge von einem bis zu mehreren Zentimetern. Ein längeres Drahtstück besteht also aus einer Reihe von jeweils zentimeterlangen aneinanderstoßenden Einkristallen. Diese Wolframkristalle, die durch Rekristallisation aus gezogenen Drähten gewonnen worden sind, haben eine ausgesprochene Rekristallisationstextur, die der Ziehtextur entspricht. Eine [110]-Richtung liegt hierbei in Richtung der Drahtachse. Dabei ist die Übereinstimmung zwischen [110]-Richtung und Drahtachse nur ungefähr, kleine Abweichungen der beiden Richtungen voneinander sind die Regel. Das rührt nach Johnson und Nelson<sup>1)</sup> davon her, daß nur diejenigen Drahtfasern als Rekristallisations-

keime wirken, die in der Nähe der Oberfläche liegen und deren [110]-Richtung bekanntlich im Gegensatz zu den inneren Fasern etwas gegen die Drahtachse geneigt ist.

Ein Schnitt durch einen solchen Draht senkrecht zur Drahtachse zeigt die in Fig. 3 dargestellte Anordnung der einfach indizierten Flächen. Die Symmetrie ist zweizählig.

Die von B. Schmidt (l. c.) an Kugeln ausgeführten Ätzversuche werden durch die Beobachtungen des

Verf. an Drähten bestätigt. In einem Gemisch von ziemlich konzentrierter Flußsäure mit konzentrierter Salpetersäure als Oxydationsmittel

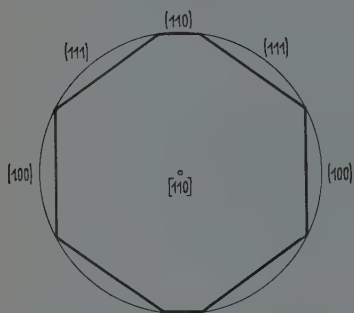


Fig. 3. Schnitt durch einen rekristallisierten Wolframdraht senkrecht zur Drahtachse. Anordnung der einfach indizierten Flächen.

<sup>1)</sup> Siehe R. P. Johnson (l. c.).

haben die (110)-Flächen die größte Lösungsgeschwindigkeit; sie bilden sich daher im Verlauf der Ätzung am stärksten aus.

In alkalischer Kaliumferrieyanidlösung werden die 4 am Draht auftretenden (111)-Flächen am schnellsten angegriffen. Weitaus am langsamsten lösen sich die (100)-Bereiche. Sie bleiben bis zu ihrem Verschwinden glänzend und rund, so daß vielleicht gar keine Lösung erfolgt. Sie werden einzig durch Ätzgrübchen angefressen, die sich als Rhombendodekaedergrübchen erweisen. Da die Grübchenbildung nichts anderes ist als ein Hohlkörperlösungsversuch im kleinen, so müssen die hierbei ausgebildeten

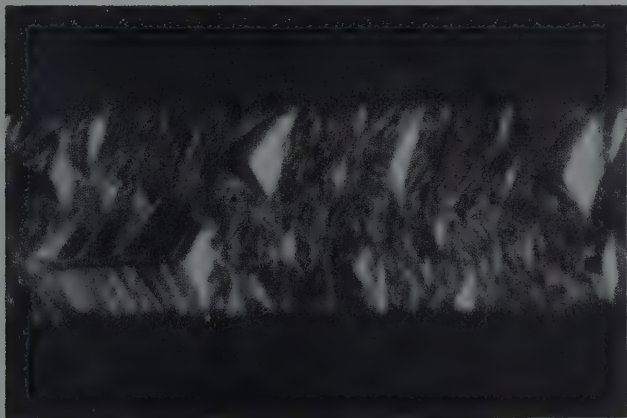


Fig. 4. Oktaederfläche eines in alkalischer Kaliumferrieyanidlösung geätzten Drahtes mit Ätzpyramiden verschiedener Größe. Originalvergr. 200 : 1, Nachvergr. 400 : 1.

Flächen identisch sein mit den Wachstumsflächen des konvexen Kristalls. Auch in diesem Fall zeigt sich also das Rhombendodekaeder als Wachstumsform.

Auf den Oktaederflächen entstehen zahlreiche in den verschiedensten Größen anzutreffende Äzhügel. Sie bestehen aus sauber ausgebildeten Würfelpyramiden (Fig. 4). Häufig ist die Pyramidenspitze wieder durch eine Oktaederfläche abgeplattet.

Bei sehr starker Vergrößerung erkennt man auf den angeätzten Kristallen vielfach eine Schichtenbildung (Fig. 5 und 6). Besonders gut sieht man diese Schichten, wenn man zum Ätzen nicht durch elektrolytisches Polieren nachbehandelte Drähte nimmt, sondern sie mit der längsgestreiften und riefigen Oberfläche benutzt, die sie vom Ziehvorgang her haben. Dadurch erreicht man, daß auch schwer lösliche Flächen, wie die Würfelflächen,

schnell angegriffen werden und sich auf dem Draht Ätzstufen entsprechend den ursprünglich vorhandenen Ziehriefen bilden. In Fig. 5 sieht man in Längsrichtung des Drahtes laufend etwa rechtwinklige Stufen, die von den schräg dazu liegenden Lamellen geschnitten werden. Die Dicke der Lamellen ist ungefähr  $1\ \mu$ . Ihre Orientierung läßt sich an Fig. 6 bestimmen<sup>1)</sup>. Der helle von Ätzpyramiden durchsetzte Streifen in der Mitte der Figur ist eine Oktaederfläche. Oben und unten schließen sich Bereiche an, auf denen man deutlich die Schichtenstruktur erkennt. Vergleicht man die durch einen Strich gekennzeichnete Würfelpyramide mit abgeplatteter Spitze, bei

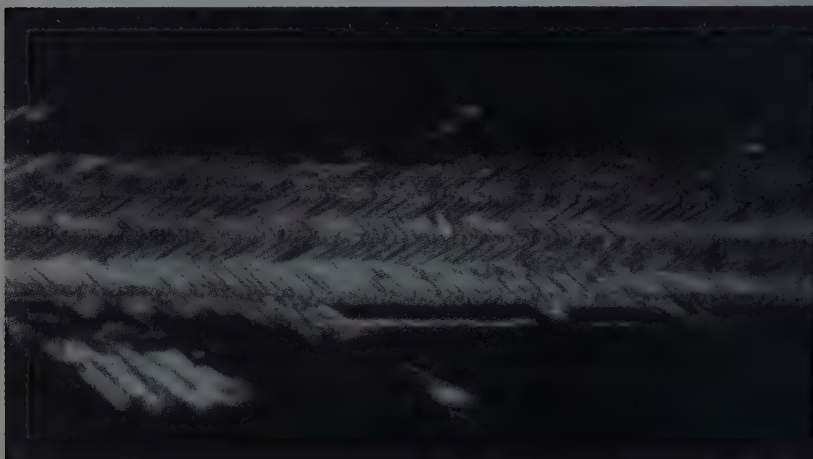


Fig. 5. Lamellenstreifen auf einem angeätzten Drahtkristall.  
Abstand der Streifen ungefähr  $1\ \mu$ . 500:1.

der die Streifung auch auf der Abplattung zu sehen ist, mit den im oberen und unteren Teil des Bildes sichtbaren Flächen, so erkennt man, daß die dort auftretenden Lamellenstreifen genau den beiden in der Figur kleineren Würfelseiten parallel laufen. Der Kristall ist also aus Schichten aufgebaut, die parallel zur großen dunklen Fläche der Würfelpyramide liegen.

Ohne Zweifel ist diese Schichtenstruktur identisch mit der zuerst von Graf (l. c.) bei einer Reihe von Metallen, darunter auch bei Wolfram, beobachteten Lamellenstruktur.

*Gleichstromstruktur.* Die Formen, die an einem mit Gleichstrom gelühten Draht entstehen, kommen durch die in Richtung des elektrischen

<sup>1)</sup> Daß die Aufnahme teilweise unscharf ist, erklärt sich aus der geringen Tiefenschärfe bei 500facher Vergrößerung, die nur einen kleinen Bezirk des Drahtes scharf abzubilden gestattet.

Feldes oder auch des Temperaturgefälles auf der Drahtoberfläche wandernden Ionen zustande, also durch eine Oberflächendiffusion. Im allgemeinen pflegt man derartige Diffusionserscheinungen, zumal wenn es sich bei den wandernden Ionen auch noch um solche des eigenen Gitters handelt, für sehr kleine und nur mit Mühe nachweisbare Effekte zu halten. Welch grobe Wirkungen aber auftreten können, lehrt eine nähere Betrachtung des Gleichstromeffektes.

Wie ein ursprünglich glatter und runder Draht aussieht, wenn er 100 bis mehrere 100 Stunden mit Gleichstrom bei einer Temperatur geglüht

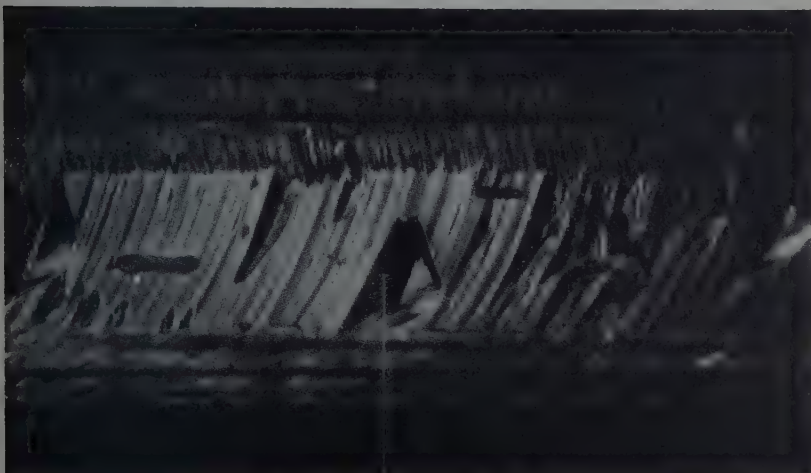
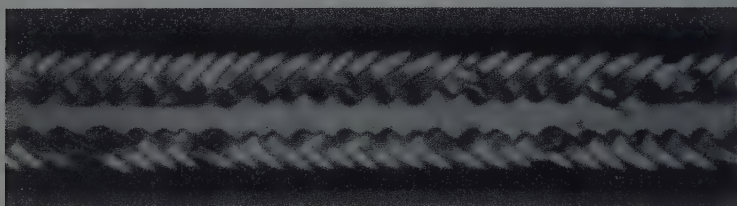


Fig. 6. Blick auf den Oktaederveich eines angeätzten Drahtkristalls mit Lamellenstreifen. Die Lamellen liegen parallel zu der durch einen Strich gekennzeichneten Fläche der Würfelpyramide. 500 : 1.

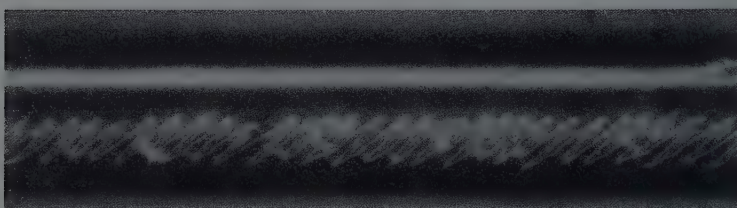
worden ist, wie sie etwa in Vakuumglühlampen herrscht, zeigen die Fig. 7a bis 7h; sie geben typische Ansichten des Gleichstromeffektes. Von Aufnahme zu Aufnahme ist der Draht um  $45^\circ$  weitergedreht worden, so daß die 8 Bilder einer vollen Umdrehung des Drahtes entsprechen. An ihnen erkennt man folgendes: Nicht alle Flächen zeigen die für den Gleichstromeffekt charakteristische Zahnung. Um  $180^\circ$  auseinanderliegende Flächen sind im Aussehen genau oder fast genau gleich. Die Flächen, welche die Zahnflanken bilden, gehören nicht der Zone der Drahtachse an. Die Zahnung ist betont regelmäßig ausgebildet.

Welche Gebiete von der Gleichstromstruktur freibleiben und welche nicht, läßt sich leicht dadurch feststellen, daß man einen mit Gleichstrom

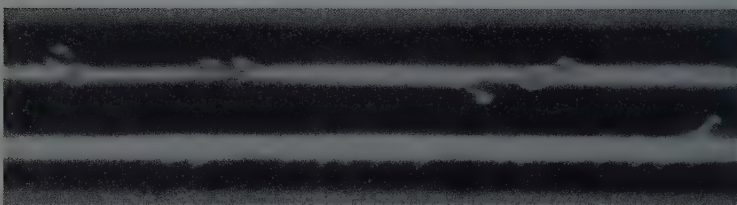
geglühten Kristall zur Hälfte anätzt und an Hand der bekannten Ätzstruktur seine Orientierung bestimmt. Die Zuordnung der Fig. 7a und 7e



a)  $0^\circ$ . (110)-Bereich.



b)  $45^\circ$ . (111)-Bereich.



c)  $90^\circ$ . (100)-Bereich.

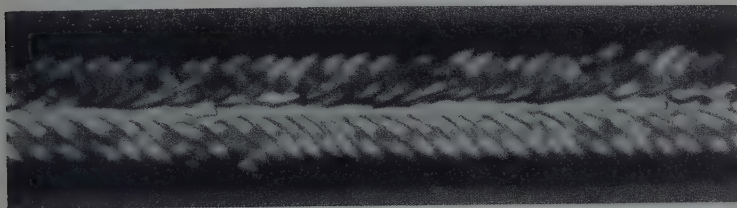


d)  $135^\circ$ . (111)-Bereich.

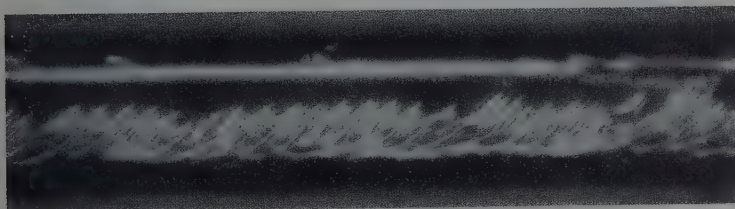
Fig. 7 (a—h). Drahtkristall, 300 Stunden im Vakuum bei  $2600^\circ\text{K}$  mit Gleichstrom geglüht. Von Aufnahme zu Aufnahme ist der Draht um  $45^\circ$  weitergedreht worden. Drehsinn  $\curvearrowright$ . Fig. 7a und 7e zeigen (110)-Bereiche, 7c und 7g (100)-Bereiche, der Rest (111)-Bereiche, 200:1.



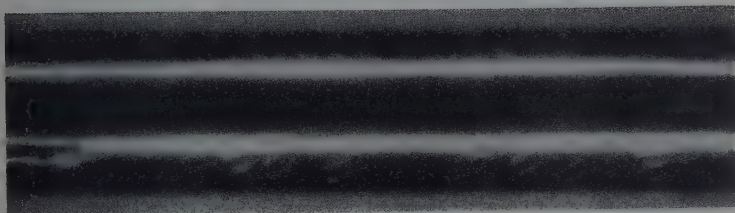
zur (110)-Ebene, der Fig. 7c und 7g zur (100)-Ebene und der restlichen zum (111)-Bereich ist auf diese Weise gewonnen worden.



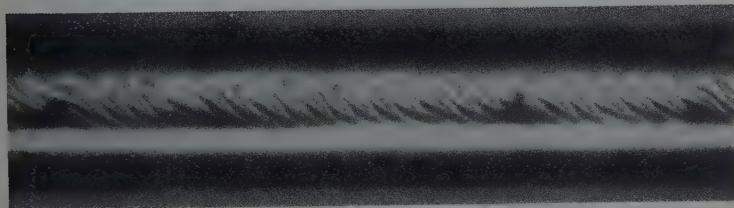
e) 180°. (110)-Bereich.



f) 225°. (111)-Bereich.



g) 270°. (100)-Bereich.



h) 315°. (111)-Bereich.

Der Gleichstromeffekt ist also hauptsächlich auf der (111)-Region lokalisiert; auch die (110)-Fläche ist beteiligt. Manchmal ist (110) nur noch als Grat vorhanden, dann stoßen die Gleichstromstufen in einem



Grätenmuster aneinander. Die (100)-Fläche ist dagegen frei von Aufbau- oder Abbauerscheinungen. Sie erscheint auch nach längerer Glühzeit noch glänzend und unangegriffen. Die ersten Spuren des Gleichstromeffektes treten zwischen (111) und (110) auf.

Diese Beobachtungen und die zweizählige Symmetrie der Formen am Draht zeigen eindeutig, daß das Erscheinungsbild des Gleichstromeffektes kristallographisch bedingt ist.

Der abgebildete Draht ist übrigens nicht vollkommen symmetrisch, wie man an einem Vergleich der beiden (110)-Flächen bemerkt. Allerdings ist das Bild des Gleichstromeffektes besonders im (110)-Gebiet sehr empfindlich gegen Abweichungen von der Symmetrie. Die Ätzstruktur beispielsweise ist erheblich unempfindlicher. Selbst wenn die vom Gleichstromeffekt angezeigten Abweichungen noch viel größer sind als im vorliegenden Falle, bekommt man beim Anätzen noch immer ein Bild vollkommener Symmetrie. Diese große Empfindlichkeit des Gleichstromeffektes gegen geringe Unterschiede zwischen der [110]-Richtung und der Drahtachse dürften auch der Grund sein, warum man so schwer zwei mit Gleichstrom geglühte Kristalle findet, deren Aussehen völlig gleich ist.

Während der Glühzeit nimmt der Draht als Ganzes gesehen an Gewicht ab, d. h. er wird abgebaut. Offensichtlich sind jedoch die Gleichstromstufen eine Wachstums- und keine Abbauerscheinung, denn sonst wäre ihr Auftreten an den Abkühlungsstellen von mit Wechselstrom geglühten Drähten unverständlich. Bei einer Wachstumsform sollte man dann nach den weiter vorn beschriebenen Versuchen annehmen, daß die Flächen, welche die Stufen bilden, Rhombendodekaederflächen sind. In der Tat könnte man bei den beiden Aufnahmen, die Graf (l. c., Fig. 26 und 27) veröffentlicht hat, die Stufenflächen für (110)-Flächen halten, jedoch nicht wie Graf (und auch nicht wie Johnson an seinen Präparaten) für (100)-Flächen, weil das schon nach der Lage der Erhebungen auf dem (111)-Bereich nicht möglich ist. Fig. 7, besonders deutlich Fig. 7d, zeigen aber, daß der Aufbau der Gleichstromstruktur offenbar verwickelter ist und daß nicht nur Flächen einer Art bei der Zahnung auftreten.

Die von Johnson (l. c.) angegebene Ausrichtung der Zähne in Richtung auf den negativen Pol bzw. bei mit Wechselstrom geglühten Drähten auf das kältere Ende zu hat Verf. nicht beobachten können. Nach den Fig. 8 und 9, die jeweils zwei aneinanderstoßende Kristalle zeigen, sind die Stufenneigungen von der Stromrichtung unabhängig. Fig. 9 ist ein Molybdändraht, der von orientierenden Versuchen über den Gleichstromeffekt an

diesem Metall herrührt. Übrigens hängt die Richtung der Zahnung ja auch davon ab, welche Fläche man betrachtet. Beispielsweise zweigen die Streifen in Fig. 7a nach links, in Fig. 7c nach rechts.

Der Abstand zweier Stufen ist bei den bisher abgebildeten Wolframkristallen etwa  $15\ \mu$ . Er ist so gut wie unabhängig von der Glühdauer. Seine Größe ändert sich dagegen mit der Glühtemperatur. (Mit der Temperatur ist die Feldstärke am Draht zwangsläufig gekoppelt. Sie betrug

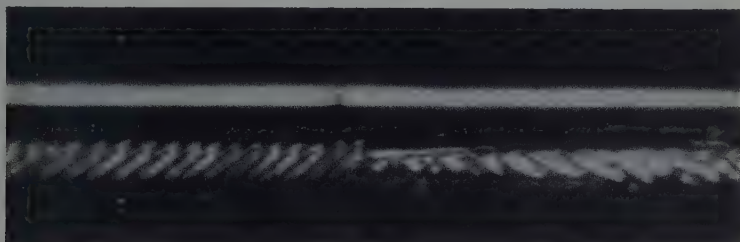


Fig. 8. Zwei aneinanderstoßende Kristalle, 300 Stunden im Vakuum bei  $2600^\circ\text{K}$  mit Gleichstrom geüht. Die Neigung der Stufen ist von der Stromrichtung unabhängig. 200 : 1.

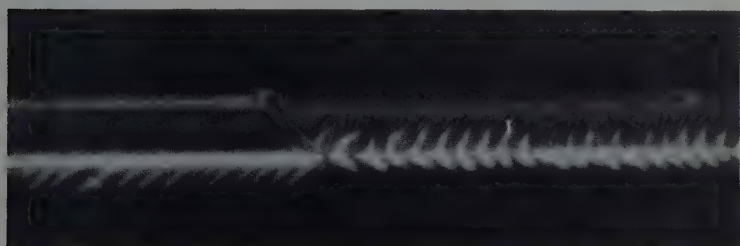


Fig. 9. Zwei aneinanderstoßende *Molybdän*kristalle, 200 Stunden im Vakuum bei ungefähr  $2000^\circ\text{K}$  mit Gleichstrom geüht. Die Neigung der Stufen ist von der Stromrichtung unabhängig. 200 : 1.

bei  $1800^\circ\text{K}$  etwa  $0,5\ \text{V/cm}$  und bei  $3000^\circ\text{K}$  rund  $2\ \text{V/cm}$ ). Je niedriger die Temperatur ist, um so kleiner ist der Abstand und auch die Höhe der Stufen. An Streifungen, die in einem ähnlichen Winkel zur Drahtachse liegen, wie diejenigen von Fig. 7, sind die Werte der folgenden Tabelle in Abhängigkeit von der Temperatur gemessen worden. (Mit erheblich anderer Winkellage ändern sich auch die Abstände.)

Unterhalb von  $1800^\circ\text{K}$  werden die Stufen immer kleiner und erreichen bald die Grenze der Sichtbarkeit. Da nicht zu erwarten ist, daß die Stufen mit dem derzeitigen Ende unserer Fähigkeit, sie zu betrachten, ihre Existenz



a) Abstand der Zähne ungefähr  $2\ \mu$ . b) Abstand der Zähne ungefähr  $5\ \mu$ . c) Abstand der Zähne ungefähr  $15\ \mu$ .  
 Fig. 10 (a—c). Abhängigkeit der Stufengröße des Gleichstromeffektes von der Temperatur. Der Kristall wurde in einem Temperaturgefälle geglüht. Links von Fig. 10a befand sich die abkühlende Stromzuführung. 200:1.

aufgeben, muß man schließen, daß sie bei niedrigeren Temperaturen, etwa bei  $1500^\circ\text{K}$  und tiefer, submikroskopisch klein sind. Mit wachsenden Temperaturen werden sie dann langsam größer und streben oberhalb etwa  $2400^\circ\text{K}$  einem Sättigungswert zu, wie die Tabelle zeigt. Dieser Gang der Stufengröße ist unabhängig von der Vorgeschichte des Einkristalles, d. h. unabhängig von den Umständen und der Temperatur, unter denen der Kristall aus dem gezogenen Draht gewonnen worden ist.

Tabelle 1.

Glühtemperatur	Stufenabstand
$2800^\circ\text{K}$	12—15 $\mu$
2600	12—17
2400	10—15
2100	8—10
1800	4—5

Anschaulich kann man diese Änderung der Stufengröße mit der Temperatur an einem Kristall zeigen, der in einem Temperaturgefälle geglüht worden ist, beispielsweise an einem solchen, der sich in der Nähe einer abkühlenden Stromzuführung befand. Die Fig. 10a bis 10c zeigen einen derartigen Draht. Links von Fig. 10a war die Stromzuführung, dort war der Draht am kältesten, nach rechts nahm die Temperatur langsam zu, um nach etwa 6 mm Kristalllänge ihren Endwert zu erreichen. In Fig. 10a sieht man ganz links noch faseriges, nicht rekristallisiertes Gefüge, in das der anschließende Einkristall hineinragt, bedeckt mit ungefähr  $2\ \mu$  breiten Gleichstromstufen. Etwa 3 mm weiter (Fig. 10b) haben die Stufen bereits einen Abstand von  $5\ \mu$  und nach weiteren 3 mm (Fig. 10c) einen solchen von  $15\ \mu$ .

Über die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen, welche den Gleichstromeffekt verursachen, weiß man fast gar nichts. Johnson (l. c.) hat Glühversuche mit Wechselstrom verschiedener Frequenz gemacht. Dabei zeigten die Drähte bis herunter zu einer Frequenz von einer Schwingung pro Minute noch eine völlig glatte Oberfläche. Erst wenn die Stromrichtung nur alle 24 Stunden umgekehrt wurde, entwickelten sich kräftige Gleichstromstufen, die, einmal entstanden, sich durch keinen Wechsel der Stromrichtung mehr zum Verschwinden bringen ließen. Leider hat Johnson keine Temperaturangaben gemacht. Denn bei Versuchen des Verf. bei 2500° K mit 24stündigem Wechsel der Stromrichtung waren nur ganz schwache Gleichstromstufen zu beobachten. Sie zeigten sich erst kräftig und in ähnlicher Stärke wie ohne Umpolung, wenn der Strom jeweils nach 72 Stunden umgeschaltet wurde. Aus allen diesen Versuchen läßt sich nur ganz grob schließen, daß die Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen wahrscheinlich sehr klein ist, und daß dieselben vielleicht erst in Stunden Wege von der Größenordnung nun oder weniger zurücklegen.

Nach der Beschreibung des Gleichstromeffektes verbleibt nun noch, auf die Beziehungen und möglichen Zusammenhänge hinzuweisen, die zwischen dem Effekt und anderen Erscheinungen bestehen.

Direkte Beobachtungen über ein Wandern von Wolframionen auf einem Wolframkristall unter dem Einfluß äußerer elektrischer Felder sind zuerst von Müller<sup>1)</sup> und dann von Benjamin und Jenkins<sup>2)</sup> mit Hilfe des Feldelektronenmikroskops an sehr feinen erhitzten Drahtspitzen gemacht worden. Die von diesen Autoren beobachteten Erscheinungen sind nun offenbar mit dem Gleichstromeffekt aufs engste verwandt und bilden gewissermaßen seine Fortsetzung in das Gebiet der niederen Temperaturen, in dem die Gleichstromstufen so klein sind, daß sie nicht mehr lichtmikroskopisch aufgelöst werden können. Genau wie beim Gleichstromeffekt werden nämlich auch hier durch Ionen, welche unter dem Einfluß des elektrischen Feldes wandern, Erhebungen und Vertiefungen auf der ursprünglich kugeligen Spitze aufgebaut, die der Anlaß sind, daß sich die Feldemission verändert. Soweit sich Kugel und Drahtzylinder vergleichen lassen, setzt die Wanderung der Ionen und der Aufbau der Erhebungen auch auf denselben Flächen wie beim Gleichstromeffekt ein. Die Beweglichkeit der Ionen beginnt bei der Spitze zuerst auf Gebieten zwischen (211) und (110), greift dann auf (111) und schließlich auch auf (110) und ganz

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. Phys. **106**, 541, 1937; **108**, 668, 1938; — <sup>2)</sup> M. Benjamin u. R. O. Jenkins, Proc. Roy. Soc. London (A) **176**, 262, 1940.

zuletzt auf (100) über. Die Flächenzentren (100), (211), (110) selbst emittieren nicht, tragen also keine Erhebungen. Die Beweglichkeit der Wolframionen beginnt, wenn die Spitze eine Temperatur von wenigstens 1170° K hat. Da die Spitzen einen Radius von etwa 0,2 bis 0,5  $\mu$  besitzen, ist der Abstand der Erhebungen mit Sicherheit kleiner als diese Werte. Nach Benjamin und Jenkins (l. c.) brauchen die Aufbauformen nur 25 Atomdurchmesser hoch zu sein, um die beobachteten Emissionsänderungen deuten zu können.

In den Feldstärken besteht zwischen beiden Erscheinungen ein Unterschied. Während beim Gleichstromeffekt rund 1 V/cm vorhanden ist, liegt an der Spitze ein radiales Feld von  $10^7$  bis  $10^8$  V/cm, von dem aber nur ein Teilbetrag zur Verschiebung der Ionen auf der Kugel wirksam ist.

Weil der Gleichstromeffekt auf dem Einkristall eine Unterteilung hervorruft, kann man ihn rein einordnend zur großen Gruppe derjenigen Erscheinungen zählen, die mit dem Realbau der Kristalle zusammenhängen und die je nach der Art und dem Zusammenhang, in dem sie gefunden worden sind, als Fein-, Mosaik-, Sekundär-, Gleitstruktur, Gitterbaufehler usw. bezeichnet werden. In den meisten Fällen sind die experimentellen Angaben über die einzelnen Strukturarten noch zu gering, um mit einiger Sicherheit Aussagen über Zusammenhänge oder sogar Identitäten zwischen ihnen machen zu können. Auch der Gleichstromeffekt bildet hier keine Ausnahme. Eine Gesetzmäßigkeit jedoch, welche seine Abhängigkeit von der Entstehungstemperatur betrifft, scheint er mit einigen anderen Strukturen gemeinsam zu haben. Beim Gleichstromeffekt wächst bekanntlich die Größe der Stufen mit wachsender Entstehungstemperatur. Für die Gleitlinienbildung und für die Mosaikstruktur gilt etwas Ähnliches. Boas und Schmid<sup>1)</sup> haben an Cadmium und Zink gefunden, daß bei hohen Temperaturen die Gleitpakete sehr viel gröber sind als bei Raumtemperatur. Tsien und Chow<sup>2)</sup> haben an Molybdän und noch ausführlicher Andrade und Chow<sup>3)</sup> an Natrium,  $\alpha$ -Eisen und Molybdän beobachtet, daß der Abstand der Gleitebenen mit wachsender Temperatur immer größer wird.

Für die an Hand der Röntgenintensitäten bestimmte Mosaikstruktur liegen Versuche von Dehlinger und Gisen<sup>4)</sup> an rekristallisierten und an gegossenen Aluminiumkristallen vor, die in derselben Richtung liegen. Die

---

<sup>1)</sup> W. Boas u. E. Schmid, ZS. f. Phys. **57**, 575, 1929; **61**, 767, 1930. —

<sup>2)</sup> L. C. Tsien u. Y. S. Chow, Proc. Roy. Soc. London (A) **163**, 19, 1937. —

<sup>3)</sup> E. N. da C. Andrade u. Y. S. Chow, ebenda **175**, 290, 1940. — <sup>4)</sup> U. Dehlinger, Phys. ZS. **34**, 836, 1933; U. Dehlinger u. F. Gisen, ebenda **35**, 862, 1934; F. Gisen, ZS. f. Metallkde. **27**, 256, 1935.

durch Rekristallisation hergestellten Kristalle hatten kleinere Mosaikblöcke als die bei höherer Temperatur aus dem Schmelzfluß gewonnenen. Auch Renninger<sup>1)</sup> findet an Steinsalzkristallen, die aus dem Schmelzfluß hergestellt worden sind, um Größenordnungen größere Mosaikblöcke als an natürlich gewachsenen. Kersten und Gottschalt<sup>2)</sup> stellen durch magnetische Messungen an Eisen, Nickel und einer Eisen-Nickel-Legierung fest, daß die „Wellenlänge“ der Eigenspannungen, von der sie wahrscheinlich machen, daß sie gleich dem Abstand der Mosaikblöcke ist, mit wachsender Ausglühtemperatur zunimmt.

Herrn Prof. Stranski danke ich herzlich für fördernde Diskussionen.

---

<sup>1)</sup> M. Renninger, ZS. f. Krist. (A) **89**, 344, 1934. — <sup>2)</sup> M. Kersten u. P. Gottschalt, ZS. f. techn. Phys. **21**, 345, 1940.

---



## Ein neuer Versuch zur Deutung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes und die „Keim“-Theorie der Supraleitung.

Von **K. M. Koch.**

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 9. September 1942.)

Es wird, gestützt auf einige Beobachtungsergebnisse, angenommen, daß der Übergang in den Supraleitzustand als Analogon zu einem Kristallisationsvorgang aufgefaßt werden kann, daß also die Bildung der Supraleitphase zuerst in keimartigen Gebilden erfolgt, die schon oberhalb des Sprungpunktes vorhanden sind und die beim Sprungpunkt spontan zu wachsen beginnen. Erfolgt dieses Wachstum im Magnetfeld, so ergibt sich aus ganz elementaren Überlegungen der Meissner-Ochsenfeld-Effekt. Die Frage, ob die Keime des Supraleitzustandes auch eine Rolle in der Normalleitung spielen könnten, führt zu einer Umgestaltung des Bildes vom Leitungsmechanismus, die, unter Aufrechterhaltung des Formelapparates der Elektronentheorie, die Normalleitung sozusagen als gestörte Supraleitung erscheinen läßt.

Die vorliegende Arbeit erhebt nicht den Anspruch, eine endgültige Lösung des Supraleitproblems zu bringen. Ihr Zweck ist vielmehr, aus der Verknüpfung einiger Gedanken, die zunächst rein hypothetisch ist, einen Rahmen zu entwickeln, innerhalb dessen eine ganze Reihe von Aufgaben für die experimentelle und theoretische Forschung liegt. Erst aus deren Lösung wird die Theorie der Supraleitung mit großer Wahrscheinlichkeit hervorgehen. Richtiger gesagt, wird es keine Theorie der Supraleitung werden, sondern eine Umgestaltung der Theorie der Normalleitung, aus der sich die Supraleitung als selbstverständliche Folge ergibt.

Sind die theoretischen Arbeiten der letzten Zeit, beeinflusst durch London, von dem Gedanken der *Unerklärbarkeit* des Meissner-Ochsenfeld-Effektes ausgegangen, d. i. in weiterer Folge von einer etwas mystischen Auffassung eines absoluten Diamagnetismus als der primären Eigenschaft der Supraleiter, so ist diese Arbeit gerade von der Umkehrung dieses Gedankens bestimmt. Ich habe ja bereits<sup>1)</sup> gezeigt, daß eine Deutung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes durch einen klassischen Mechanismus zumindest denkbar ist. Dieser Versuch hatte allerdings die Schwäche, daß er mit dem Ettingshausen-Nernst-Effekt eine Erscheinung heranzog, deren Mechanismus man wohl kaum als restlos geklärt bezeichnen kann. Ich hatte damals die Absicht, die Bemerkung einzufügen, daß diese Erklärung mehr als Schema aufgefaßt werden sollte, dem sich andere, noch

---

<sup>1)</sup> K. M. Koch, ZS. f. Phys. **116**, 586, 1940.

denkbare Erklärungsversuche einordnen müßten, und daß z. B. auch eine zentrifugale Elektronenbewegung, die durch eine strukturelle Umlagerung ausgelöst wird, zum gleichen Ziel führen müßte. Auf Anraten von befreundeter Seite stellte ich damals diese Erweiterung des Grundgedankens meiner Arbeit zurück, in der Überzeugung (an der sich auch heute noch nichts geändert hat), daß eine experimentelle Untersuchung über den Verlauf des Ettingshausen-Nernst-Koeffizienten mit Annäherung an den Sprungpunkt auf jeden Fall aufschlußreich sein müßte und daß es in erster Linie darauf ankäme, irgendwelche Experimentaluntersuchungen unter dem Gesichtspunkt der Erklärbarkeit des Meissner-Effektes anzuregen. Schwierigkeiten, die sich der Anwendung dieses Deutungsversuches auf den Hohlzylinder entgegenstellten, veranlaßten eine gesonderte Untersuchung des Problems der Hohlkörper<sup>1)</sup>, in der es sich zeigte, daß die Erscheinungen in diesen nur durch die Annahme mikroskopischer Supraleitgebiete, die unter Umständen zu einem Makrobereich verschmelzen, erklärt werden könnten. Mit dieser Annahme verlor auch das makroskopische Temperaturgefälle im Versuchskörper seine Bedeutung für den Meissner-Ochsenfeld-Effekt, da das Temperaturgefälle in der Umgebung eines Mikrobereichs infolge der Umwandlungswärme auf jeden Fall radial von innen nach außen verlaufen mußte. Obgleich somit die dem Deutungsversuch entgegenstehenden Schwierigkeiten aus dem Wege geschafft waren, ergab sich bei näherem Zusehen aus der Vorstellung des Entstehens und Wachsens dieser Mikrobereiche ein neuer Weg zur klassischen Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes, über den nun berichtet werden soll. Dabei kann die Frage, ob der neue Erklärungsversuch zu einer gänzlichen Aufgabe des alten zwingt, oder ob vielleicht ein Ineinanderwirken der beiden Mechanismen in Betracht zu ziehen wäre, vorläufig offen bleiben. Es wird sich zeigen, daß zumindest in gewissen Sonderfällen die zweite Möglichkeit zutreffen könnte.

Zum Schluß muß aber noch darauf verwiesen werden, daß die Rolle des Temperaturgefälles beim Zustandekommen des Meissner-Ochsenfeld-Effektes eine noch einfachere und unmittelbarere sein könnte, als ursprünglich angenommen wurde. In seiner Arbeit über „Stromverzweigung und Stromverdrängung in Supraleitern“<sup>2)</sup> spricht Justi im Anschluß an einen Versuch von einem thermischen Außenkühlungseffekt, der zumindest in einzelnen Fällen für die Verdrängung des Magnetfeldes verantwortlich gemacht werden könnte. Man muß den Ausgang weiterer, derzeit in Gang befind-

---

<sup>1)</sup> K. M. Koch, ZS. f. Phys. 118, 1, 1941. — <sup>2)</sup> E. Justi u. G. Zickner, Phys. ZS. 42, 257, 1941.

licher Versuche abwarten, um die Tragweite dieses Effektes und sein Zusammenwirken mit den beiden anderen Mechanismen beurteilen zu können.

### 1. Die Existenz von Supraleitkeimen.

Die Analyse des Übergangszustandes ergibt, daß der Supraleitzustand bei Unterschreitung der Sprungtemperatur oder des kritischen Feldes zuerst in mikroskopischen Gebieten einsetzt, deren Zahl und Größe bei weiterem Absinken der Temperatur oder der Feldstärke derartig wächst, daß die makroskopische Permeabilität des Versuchskörpers stetig von 1 bis zu dem für den Supraleitzustand charakteristischen Wert 0 abnimmt. Diese Vorstellung ist schon von London<sup>1)</sup> entwickelt worden — obgleich sie in seiner Theorie eigentlich einen Fremdkörper darstellt —, und es ist dann nicht weiter verwunderlich, daß er im Zusammenhang mit gewissen Hysteresiserscheinungen auch zu dem Begriff von „Keimen“ gelangt (l. c. S. 61, „Hystérèse par formation de germes“). Dieser Begriff gewinnt nun, und das ist für unseren Zweck von einiger Bedeutung, durch eine Beobachtung von Justi<sup>2)</sup> so sehr an Anschaulichkeit, daß es wohl günstig ist, diese Beobachtung zum Ausgangspunkt unserer Überlegungen zu machen.

Im Verlauf seiner Untersuchungen über die Supraleitung von Nb-Verbindungen hat Justi nämlich folgendes festgestellt. Eines dieser Präparate (infolge des Herstellungsprozesses ist das Verhalten der verschiedenen Präparate nicht ganz übereinstimmend) wurde beim Abkühlen auf 16° abs. supraleitend, blieb dann aber beim Erwärmen bis 20,4° abs., der Temperatur des freisiedenden Wasserstoffs, noch immer supraleitend. Das ist ein Verhalten, das bei einer supraleitenden Verbindung nicht sehr überrascht, wenn auch das Temperaturintervall ungewöhnlich groß ist. Wurde das Präparat nunmehr für kurze Zeit aus dem siedenden Wasserstoff herausgehoben, so stellte sich der Ohmsche Widerstand sofort ein, um aber — und das ist das Auffallende — sofort wieder zu verschwinden, wenn der Versuchskörper in das Wasserstoffbad getaucht wurde<sup>3)</sup>. Es sieht also so aus, als ob der Übergang in den supraleitenden Zustand erleichtert würde, wenn der Körper schon einmal supraleitend war bzw. als ob bei der Erwärmung irgendwelche supraleitenden Keime erhalten blieben, die die

<sup>1)</sup> F. London, Une conception nouvelle de la supra-conductibilité. Paris, Hermann et Cie., 1937. — <sup>2)</sup> Dieser Versuch wurde zuerst im Rahmen einer Arbeit über „Supraleitende Verbindungen usw.“ beschrieben, die gemeinsam mit Aschermann, Friederich und Kramer in Phys. ZS. 42, 349, 1941 veröffentlicht worden ist. Eine eingehendere Darstellung folgt nach Mitteilung von Prof. Justi im Meissner-Festheft der Ann. d. Phys. — <sup>3)</sup> Es war also diesmal nicht mehr notwendig, bis auf 16° abzukühlen.

Wiederherstellung des Supraleitzustandes erleichtern. In seiner Veröffentlichung hat Justi auf die Analogie hingewiesen, die zwischen dieser Erscheinung und der von Goetz <sup>1)</sup> entdeckten Persistenz von Kristallkeimen in Schmelzen, die nur wenig über den Schmelzpunkt erhitzt wurden, zu bestehen scheint. Diese Analogie wird in überraschender Weise noch durch folgende Feststellung gestützt. Die *Thermokraft* der Schmelze zeigt nämlich, wie Goetz und vor ihm schon Boydston <sup>2)</sup> beobachtete, schon einige Grade oberhalb des Schmelzpunktes eine Unregelmäßigkeit im Verlauf und einen allmählichen Übergang zu dem Wert, den sie im festen Zustand hat. Genau dasselbe beobachteten aber auch Borelius und Mitarbeiter <sup>3)</sup> für die Thermokraft eines Supraleiters gegen einen Normalleiter oberhalb  $T_s$ . (Es werde vermerkt, daß diese auf Grund ihrer Messungen nach Unterschreitung des Sprungpunktes zwar äußerst klein, aber nicht Null ist.)

Diese Übereinstimmung spricht, gemeinsam mit der Beobachtung Justis, sehr für die Annahme, daß der Übergang vom normal- zum supraleitenden Zustand ebenso wie der vom flüssigen zum kristallinen in mikroskopischen Gebieten vorbereitet wird, ehe er dann lawinenartig einsetzt. Da nach den Messungen von Donat und Stierstadt <sup>4)</sup> die Leitfähigkeit keine analogen Veränderungen zeigt, wäre es vielleicht angezeigt, alle übrigen Sekundäreffekte, vor allem die galvano- und thermomagnetischen, bezüglich ihres Verlaufs oberhalb der Umwandlungstemperatur zu untersuchen. Es wäre von größter Bedeutung, festzustellen, wie weit der hier sich bietende Parallelismus gilt. Wenn aber im nächsten Abschnitt gezeigt wird, daß sich aus ihm eine geradezu trivial anmutende Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes ableiten läßt, so muß dies wohl von vornherein als eine starke Stützung dieses Gedankens angesehen werden.

## 2. Der Mechanismus des Meissner-Ochsenfeld-Effektes.

Das Wesen eines Kristallisationsvorganges besteht, in großen Zügen gesehen, darin, daß Keime, die ein bestimmtes Ordnungsprinzip in sich tragen, durch Aufnahme weiterer Materie, die dabei dem gleichen Ordnungsprinzip unterworfen wird, wachsen, bis sich dem Wachstum ein Hindernis entgegenstellt. Wir wollen nun den Übergang zum supraleitenden Zustand als eine Art Kristallisationsvorgang auffassen und uns vorstellen, daß auch hier schon vor der Umwandlung Keime vorhanden sind und daß diese bei

---

<sup>1)</sup> A. Goetz, Phys. Rev. **35**, 193, 1930. — <sup>2)</sup> R. W. Boydston, Phys. Rev. **30**, 911, 1927. — <sup>3)</sup> G. Borelius, W. H. Keesom, C. H. Johanson u. J. O. Linde, Comm. Leiden, Nr. 217c, 1931. — <sup>4)</sup> E. Donat u. O. Stierstadt, Ann. **17**, 897, 1933.

der Übergangstemperatur zu wachsen beginnen, bis sie den ganzen Körper ausfüllen. Nun denken wir uns diesen Vorgang in einem konstanten Magnetfeld vor sich gehend und nehmen zunächst zur Vereinfachung an, daß die Keime langgestreckte Zylinder seien, deren Achse zum Feld parallel ist. (Wir werden gleich sehen, daß diese Vorstellung durchaus berechtigt ist.) Wenn nun ein solcher Keim durch Aufnahme von Materie in seiner Dicke wächst, so wächst damit auch der magnetische Kraftfluß durch seinen Querschnitt und gibt so Anlaß zur Entstehung eines Induktionsstromes, dessen Magnetfeld dem äußeren Feld entgegentwirkt.

Der Vorgang ist ohne weiteres quantitativ zu fassen und liefert dann tatsächlich die im Meissner-Ochsenfeld-Effekt beobachtete Verdrängung des Magnetfeldes. Schreiben wir mit Rücksicht auf die während des Wachstums veränderliche Selbstinduktion die Induktionsgleichung

$$\frac{d(LI)}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt},$$

so erhalten wir durch Integration

$$(LI)_t - (LI)_0 = -(\Phi_t - \Phi_0),$$

$(LI)_0$  ist sicher gleich 0 und auch  $\Phi_0$  kann, wenn das zylindrische Element zu Beginn sehr schmal ist, vernachlässigt werden, so daß uns

$$(LI)_t = -\Phi_t \quad (1)$$

verbleibt. Diese Gleichung drückt aber nichts anderes aus, als daß das Feld des Induktionsstromes das primäre Feld im Inneren des Zylinders aufhebt. Die makroskopische Permeabilität des Versuchskörpers wird zwar auf Grund dieser Vorstellung nicht exakt 0 werden, es ist aber fraglich, ob die Meßgenauigkeit bei der Beobachtung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes ausreicht, um etwaige Abweichungen festzustellen. Außerdem besteht aber — darüber werden wir im 4. Abschnitt sprechen — unter günstigen Umständen eine Tendenz der Bereiche zur Bildung eines einzigen, den Versuchskörper als Ganzes umfassenden Makrobereiches, bei dieser Verschmelzung wird der Rest des magnetischen Flusses verdrängt und  $B$  wird exakt (allerdings nur mehr symbolisch gesprochen) gleich 0.

Auf die Oberfläche eines vom Abschirmstrom umflossenen Bereiches übt das Magnetfeld einen Druck vom Betrage

$$K = \frac{H^2}{8\pi} \cdot F$$



aus. Nach v. Laue<sup>1)</sup> ist es dieser Druck, der an Stelle der unsicher zu formulierenden Magnetisierungsarbeit in die thermodynamischen Überlegungen einzugehen hat. Bei der Entstehung eines Bereiches vom Volumen  $V$  wird eine Arbeit vom Betrage  $\frac{H^2}{8\pi} \cdot V$  geleistet, die als rein mechanische Spannungsenergie aufgespeichert wird. Die Lauesche Gleichgewichtsbedingung

$$f_s - f_n = \frac{H^2}{8\pi} dV$$

bekommt so ganz anschauliche Bedeutung: ein Körper wird supraleitend, sobald die Differenz der freien Energien, die das Maß der Tendenz zur Bildung der Mikrobereiche darstellt, größer wird, als die beim Wachstum zu leistende Arbeit.

Überdies begünstigt aber der Druck des Magnetfeldes die Entstehung von Gebilden, die in Richtung der Kraftlinien langgestreckt sind. Zu dieser Begünstigung trägt möglicherweise auch der Umstand bei, daß der Schwellenwert dünner Zylinder, wie v. Laue<sup>2)</sup> nachgewiesen hat, höher liegt als der von dicken. Für das Auftreten von Schichten oder Nadeln in Richtung des Feldes spricht auch die von mehreren Autoren beobachtete Anisotropie der Leitfähigkeit im Übergangszustand relativ zur Feldrichtung; dies ist sowohl in der zuletzt zitierten Arbeit v. Laue, als auch vom Verfasser<sup>3)</sup> betont worden. Es muß aber gesagt werden, daß die Ableitung des Abschirmeffektes durch die Annahme derartiger Bereiche lediglich anschaulicher wird; sie würde bei beliebig gestalteten Gebilden ganz analog verlaufen, nur wäre hier die Selbstinduktion von der Stellung der Gebilde zum Feld abhängig.

Wichtiger ist der Hinweis darauf, daß dieser Erklärungsversuch auch auf die Variante des Meissner-Ochsenfeld-Effektes anwendbar ist, bei der die Temperatur konstant gehalten und das Magnetfeld von einem Wert  $H > H_K$  zu einem unterkritischen absinkt. Die Angelegenheit ist hier nur durch den einen Umstand etwas unübersichtlicher, daß das abnehmende Magnetfeld von einem Induktionseffekt begleitet ist. Solange aber noch keine Mikrobereiche vorhanden sind, läuft sich der Induktionsstrom im Ohmschen Widerstand tot, im Augenblick der Unterschreitung von  $H_K$  kann man also den Vorgang so ansehen, als ob das Feld konstant wäre, die Bereiche entstehen und verdrängen das Magnetfeld ganz so, wie oben dargestellt, und erst dann kann bei weiterer Abnahme des Feldes der Induktions-

<sup>1)</sup> M. v. Laue, Ann. **32**, 71, 1938; Phys. ZS. **43**, 274, 1942. — <sup>2)</sup> M. v. Laue, l. c. — <sup>3)</sup> K. M. Koch, ZS. f. Phys. **118**, 1, 1941.



strom in irgendeiner Weise zur Geltung kommen. Wir werden im 4. Abschnitt sehen, daß dies auf zwei Arten geschehen kann, wobei es entscheidend ist, ob die Mikrobereiche voneinander isoliert oder verschmolzen sind.

Es muß noch vermerkt werden, daß ein in den Grundzügen recht ähnlicher Versuch zur Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes von Rudnitskij<sup>1)</sup> unternommen worden ist. Nur ist bei ihm die einfache Bezugnahme auf das Induktionsgesetz, die zur uns quantitativen Formulierung des Abschirmeffektes geführt hat, durch den etwas verschwommenen Hinweis ersetzt, daß „beim Zusammenfließen der supraleitenden Keime die Bewegung der Elektronen eine solche ist, daß unter der Wirkung der Lorentz-Kraft eine Vergrößerung des diamagnetischen Moments zustande komme...“ Er versucht auch, in Anlehnung an Landau, die kritische Größe der Bereiche aus der Oberflächenspannung zu berechnen; zur Überprüfung der so erhaltenen Gleichungen fehlt vorläufig jeder Anhaltspunkt.

### 3. Die Justischen Umlagerungsgeräusche.

Unsere Darstellung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes macht die elektrischen bzw. magnetischen Vorgänge im Supraleiter zu bloßen Begleiterscheinungen struktureller Vorgänge. Um dieser Auslegung volle Sicherheit zu geben, müßte man die Gesetze dieser strukturellen Vorgänge und ihre Zusammenhänge mit den magnetischen kennen, dann erst könnte man entscheiden, ob sie wirklich den hier behaupteten primären oder nur akzessorischen Charakter haben. Ein Gebiet, aus dem man diese Gesetzmäßigkeiten herauslesen könnte, wenn man nur das Versuchsmaterial genügend systematisch erweitert, ist das der verschiedenen zeitlichen Trägheitseffekte. Ich halte es aber für sehr wahrscheinlich, daß diese fragliche Gesetzmäßigkeit mit noch größerer Deutlichkeit in einer Erscheinung zum Ausdruck kommt, die Justi<sup>2)</sup> am NbN und am metallischen Nb entdeckt und als *Umlappeffekt* bezeichnet hat. In Anlehnung an den Barkhausen-Effekt werden Proben, die sich im Übergangszustand befinden, in ein Magnetfeld gebracht und mittels eines Lautsprechers, der über eine Induktionsspule und Verstärker angeschlossen ist, Geräusche nachgewiesen, die einer ziemlich hohen akustischen Frequenz entsprechen. Es handelt sich also offenbar um Umlagerungen, die von einer unstetigen Änderung der magnetischen Induktion begleitet sind. Unter qualitativen Bedingungen aufgenommene Oszillogramme liefern Zacken, deren Fläche in der Größenordnung der beim Barkhausen-Effekt beobachteten liegt. Berücksichtigt man den Umstand,

<sup>1)</sup> V. Rudnitskij, Journ. exp. theor. Phys. (russ.) **11**, 107, 1941; Phys. Ber. **23**, 1486, 1942. — <sup>2)</sup> E. Justi, Phys. ZS. **43**, 130, 1942.

daß der einzelne Induktionsstoß der Größe und der Permeabilität der Bereiche proportional ist, so ergibt sich, daß die Bereiche, in denen die Umlagerungen stattfinden, ungefähr 1000mal größer sind als beim Ferromagnetikum. Dies wäre bereits ein erstes Ergebnis in der angedeuteten Richtung, denn aus der Größe der Bereiche läßt sich eventuell die bei der Entstehung wirksame Oberflächenspannung bestimmen, die ihrerseits mit den kritischen Daten des Supraleiters zusammenhängen müßte. Genau wie beim Barkhausen-Effekt wird man auch hier den Zusammenhang des Umlagerungsgeräusches mit der Magnetisierungskurve bestimmen müssen, wobei die Form der Probe so zu wählen ist, daß klare Verhältnisse erwartet werden können.

Aus dem Fehlen einer Trägheitserscheinung beim Abschalten des Feldes und bei mehrmaliger Wiederholung des Versuches ersieht man, daß die naheliegende Analogie mit dem Barkhausen-Effekt nicht überschätzt werden darf. Vor allem hat man es hier wahrscheinlich nicht mit Drehprozessen, sondern nur mit einer Art von Wandverschiebungsprozessen zu tun, wobei die Wände normal- und supraleitende Bereiche voneinander trennen.

Es ist bisher nicht gelungen, bei konstantem Magnetfeld und variabler Temperatur das Umwandlungsgeräusch festzustellen. Dies könnte daran liegen, daß infolge der Langsamkeit der Umwandlung diese in äußerst kleinen Bereichen stattfindet und daher die Frequenz zu hoch liegt. Vielleicht darf hier zur Illustration auf eine Beobachtung von Hippel und Stierstadt <sup>1)</sup> hingewiesen werden, die eine Art Analogie zum Meissner-Ochsenfeld-Effekt im Ferromagnetikum darzustellen scheint. Wenn man nämlich einen Eisendraht bei einer Temperatur, die *oberhalb* des Curie-Punktes liegt, einem longitudinalen Magnetfeld aussetzt und dann allmählich abkühlt, so hört man bei Unterschreitung des Curie-Punktes im Lautsprecher, der auf übliche Art angeschlossen ist, einen singenden Ton, dessen Frequenz mit abnehmender Temperatur zunimmt. Eine eingehende Untersuchung dieser Erscheinung unter dem Gesichtspunkt der möglichen Parallele zum Meissner-Ochsenfeld-Effekt könnte nach beiden Gebieten hin sehr fruchtbar sein.

Die wichtigste Aufgabe liegt aber zunächst in dem Nachweis der Umlagerungsgeräusche bei gewöhnlichen Supraleitern, wobei man nach dem bisher Gesagten darauf achten wird müssen, daß die Frequenzen möglicherweise weit ober- oder unterhalb des Hörbereichs liegen.

<sup>1)</sup> A. v. Hippel u. O. Stierstadt, ZS. f. Phys. 69, 52, 1931.

#### 4. Mikro- und Makrozustand.

Aus der im vorstehenden entwickelten Vorstellung vom Mechanismus des Meissner-Ochsenfeld-Effektes ergibt sich, daß im allgemeinen überall dort, wo die Umwandlung vom normal- zum supraleitenden Zustand in einem Magnetfeld stattfindet, dieses Feld durch die entstehenden Mikrobereiche verdrängt wird. Der Supraleiter verhält sich demgemäß wie ein Körper mit der Permeabilität Null.  $\mu = 0$  liefert  $B = 0$ , dagegen wird die in einer engen, parallel zum Feld gelegenen Bohrung gemessene Feldstärke  $H_i$

$$H_i = \frac{H_e}{1-n}.$$

Hier ist  $n$  der Entmagnetisierungsfaktor, der z. B. im Falle einer Vollkugel  $1/3$  ist, so daß wir  $H_i = 3/2 H_e$  erhalten. Dieser Wert wird nach den Messungen von de Haas und Guinau<sup>1)</sup> allerdings nur im Übergangszustand beobachtet. Wird die Vollkugel im supraleitenden Zustand in ein Magnetfeld gebracht, so ist die Feldstärke in der Bohrung Null, entsprechend einem makroskopischen Abschirmstrom. In diesem Fall kann die Aussage  $\mu = 0$  nur mehr symbolisch verwendet werden, da ja auch der Begriff der Induktion  $B$  seinen Sinn verliert. Nur das Feld im Außenraum kann so berechnet werden, als sei die Kugel mit  $\mu = 0$  magnetisiert. Wird dagegen die Kugel im konstanten Magnetfeld abgekühlt, so steigt die Feldstärke in der Bohrung bei Unterschreitung von  $T_k$  bis auf  $\sim 2 H_e$ . Das könnte vielleicht daran liegen, daß die Kugel durch den störenden Einfluß der Bohrung an den Polen nicht supraleitend wird und gleichsam ein flaches Ellipsoid übrigbleibt. Da einem solchen ein Entmagnetisierungsfaktor zukommt, der kleiner als  $1/3$  ist, könnte auf diese Art der experimentelle Befund erklärt sein. Es spricht also doch einiges dafür, daß im Falle des Meissner-Ochsenfeld-Effektes nur Mikrobereiche entstehen, die eine makroskopische Permeabilität  $\mu = 0$  hervorbringen.

Der Widerspruch, der durch diese Feststellungen gegenüber der thermodynamisch ziemlich gesicherten Reversibilität des Übergangs  $nl \leftrightarrow sl$  entsteht, scheint mir nun durch folgende Annahme zu beseitigen sein. Beim Übergang vom normal- zum supraleitenden Zustand entstehen auf jeden Fall, ob er nun im Magnetfeld oder ohne Magnetfeld erfolgt, zuerst Mikrobereiche, die aber eine bestimmte, irgendwie wohl auch quantitativ zu formulierende Tendenz zur Verschmelzung haben. Nur erfordert diese Verschmelzung eine, wenn auch geringfügige, Auslösungsenergie, nach deren

<sup>1)</sup> W. J. de Haas u. O. A. Guinau, Comm. Leiden Nr. 241.

Zufuhr sie spontan und mit Energieabgabe weiterläuft. Den Beweis für diese Annahme liefern meines Erachtens die Messungen von Graßmann und Eicke <sup>1)</sup>, die zeigen, daß der beim erstmaligen Induktionsstoß in einem Ring entstehende Dauerstrom um einen, allerdings sehr kleinen Betrag unter dem Wert liegt, der aus dem Induktionsgesetz folgt. Daß der Energieverlust, der bei einer Umpolung des Feldes auftritt, doppelt so groß ist, wie der beim erstmaligen Einschalten, ist recht verständlich, denn in diesem Fall muß ja zuerst die Mikromagnetisierung, die der alten Feldrichtung entspricht, zerstört werden und dann kann erst, nach neuerlicher Entstehung der Mikrobereiche, die Verschmelzung stattfinden.

Die zur Verschmelzung der Mikrobereiche notwendige Auslösungsenergie wird aller Voraussicht nach stark davon abhängen, wie sehr die Form des Versuchskörpers der Entstehung eines Makrozustandes entgegenkommt. Ich denke da an die eigenartigen Versuche von Shalnikov, die gezeigt haben, daß Verletzungen der Oberfläche das Zustandekommen eines makroskopischen Abschirmstromes sehr erschweren und unter Umständen auch verhindern können. Es wäre von größter Bedeutung, wenn man den Zusammenhang der Auslösungsenergie mit dem Gestaltsfaktor ermitteln könnte.

Die Zufuhr der Auslösungsenergie kann aber, wie es scheint, auch durch die Induktionsspannung beim Abschalten des Magnetfeldes erfolgen, d. h. es kommt offenbar nur darauf an, daß eine tangentielle elektrische Feldstärke auftritt. Wenn wir einen ringförmigen Supraleiter im konstanten Magnetfeld abkühlen, so unterliegt es kaum einem Zweifel, daß durch den Meissner-Ochsenfeld-Effekt zunächst, genau wie bei der Vollkugel, eine Mikromagnetisierung erzeugt wird (Fig. 1), es ist aber ebenso zweifellos, daß der beim Abschalten des Feldes entstehende Dauerstrom eine Verschmelzung der Bereiche voraussetzt. Um dies einzusehen, muß man sich folgendes klar machen. Wenn man an der Oberfläche einer Vollkugel durch Einschalten eines Magnetfeldes einen makroskopischen Abschirmstrom erregt, und dann das Feld schrittweise wieder abschaltet, so zeigen die Messungen, daß der Abschirmstrom in gleichem Maße abnimmt, so daß er in jedem Augenblick der aktuellen Feldstärke entspricht. Das ist nur dann zu verstehen, wenn der beim Abschalten entstehende Induktionsstrom den Abschirmstrom um den jeweils erforderlichen Betrag reduziert. Ist das Feld gänzlich abgeschaltet, so bleibt demgemäß kein magnetisches Moment zurück. Analoges müßte

---

<sup>1)</sup> P. Graßmann u. H. Eicke, Phys. ZS. **38**, 429, 1937.

man auch dann erwarten, wenn die Mikrobereiche im Ring voneinander vollständig isoliert wären: mit abnehmender Feldstärke würden nur die Mikroströme entsprechend reduziert. Tatsächlich zeigt sich keine Wirkung des Induktionsstroms, solange die Bereiche im Übergangszustand den Versuchskörper nicht zur Gänze ausfüllen, erst wenn  $\mu = 0$  erreicht ist, setzt der Dauerstrom ein.

Es ist nun recht interessant, daß wir über die Lage des Dauerstroms nur dann Aufschluß erhalten, wenn wir annehmen, daß die Bereiche vor seinem Einsetzen in der Art verschmelzen, die Fig. 2 darstellt und die ihrer

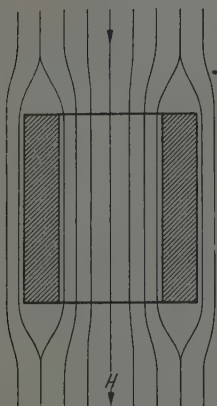


Fig. 1. Hohlzylinder im longitudinalen Magnetfeld. Die Kraftlinienverteilung entspricht  $\mu = 0$ , d. h. einer Verdrängung des Feldes aus der Wandung, wie sie durch supraleitende Mikrobereiche bedingt ist.

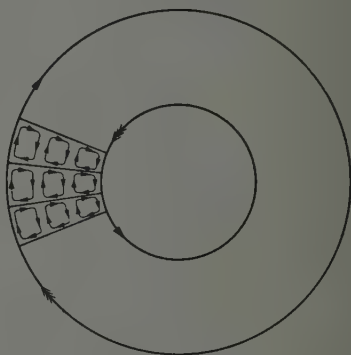


Fig. 2. Querschnitt durch den Hohlzylinder. Man sieht, daß die Mikroströme an den inneren Grenzen der Bereiche überall entgegengesetzt fließen, nur an den Mantelflächen fließen sie im gleichen Sinn und können daher resultierende Makroströme liefern.

spontanen Verschmelzungstendenz entsprechen dürfte. Man sieht, daß die Bereichsströme sich im Inneren des Körpers aufheben und nur an den Mantelflächen zwei resultierende Makroströme liefern, die entgegengesetzt gerichtet sind. Wenn dann der beim Abschalten des äußeren Feldes entstehende Induktionsstrom, so wie bei der Vollkugel, den an der äußeren Mantelfläche fließenden Abschirmstrom vernichtet, so bleibt der an der inneren Fläche fließende, dessen Magnetfeld dem primären ungefähr gleich ist, zurück. Daß der Dauerstrom an der *Innenfläche* eines ringförmigen Körpers fließt, scheint von den Messungen, z. B. denen von Justi an einem NbN-Ring, bestätigt zu werden.



Wir werden in der Folge sehen, daß das Problem der Bildung und Verschmelzung der Mikrobereiche unter Umständen den Kernpunkt des Supraleitproblems überhaupt enthalten könnte. Es wird also auf jeden Fall von Wert sein, wenn durch ein möglichst umfangreiches Versuchsmaterial die hier angedeuteten Zusammenhänge zur vollen Klarheit gebracht würden. Es darf nicht übersehen werden, daß diese Aufgabe nicht ganz leicht ist: man kann sich leicht überzeugen, daß durch die zu den Messungen notwendigen Bohrungen usw. Nebeneffekte bedingt werden können, die unter Umständen das Ergebnis vollkommen verfälschen.

### 5. Die „Keim“-Theorie der Supraleitung.

Die Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes durch die Annahme, der Supraleitzustand entstehe in Analogie zu einem Kristall aus Keimen, die wachsen und verschmelzen, setzt im Grunde genommen *nicht* voraus, daß diese Keime selber *diamagnetisch* sind. Es genügt anzunehmen, daß bei der Bildung der gemeinsamen Elektronenhülle, die der Träger des Abschirmstromes sein soll, kein zusätzliches paramagnetisches Moment erzeugt wird. Dann geht das paramagnetische Moment der Einzelatome einfach in den gesamten magnetischen Kraftfluß ein, der nach Gl. (1) durch den Abschirmstrom verdrängt wird; der Paramagnetismus bewirkt lediglich eine Erhöhung dieses Stromes. Dafür aber, daß Komplexe durch Ergänzung der Elektronenschalen ein diamagnetisches Moment bekommen können, obgleich die Einzelatome paramagnetisch sind, gibt es genügend Beispiele, man vgl. hierzu die Darstellung v. Auwers in Müller-Pouillet, Bd. IV/4.

Eine andere Frage ist es, wie man sich die Entstehung dieser „Keime“ und ihr Wachstum denken soll. Es liegt nahe — dies hat auch Rudnitzkij in einer freilich sehr unpräzisen Art getan —, hier an die von Becker und Döring<sup>1)</sup> über die Keimbildung in übersättigten Dämpfen entwickelten Gedanken Anschluß zu suchen. Nach Becker und Döring entstehen die Keime durch Schwankungserscheinungen, die mit Entropieabnahme verknüpft, also, anders gesagt, *gegen* die statistischen Gesetze erfolgen. Der Dampfdruck dieser Keime ist infolge der Oberflächenspannung dem Radius verkehrt proportional, daraus ergibt sich, daß sie erst von einem bestimmten Radius an gegenüber der Umgebung stabil bzw. in der Lage sind, spontan zu wachsen. Nehmen wir noch an, und das ist wohl recht plausibel, daß der Radius der unmittelbar durch die Schwankungen entstehenden Keime

<sup>1)</sup> R. Becker u. W. Döring, Ann. 24, 719, 1935.



mit abnehmender Temperatur zunimmt, so ergibt sich, daß von einer ganz bestimmten Temperatur an ein spontanes Wachstum denkbar ist. Für unsere diamagnetischen Keime wäre das dann die Temperatur, bei der die restlose Verdrängung des äußeren Magnetfeldes erfolgt, also *der Sprungpunkt der Supraleitung*. (Wobei wir hier vorläufig Supraleitung und vollständigen Diamagnetismus gleichsetzen.) Diese Vorstellung über die Entstehung des Supraleitzustandes gewinnt an Bedeutung, wenn wir nachweisen — das soll im nächsten Abschnitt geschehen —, daß sie auch für den Mechanismus der Normalleitung verwendet werden kann.

Man muß natürlich vorsichtig sein und die Frage prüfen, ob unsere Hypothese nicht am Ende auf einen einfachen Zirkelschluß zurückzuführen ist. Nun ist in der Formulierung: ein Körper wird supraleitend, wenn gewisse, durch Zufall entstandene supraleitende Keime spontan zu wachsen beginnen und den Körper ganz ausfüllen, sicher ein reiner Zirkelschluß enthalten. Nur erschöpft diese Formulierung unsere Hypothese nicht. Sie besteht ja einerseits in der Behauptung, daß auf den Übergang in den supraleitenden Zustand *die* Vorstellungen anzuwenden wären, die man für die Kristallbildung aus Keimen entwickelt hat (hier sind auch die Kristalle im Keim schon vorausgesetzt.) Daraus ergibt sich aber als erste Bestätigung die zwanglose Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes. Andererseits wird behauptet, daß die zur Supraleitung führenden strukturellen Tendenzen irgendwie schon im normalleitenden Zustand zum Ausdruck kommen müssen. Gelingt dieser Nachweis — und wir werden in einer nächsten Arbeit sehen, daß alle Aussicht dafür besteht —, so verschiebt sich das Problem zur Gänze: nicht *die Supraleitung*, sondern *die Normalleitung* ist zu erklären. Studiert man mit einiger Aufmerksamkeit die wellenmechanische Elektronentheorie, z. B. in der Darstellung von Fröhlich<sup>1)</sup>, so kommt man zu dem gleichen Schluß: nicht in der Erklärung der *Leitfähigkeit*, sondern in der des *Widerstandes* liegt das Problem. Darüber wird aber besser in einem eigenen Rahmen zu sprechen sein.

#### 6. Das Verhältnis von Supra- und Normalleitung.

Wir haben in den vorangehenden Abschnitten die Vorstellung von Komplexen entwickelt, die aus vielen Atomen bestehen, aber eine gemeinsame Elektronenlücke besitzen sollten, in der die Elektronen, gerade so wie im Einzelatom, widerstandsfreie Bewegungen ausführen können. Damit ist die

<sup>1)</sup> H. Fröhlich, Elektronentheorie der Metalle. Berlin, Springer, 1936.

unendliche Leitfähigkeit für einen Dauerstrom, der innerhalb eines geschlossenen supraleitenden Makrobereichs fließt, bereits in den Voraussetzungen enthalten. Es zeigt sich jetzt übrigens, wenn wir unsere Überlegungen in der Rückschau betrachten, daß wir London und Welker insofern Recht geben müssen, als die unendliche Leitfähigkeit für sich allein wirklich nicht ausreicht, um den Diamagnetismus der Supraleiter zu verstehen. Schon in dem elementaren Beispiel des Körpers, der nach Eintritt der Supraleitung in ein Magnetfeld gebracht wird, geht der Entstehung des Abschirmstromes die oberflächliche Verschmelzung der Mikrobereiche als primäre Erscheinung voraus. Nur der geringfügige Betrag der hierzu notwendigen Auslösungsenergie läßt diesen Zusammenhang leicht übersehen. Dagegen besteht beim Meissner-Ochsenfeld-Effekt kein Zweifel darüber, daß die unendliche Leitfähigkeit ohne die Tendenz der Bereiche zum Wachstum und zur Verschmelzung niemals zur Verdrängung des äußeren Magnetfeldes führen würde. Nur ist die strukturelle Gesetzmäßigkeit, die wir hier den elektrischen Vorgängen überordnen, etwas ganz anderes, als das in Gestalt einer inhaltslosen Differentialgleichung ausgesprochene „originäre“ Naturgesetz Londons oder die Welkersche These vom Primat des Diamagnetismus, aus dem die unendliche Leitfähigkeit gefolgert werden soll.

Nun erschöpfen Diamagnetismus und Dauerstrom noch nicht den Erscheinungskomplex der Supraleitung, es gibt ja auch Ströme, die von außen in den Supraleiter eintreten und ihn wieder verlassen. Für diese liegt das Problem etwas anders und wir müssen zugeben, daß uns fürs erste jeder Anhaltspunkt zu seiner Lösung fehlt. Wie unklar die Vorstellungen sind, die auf diesem Gebiete bestehen, zeigt der Versuch von Meissner und Steiner<sup>1)</sup>, in welchem sie eine supraleitende Zinnfolie mit langsamen Elektronen beschließen, wobei sie keinen Unterschied gegenüber einer normalleitenden Folie feststellen können. Es ist klar, daß vom Standpunkt einer zu wörtlich genommenen Elektronentheorie das Verhalten des Supraleiters gegenüber den eingeschossenen Elektronen dasselbe sein müßte, wie das gegenüber den von einem Normalleiter aus eintretenden. Der Fehler liegt eben darin, daß die Grundbegriffe der Elektronentheorie viel zu unscharf sind, um eine derart wörtliche Auslegung zu erlauben.

Sieht man genauer zu, so findet man, daß die mathematischen Ansätze der Elektronentheorie in der Hauptsache auf dem Gedanken beruhen, das Elektron bewege sich innerhalb einer gewissen Strecke ganz frei, der Ohm-

<sup>1)</sup> K. Steiner u. W. Meissner, ZS. f. Phys. 76, 201, 1932.

sche Widerstand entstehe erst dadurch, daß das Elektron mit einem Atom bzw. mit einem Schallquant zusammenstößt und so seine Energie abgibt. Dieser Gedanke ist derartig unbestimmt, daß man eine vollkommene Umdeutung vornehmen kann, ohne — zumindest in den Hauptzügen — an dem Gebäude der mathematischen Theorie etwas ändern zu müssen.

Ich möchte nun zeigen, daß eine Umdeutung des Leitungsmechanismus, bei der die mathematischen Ansätze der Elektronentheorie aufrecht bleiben, so vorgenommen werden kann, daß das Phänomen der Supraleitung vollständig konsequent in die Vorstellung vom Mechanismus der Normalleitung eingeordnet werden kann. Ich gehe dabei von der Annahme aus, daß es freie Leitungselektronen im Sinne der bisherigen Theorie überhaupt nicht gibt, sondern daß das Elektron immer einem Atom oder einem atomähnlichen Komplex zugeordnet ist, wobei dieser Komplex allerdings im Grenzfall makroskopische Dimensionen annehmen, mit einem Kristallit und sogar mit dem Versuchskörper als Ganzes identisch sein kann. Solange das Elektron einem bestimmten Atom oder atomähnlichen Bereich angehört, erfolgt seine Bewegung ohne Widerstand; es wird durch ein elektrisches Feld beschleunigt, durch ein magnetisches Feld abgelenkt, nach den Gesetzen, die wir aus den Kathodenstrahlenversuchen kennen. Der Energieverlust, aus dem der Ohmsche Widerstand resultiert, findet erst dann statt, wenn das Elektron von einem derartigen Bereich zum nächsten übergeht. Es sei festgestellt, daß diese Auslegung zunächst nur eine gewisse Weiterbildung von Gedanken ist, die schon von mehreren Autoren vertreten wurden, man vergleiche diesbezüglich die Darstellung von Grüneisen im Handb. d. Phys., Bd. XIII, S. 65. Wenn somit der Widerstand nur aus Übergangsarbeiten resultiert, so ist es klar, daß er abnimmt, wenn die Bereiche größer werden und sich die Zahl der Übergänge damit verringert. Im Supraleiter selber finden nach unserer Vorstellung gar keine Übergänge statt, da er sich wie ein Riesenatom verhält. Für den Dauerstrom, dessen Bahn geschlossen im Supraleiter liegt, muß der Widerstand nach dieser Auffassung exakt gleich Null sein. Im Supraleiter, der in einen äußeren, aus Normalleitern bestehenden Stromkreis eingeschaltet ist, ist der Widerstand nur durch den Übergangswiderstand an den beiden Enden bestimmt.

Nun haben wir im vorigen Abschnitt die Vorstellung entwickelt, daß oberhalb des Sprungpunktes Keime auftreten, die im Zuge von statistischen Schwankungserscheinungen immer wieder entstehen und vergehen, bis sie — eben beim Sprungpunkt — eine kritische Größe überschreiten und von da an spontan zu wachsen beginnen. Soll unser Bild vom Leitungsmechanismus

wirklich Normal- und Supraleitung in gleicher Weise umfassen, so müssen auch die Keime entsprechend in dieses Bild eingekläut werden. Man könnte sich nun denken, daß das elektrische Feld die Entstehung von Keimen begünstigt, die in Feldrichtung langgestreckt sind und die unter Aufspeicherung von potentieller Energie miteinander verschmelzen. Ich möchte in diesem Fall den Ausdruck „Stromfäden“ gebrauchen, eine spätere Untersuchung wird zeigen, daß zwischen diesen Gebilden und den zur Erklärung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes eingeführten Mikrobereichen trotz der gemeinsamen Herkunft eine gewisse Gegensätzlichkeit besteht. Durch die Wärmebewegung der Einzelatome werden die Stromfäden wieder zerstört, die aufgespeicherte Energie wird dabei als Joulesche Wärme frei. Wir hätten somit auch im Normalleiter ganz *materielle* Strombahnen anzunehmen, die abwechselnd gebildet und wieder zerstört werden. Die Wirkung des elektrischen Feldes, die wir hier annehmen mußten, ist wohl mit der identisch, die im Supraleitzustand zur Verschmelzung der Mikrobereiche führt. In einer Arbeit, die im unmittelbaren Anschluß an die vorliegende erscheinen soll, will ich zeigen, daß vor allem verschiedene, mit dem *Hall-Effekt* verknüpfte Probleme nur dann richtig verstanden werden können, wenn man derartig materiell fixierte Strombahnen annimmt. Darüber hinaus kann aber schon jetzt angedeutet werden, daß auch eine weitergehende Analyse der Probleme der Normalleitung die Überlegenheit dieses Bildes gegenüber dem der freien Leitungselektronen beweist. Insbesondere das Problem der Kopplung zwischen den elektrischen und thermischen Vorgängen wird durch die Hypothese von den materiellen Strombahnen von den Widersprüchen befreit, die ihm in der Lorentz-Sommerfeldschen Theorie anhaften.

Wir sind somit zu folgendem Normal- und Supraleitung umfassenden Bild des Leitungsvorganges gelangt. Träger des Leitungsvorganges sind Gebilde, die aus vielen Atomen mit einer gemeinsamen, abgeschlossenen Elektronenschale bestehen, also Analoga zum diamagnetischen Atom. Diese Gebilde entstehen aus Keimen, die durch thermische Schwankungserscheinungen hervorgebracht werden und deren Maximalgröße mit abnehmender Temperatur zunimmt. Oberhalb eines kritischen Durchmessers werden diese Keime gegenüber der zerstörenden Wirkung der Temperaturbewegung stabil, sie beginnen spontan zu wachsen und verdrängen dabei ein eventuell vorhandenes Magnetfeld: das ist der Mechanismus des Meissner-Ochsenfeld-Effektes. Unterhalb des kritischen Durchmessers können die Keime auch bei gewöhnlicher Temperatur durch die Wirkung eines elektrischen Feldes vorübergehend zum Wachstum in der Feldrichtung und zur

Verschmelzung gebracht werden, dabei wird Energie aufgespeichert, die dann bei der Zerstörung der Stromfäden durch die Wärmebewegung in Form der Jouleschen Wärme wieder frei wird: das ist der Mechanismus der Normalleitung. Unterhalb des Sprungpunktes bleiben die einmal gebildeten Stromfäden gegenüber der Wärmebewegung stabil: wir haben Supraleitung.

Die Grundgedanken dieser Arbeit sind — was ich hier dankbar vermerken möchte — in einer regen schriftlichen und mündlichen Diskussion mit Herrn Prof. Dr. Justi entwickelt worden. Ich bin aber Herrn Prof. Justi noch ganz besonders dankbar für den Einblick, den er mir in die Experimentiertechnik bei tiefen Temperaturen gegeben hat. Dem Herrn Präsidenten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt habe ich für die Erlaubnis, einige Zeit als Gast im Kältelaboratorium dieser Anstalt arbeiten zu dürfen, der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Gewährung eines Stipendiums zu danken.



## Vergleichende Messungen des Aktivierungsquerschnittes von Jod in verschiedenen Formen für Neutronen.

Von Fr. Knauer in Hamburg.

Mit 1 Abbildung. (Eingegangen am 30. Juli 1942.)

Der Wirkungsquerschnitt des Jods für Aktivierung durch langsame Neutronen wird in den Formen  $J^-$ ,  $JO_3^-$ ,  $J$  (fest) und  $HJO_3$  (fest) gemessen und innerhalb der Meßgenauigkeit von 2 bis 3% gleich groß gefunden.

Von mehreren Seiten ist festgestellt worden, daß eine Anzahl Stoffe verschiedenen Wirkungsquerschnitt gegenüber langsamen oder schnellen Neutronen besitzen, wenn sie sich in verschiedenen Modifikationen oder in chemischen Verbindungen befinden. So ist gefunden worden<sup>1)</sup>, daß Einkristalle gegenüber einem Strahl langsamer Neutronen einen bis zu 33% kleineren Streuquerschnitt besitzen als Polykristalle. Diese Erscheinung ist auf Interferenz der Materiewellen im Kristallinneren zurückzuführen<sup>2)</sup>, eine Auffassung, die durch gefundene Abhängigkeit des Streuquerschnitts von der Neutronengeschwindigkeit<sup>3)</sup> gestützt wird. Bei chemischen Verbindungen wurde gefunden<sup>4)</sup>, daß die Wirkungsquerschnitte der Verbindungen kleiner oder größer sein können als die Summe der Einzelquerschnitte, wobei noch nicht festgestellt ist, ob dies durch Änderung der Streuung oder der Absorption verursacht wird.

Hier soll kurz über Versuche berichtet werden. Unterschiede im Aktivierungsquerschnitt des Jods in den Formen  $J^-$ ,  $JO_3^-$ ,  $J$  (fest) und  $HJO_3$  (fest) zu finden, die mit langsamen Neutronen aktiviert wurden. Jod bietet bei den Messungen gegenüber anderen Stoffen einige Vorteile.

### Das Meßverfahren.

Zur Aktivierung gelangten die Proben (trocken oder gelöst) zusammen mit der Neutronenquelle (30 mg Ra + Be) für 45 bis 60 Minuten in einen kugelförmigen (Durchmesser 15 cm) allseitig geschlossenen Hohlraum eines zerlegbaren Paraffinklotzes (Wandstärke 10 bis 18 cm). Zur Messung der erreichten Aktivität wurden die Lösungen oder die nach der Aktivierung

<sup>1)</sup> M. D. Whitaker u. H. G. Beyer, Phys. Rev. **55**, 1101, 1939; H. G. Beyer u. M. D. Whitaker, ebenda **57**, 976, 1940. — <sup>2)</sup> O. Halpern, M. Hamermesh u. M. H. Johnston, ebenda **55**, 1125, 1939. — <sup>3)</sup> M. D. Whitaker u. H. G. Beyer, ebenda **57**, 551, 1940. — <sup>4)</sup> M. D. Whitaker u. H. G. Beyer, ebenda **55**, 1124, 1939.



gelösten Stoffe in den Mantel des zuerst von Sueß<sup>1)</sup> beschriebenen Geiger-Müllerschen Zählrohres gefüllt, wo 5 bis 6 Minuten nach Schluß der Aktivierung mit dem Zählen begonnen wurde. Die Proben gaben in der ersten Minute bis etwa 100 Teilchen, bei einem Leerlauf des Zählrohres von 4 bis 5 Stößen in 1 Minute. Mit Hilfe der Halbwertszeit des aktivierten Jods (25 Minuten) wurde aus einer Beobachtungsdauer von 20 bis 30 Minuten die gesamte Teilchenzahl für unendlich lange Aktivierung und Zählung berechnet.

Bei der Aktivierung in einem abgeschlossenen Hohlraum kann man die wirksamen Neutronen in zwei Gruppen teilen. Die erste Gruppe umfaßt die schnellen Neutronen, die von der Quelle kommend die Probe unmittelbar treffen. Ihre Intensität nimmt umgekehrt mit dem Quadrat der Entfernung zwischen Quelle und Probe ab. Diese Gruppe ist wegen des kleinen Wirkungsquerschnitts für Neutronen hoher Energie wenig wirksam. Zu der zweiten Gruppe zählen diejenigen Neutronen, welche mit hoher Energie von der Quelle kommen, in das Paraffin eindringen und von dort stark abgebremst oder als thermische Neutronen wieder in den Hohlraum zurückdiffundieren. Sie besitzen eine räumlich konstante Dichte im Hohlraum und liefern den Hauptanteil der Aktivierung, da, wie die Messungen gezeigt haben, die Aktivierung nicht merklich von der Entfernung zwischen Quelle und Probe abhängt. Dieser Umstand, der die benutzte Anordnung vorteilhaft gegenüber dem Wasserbad unterscheidet, wo eine starke Ortsabhängigkeit besteht, ist bei den hier beschriebenen Messungen besonders wertvoll, weil Proben mit verschiedenen räumlichen Ausdehnungen untersucht wurden.

Die Dichte der Neutronen der zweiten Gruppe im Hohlraum muß bedingt sein durch die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Neutronen, welche die Kugel durchlaufen haben, von der Oberfläche wieder in das Innere zurückkommen, und durch die Größe der absorbierenden Oberfläche der eingebrachten Probe. Um den zweiten Einfluß, der für die Messungen von Bedeutung ist, kennenzulernen, wurden folgende Rechnung und Messung gemacht. Für die Kugeloberfläche  $4\pi R^2$  kann man so rechnen, als ob der Teil  $a \cdot 4\pi R^2$  vollständig reflektiert und der Teil  $(1 - a) \cdot 4\pi R^2 = F$  vollständig absorbiert. Die Anzahl der in 1 Sekunde verschwindenden Neutronen ist proportional dem Produkt aus der Neutronendichte und der absorbierenden Fläche. Daher werden die Neutronendichten ohne und mit Probe ( $c_0$  und  $c$ ) im umgekehrten Verhältnis zueinander stehen wie die entsprechenden Oberflächen  $F + F_1$  und  $F + F_1 + f$ , wenn  $F_1$  den Einfang-

1) H. Sueß, Die Naturwiss. 27, 702, 1939.

querschnitt der Neutronenquelle und anderer im Inneren befindlicher Apparateile, und  $f$  den Einfangquerschnitt der Probe bedeuten, also  $\frac{c_0}{c} = \frac{(F + F_1 + f)}{(F + F_1)}$ . Diese Beziehung gilt nur unter der Voraussetzung, daß die Diffusion aus der Oberfläche noch nicht wesentlich gestört wird, d. h. so lange die Probe die Neutronendichte nur wenig verkleinert. Um die Fläche  $F + F_1$  zu bestimmen, wurde mit einem Jodindikator die Dichte  $c$  nach Einbringen eines Stückes Cadmium mit einem Einfangquerschnitt von  $86 \text{ cm}^2$  (geometrische Oberfläche des Stückes) und die Dichte  $c_0$  nach Entfernen des Cadmiums gemessen. Es ergab sich  $c_0/c = 1,93$ . Daraus folgt: 1. Die später benutzten Proben (gleichzeitig Indikatoren) mit weniger als  $1 \text{ cm}^2$  Einfangquerschnitt verkleinern die Neutronendichte nur ganz unwesentlich. 2.  $F + F_1 = 260 \text{ cm}^2$ . Damit wird, wenn man  $F_1$  als klein gegen  $F$  vernachlässigt, die Albedo 0,63. Dieser niedrige Wert (nach Fermi 0,82) wird durch die ungenügende Dicke der Paraffinschicht erklärt, die fast 20% der Neutronen unausgenutzt durchläßt. Ferner ist die Resonanzaktivierung des Jods nicht abgezogen.

Man kann in der Hohlkugel auch reine Einfangquerschnitte messen, getrennt von dem Streuquerschnitt, wenn man  $F + F_1$  kennt. Um kleine Querschnitte erfassen zu können, muß man  $F$  verkleinern. Durch einen kleineren Hohlraum läßt sich nichts erreichen, weil dabei auch die einfüllbare Substanzmenge verkleinert wird, wohl aber bei Verwendung von schwerem Wasserstoff zum Abbremsen der Neutronen.

### *Ergebnisse der Messungen.*

a) *Vergleich von  $\text{HJ}$  und  $\text{HJO}_3$  in Lösung.* Die beiden Kurven der Figur zeigen die Stärke der Aktivierung in Abhängigkeit vom Jodgehalt der Lösung. Ein Unterschied der beiden Lösungen ist nicht zu erkennen, so daß also der Aktivierungsquerschnitt der Ionen  $\text{J}^-$  und  $\text{JO}_3^-$  innerhalb der Meßgenauigkeit von  $\sim 3\%$  gleich groß ist.

b)  *$\text{HJO}_3$  gelöst und fest.* Bei dieser Versuchsreihe sollte festgestellt werden, ob ein Unterschied in der Aktivierbarkeit zwischen trockenem, zerriebenem  $\text{HJO}_3$  und in Wasser gelöstem  $\text{HJO}_3$  ( $\text{JO}_3^-$ -Ionen) besteht. Die Messungen wurden jedesmal mit  $2,00 \text{ g}$   $\text{HJO}_3$  ausgeführt, die entweder als trockene Substanz den Neutronen ausgesetzt und vor der Zählung in  $2 \text{ cm}^3$  Wasser gelöst wurden, oder schon vor dem Versuch in  $2 \text{ cm}^3$  Wasser gelöst, dann aktiviert und gezählt wurden. Dabei zeigte sich zunächst, wenn die Lösung in einem kugeligen Gefäß (Durchmesser  $1,6 \text{ cm}$ ) bestrahlt wurde, daß die Aktivität um  $\sim 440$  Teilchen auf  $3400$  größer war als bei

der trockenen Substanz. Der Unterschied wurde durch die in der Lösung selbst abgebremsten Neutronen hervorgerufen. Er ergab sich nämlich ebenso groß nach Abschirmung der thermischen Neutronen durch Cadmium, ferner war er von der Form des Gefäßes abhängig und *verschwand*, wenn in einem U-förmigen Gefäß aktiviert wurde, wo die Schichtdicke der Lösung klein genug war (lichte Weite der Schenkel 4,5 mm). Die Schichtdicke des Jods war für die Neutronen noch als unendlich dünn anzusehen.

Als Ergebnis der Messungen ist festzustellen, daß der Aktivierungsquerschnitt des Jods im festen und gelösten  $\text{HJO}_3$  mit einer Fehlergrenze

von  $\sim 2\%$  (aus der Anzahl der gezählten Teilchen berechnet) gleich groß ist.

c) *Festes J und  $\text{J}^-$ .* Die Messungen gingen genau so vor sich wie unter b). Jedermal wurden 0,400 g Jod in kleinen Kristallen benutzt und vor bzw. nach der Aktivierung in 2 cm<sup>3</sup> einer Natriumthiosulfatlösung gelöst (40 g krist.  $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$  in Wasser zu 100 cm<sup>3</sup> gelöst). Die Abhängigkeit von der Form des Gefäßes wurde hier nicht

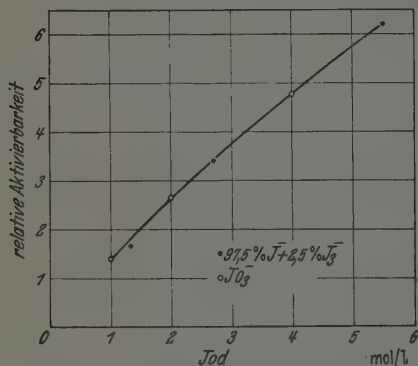


Fig. 1. Aktivierbarkeit des Jod in Abhängigkeit von der Konzentration der Lösung.

verfolgt, sondern nur mit dem U-Gefäß gearbeitet. Die Natriumthiosulfatlösung ließ sich nicht merklich aktivieren. Innerhalb der Meßgenauigkeit von  $\sim 2\%$  stimmten die Wirkungsquerschnitte von festem J und  $\text{J}^-$  überein.

Damit ist festgestellt, daß das Jod in den Formen J (fest),  $\text{J}^-$ ,  $\text{JO}_3$  und  $\text{HJO}_3$  denselben Aktivierungsquerschnitt besitzt.

Für anregende Unterhaltungen danke ich Herrn Prof. Joh. Jensen und Herrn Dr. Sueß, der mir auch den Jodgehalt der Lösungen bestimmt hat.

Hamburg, den 14. Dezember 1941, Institut für physikalische Chemie der Hansischen Universität.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Telefunken-Gesellschaft, Berlin.)

## Längsschwingungen rechteckiger Quarzplatten.

Von R. Bechmann.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 14. September 1942.)

In Fortsetzung der Untersuchungen über Längsschwingungen von Quarzplatten verschiedener Orientierung werden die Eigenschwingungen bei einem Übergang von der quadratischen Form zum schmalen Stab auf Grund der früher gegebenen Lösung numerisch und experimentell verfolgt. Unter Berücksichtigung einer bereits früher empirisch eingeführten Korrektur für die Eigenfrequenz der Scherungsschwingung erhält man für die beiden longitudinalen Freiheitsgrade eine sehr befriedigende Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung. Der Verlauf der Eigenfrequenzen der Scherungsschwingung in Abhängigkeit von der Plattenform wird durch den Einfluß einer Biegungsschwingung gegenüber dem berechneten völlig verändert, eine Erscheinung, die auch bei einer senkrecht zur optischen Achse geschnittenen Platte, die sich wie eine isotrope Platte verhält, auftritt. Weiter wird auf einige spezielle bei Quarzkristallen auftretende Erscheinungen hingewiesen. Bei Quarz kann der Querkontraktionskoeffizient positive und negative Werte einschließlich des Wertes Null annehmen, wobei in diesem Fall eine Kopplung der beiden longitudinalen Freiheitsgrade fortfällt. Für eine spezielle Richtung wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen nahezu unabhängig von den Dimensionen des Körpers, so daß der Unterschied zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Welle im unendlich ausgedehnten Medium und derjenigen im unendlich dünnen Stab nahezu verschwindet.

Aus einer früheren allgemeinen Untersuchung über die elastischen Eigenschwingungen eines anisotropen Körpers von parallelepipedischer Form<sup>1)</sup> ergibt sich als Grenzfall für eine verschwindende Dimension die Lösung der Längsschwingungen unendlich dünner rechteckiger Platten. Wir haben zunächst das Gültigkeitsbereich dieser Lösung für quadratische Quarzplatten<sup>2)</sup>, die in verschiedenen Richtungen gegen die natürlichen Achsen des Kristalls geschnitten waren, untersucht und bei den longitudinalen Schwingungen eine befriedigende Übereinstimmung zwischen der

<sup>1)</sup> R. Bechmann, ZS. f. Phys. **117**, 180, 1941 (im Text mit I bezeichnet). —

<sup>2)</sup> R. Bechmann, ebenda **118**, 515, 1942 (im Text mit II bezeichnet).

Lösung der sich ergebenden Frequenzgleichung und den Meßergebnissen gefunden; bei den Scherungsschwingungen war eine Übereinstimmung zwischen der Lösung der Frequenzgleichung und den beobachteten Verhältnissen durch eine von der Orientierung der Platte unabhängige Korrektur zu erzielen. Wir erweitern im folgenden die Untersuchungen auf rechteckige Platten, um auch für diese die Gültigkeit der Lösung der früher gegebenen Frequenzgleichung zu ermitteln. Für Platten des Schnittes  $X_{90^\circ, \psi}$  mit den Winkeln  $\psi = 71^\circ 33', 90^\circ$  und  $108^\circ$  hat Mason<sup>1)</sup> experimentell den Verlauf der drei Eigenschwingungen in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge untersucht.

Die früher angegebene Frequenzgleichung für die Längsschwingungen dünner Platten, deren Normale mit der  $Z'$ -Achse eines beliebig orientierten Koordinatensystems  $X', Y', Z'$  zusammenfällt, lautet nach (II, 5)

$$\begin{vmatrix} s'_{11} - \frac{k_1^2}{\rho \omega^2} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{12} & s'_{22} - \frac{k_2^2}{\rho \omega^2} & s'_{26} \\ s'_{16} & s'_{26} & s'_{66} - \frac{k_1^2 + k_2^2}{\rho \omega^2} \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

wobei  $s'_{ik}$  die Elastizitätskoeffizienten für eine beliebige Wahl des Koordinatensystems gegenüber den Hauptachsen des Kristalls,  $\omega = 2\pi\nu$  die Kreisfrequenz,  $\rho$  die Dichte,  $k_1 = \frac{n_1 \pi}{l_{x'}}$ ,  $k_2 = \frac{n_2 \pi}{l_{y'}}$  bedeuten. Bei der Betrachtung von dünnen, rechteckigen Platten und Stäben liege die Längsachse in der  $Y'$ -Richtung, die Breite falle mit der  $X'$ -Richtung zusammen, die Dicke in Richtung  $Z'$  sei klein gegenüber der Längsausdehnung der Platte. Bei dem Übergang zu schmalen Platten bzw. dünnen Stäben halten wir auch die Dicke klein gegen die Breite. Wir betrachten im folgenden die Grundschwingungen der Platten, für die  $n_1 = n_2 = 1$  ist, die Plattenlängen seien konstant gehalten, während wir die Breiten  $l_{x'}$  verändern. Ferner führen wir für das veränderliche Kantenverhältnis  $\frac{l_{x'}}{l_{y'}} = \frac{k_2}{k_1} = \alpha$  ein und setzen  $k_2 = k$ ,  $k_1 = k/\alpha$ . Die Frequenzgleichung (1) geht unter Berücksichtigung

<sup>1)</sup> W. P. Mason, Bell Syst. Techn. Journ. 13, 405, 1934.



sichtigung des früher eingeführten Korrektionsfaktors  $a^2$  in dem Diagonalglied rechts unten über in

$$\begin{vmatrix} s'_{11} - \frac{k^2}{\varrho \omega^2} \frac{1}{\alpha^2} & s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{12} & s'_{22} - \frac{k^2}{\varrho \omega^2} & s'_{26} \\ s'_{16} & s'_{26} & s'_{66} - \frac{k^2 a^2}{\varrho \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Bezüglich der Darstellung der Transformationen der Elastizitätskoeffizienten und der Bezeichnung der Platten verweisen wir auf die frühere Darstellung II.

Wir lösen Gleichung (2) nach dem Schwingungskoeffizienten  $N = \nu l_{y'}$ , wobei  $\nu$  die jeweilige Eigenfrequenz ist, auf. Wir beziehen dabei die drei Schwingungskoeffizienten auf die Längsachse  $l_{y'}$ . Die Schwingungskoeffizienten sind nunmehr Funktionen des Kantenverhältnisses  $\alpha$ . Für  $\alpha = 1$  geht Gleichung (2) in die früher betrachtete Ausgangsgleichung für quadratische Platten (II, 6) über. Für den Grenzfall des unendlich dünnen Stabes  $\alpha = 0$  ergibt sich als Lösung von Gl. (2)

$$s'_{22} = \frac{k^2}{\varrho \omega^2}, \quad \text{d. h.} \quad N_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\varrho s'_{22}}}. \quad (3)$$

Der resultierende Spannungszustand setzt sich aus den drei Spannungskomponenten  $X'_{x'}$ ,  $Y'_{y'}$ ,  $X'_{y'}$ , der resultierende Deformationszustand aus den Deformationskomponenten  $x'_{x'}$ ,  $y'_{y'}$ ,  $x'_{y'}$  zusammen. Nach den früheren Betrachtungen (I) liefert das Verhältnis der Minoren von Gl. (2)

$$\Delta_1 : \Delta_2 : \Delta_3 = \begin{vmatrix} s'_{12} & s'_{16} \\ s'_{16} & s'_{66} - \frac{k^2 a^2}{\varrho \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s'_{16} & s'_{11} - \frac{k^2}{\varrho \omega^2} \frac{1}{\alpha^2} \\ s'_{66} - \frac{k^2 a^2}{\varrho \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) & s'_{12} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} s'_{11} - \frac{k^2}{\varrho \omega^2} \frac{1}{\alpha^2} & s'_{12} \\ s'_{16} & s'_{26} \end{vmatrix} \quad (4)$$

das Verhältnis der Größen der Spannungskomponenten  $X'_{x'}$ ,  $Y'_{y'}$ ,  $X'_{y'}$ . Bezogen auf die Dehnung  $Y'_{y'}$ , in der  $Y'$ -Richtung ergibt sich

$$\frac{X'_{x'}}{Y'_{y'}} = \frac{\Delta_1}{\Delta_2}, \quad \frac{X'_{y'}}{Y'_{y'}} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}. \quad (5)$$

Das Verhältnis der Größen der Deformationskomponenten  $x'_{x'}$ ,  $y'_{y'}$ ,  $x'_{y'}$  ist nach Gleichung (I, 22) gegeben durch

$$x'_{x'} : y'_{y'} : x'_{y'} = \frac{k^2}{\varrho \omega^2} \frac{1}{\alpha^2} \Delta_1 : \frac{k^2}{\varrho \omega^2} \Delta_2 : \frac{k^2 \alpha^2}{\varrho \omega^2} \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \Delta_3, \quad (6)$$

bezogen auf die longitudinale Bewegung  $y'_{y'}$ , in der  $Y'$ -Richtung erhält man

$$x'_{x'} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y'_{y'}, \quad x'_{y'} = \alpha^2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y'_{y'}. \quad (7)$$

Für den Grenzfall des unendlich dünnen Stabes, für  $\alpha = 0$ , werden, wie eine einfache Rechnung zeigt, die Ausdrücke (5) für die Verhältnisse der Spannungskomponenten Null. Die Lösung von Gl. (2) zeigt, daß in Übereinstimmung mit dem Kirchhoffschen<sup>1)</sup> Ansatz bei den freien longitudinalen Schwingungen des unendlich dünnen Stabes nur die Spannungskomponente  $Y'_{y'}$  von Null verschieden ist, die anderen Spannungskomponenten verschwinden an den Oberflächen und im Innern des Stabes. Die Verhältnisse der Deformationskomponenten für den unendlich dünnen Stab ergeben sich aus Gl. (7) für  $\alpha = 0$ , und zwar liefert eine kurze Rechnung

$$x'_{x'} = \frac{s'_{21}}{s'_{22}} y'_{y'}, \quad x'_{y'} = \frac{s'_{26}}{s'_{22}} y'_{y'}. \quad (8)$$

Die vorstehenden Betrachtungen sind insofern zu ergänzen, als wir anstatt von der allgemeinen Gleichung (I, 15) für das Parallelepipet, einer sechserhigen Determinante, von der Gl. (2), bei der bereits eine Dimension als unendlich klein angenommen wurde, ausgegangen sind. Eine analoge Behandlung der allgemeinen Gleichung für das Parallelepipet zeigt, daß bei dem unendlich dünnen Stab auch  $Z'_{z'}$ ,  $Y'_{z'}$ ,  $Z'_{x'}$  verschwinden, ferner wird

$$z'_{z'} = \frac{s'_{23}}{s'_{22}} y'_{y'}, \quad y'_{z'} = \frac{s'_{24}}{s'_{22}} y'_{y'}, \quad z'_{x'} = \frac{s'_{25}}{s'_{22}} y'_{y'}. \quad (8a)$$

Die Gleichungen (8) und (8a) besagen, daß im Schwingungszustand dieselben Verhältnisse, wie sie Voigt<sup>2)</sup> für die gleichförmige Längsdehnung eines kristallinen Zylinders abgeleitet hat, auftreten. Die Querschnitte und damit die Knotenlinien nehmen bei den longitudinalen Schwingungen

<sup>1)</sup> G. Kirchhoff, Ges. Abh., S. 285. Leipzig 1882. — <sup>2)</sup> W. Voigt, Lehrb. d. Kristallphys., S. 631. Leipzig 1928.

kristalliner Körper eine schiefe Lage an. Mit dem Verschwinden von  $s'_{24}$   $s'_{25}$   $s'_{26}$  bleiben Querschnitte, die ursprünglich normal zur Y-Achse lagen, sowohl bei der gleichförmigen Dehnung als auch im Schwingungszustand normal.

Wir betrachten nun einige spezielle Quarzplatten und lösen für diese die Gl. (2) numerisch auf, und zwar wenden wir uns zunächst Platten des

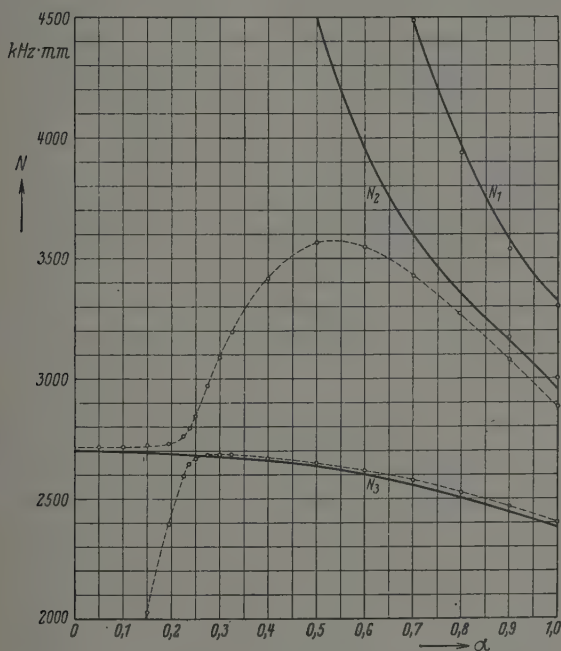


Fig. 1. Schwingungskoeffizienten der Quarzplatte  $X_{90^\circ;90^\circ}$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge.

Schnittes  $X_{90^\circ\psi}$  zu, bei denen die  $Z'$ -Achse mit der natürlichen X-Achse des Quarzkristalles zusammenfällt. Als ersten Fall berechnen wir die Eigenfrequenzen der Platte  $X_{90^\circ,90^\circ}$ . Bei dieser fällt die  $X'$ -Achse mit der Z-Achse, die  $Y'$ -Achse mit der Y-Achse des Kristallsystems zusammen. Für diese Platten ist in Gl. (2) nach (II, 18) zu setzen

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} = s_{33} &= 9,882 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, & s'_{12} = s_{13} &= -1,530 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\ s'_{22} = s_{11} &= 12,948, & s'_{16} &= 0, \\ s'_{66} = s_{44} &= 20,041, & s'_{26} = s_{14} &= -4,811. \end{aligned} \right\} (9)$$

Die drei mit diesen Koeffizienten sich ergebenden Wurzeln von Gl. (2) als Funktion von  $\alpha$  sind in Fig. 1 dargestellt (ausgezogene Kurven). Bei diesem und den folgenden Beispielen ist für die Korrektur in Gl. (2) nach (II) der Wert  $a = 0,877$  zugrunde gelegt. Die Wurzel  $N_3$  entspricht der vorwiegend durch die Länge  $l_y$ , bestimmten longitudinalen Schwingung  $y'_y$ , die Wurzel  $N_2$  entspricht der Scherungsbewegung  $x'_y$ , während  $N_1$  im wesentlichen die durch die kürzere Kante bestimmte longitudinale Schwingung  $x'_x$  darstellt. Die drei Schwingungen lassen sich durch ein Feld parallel zur  $Z'$ -Achse, die in diesem Fall mit der natürlichen X-Achse des Kristallsystems zusammenfällt, anregen. Die Meßwerte sind durch die Punkte angedeutet. Der berechnete und gemessene Verlauf stimmt für  $N_3$  außer in dem Bereich von  $\alpha = 0,20$  bis  $0,25$  gut überein. Die Übereinstimmung für  $N_1$  ist ebenfalls gut, für kleine Werte von  $\alpha$  sind sie in Fig. 1 nicht mehr enthalten. Um zu einer übersichtlichen Darstellung zu gelangen, bezieht man den Schwingungskoeffizienten zweckmäßig auf die Länge der schmalen Kante. Den Verlauf haben wir in Fig. 1 jedoch nicht eingetragen. Auf die Kopplungserscheinungen zwischen der Scherungsschwingung und der zweiten Harmonischen der Biegungsschwingung, die den von  $N_2$  völlig abweichenden Verlauf

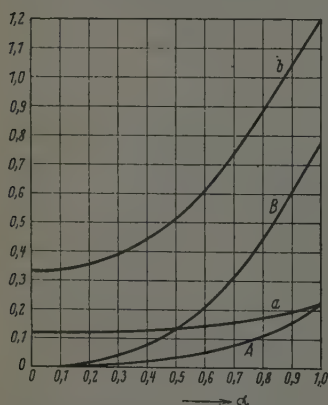


Fig. 2. Amplituden der Deformationen und Spannungen der Platte  $X_{90^\circ, 90^\circ}$ , bezogen auf die Schwingung  $N_3$ , in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Länge.

hervorrufen, hat Mason<sup>1)</sup> hingewiesen. Für  $\alpha = 1,0$  bis  $0,85$  tritt eine vierte Schwingung auf, die in den Zug des berechneten Verlaufes von  $N_2$  fällt, deren Intensität mit einer Verringerung von  $\alpha$  abnimmt und etwa unterhalb  $\alpha = 0,8$  verschwindet. Die Bewegung der Schwingung  $N_3$  setzt sich aus den drei Bestandteilen  $x'_x$ ,  $y'_y$ ,  $x'_y$  zusammen; die aus Gl. (7) berechneten Verhältnisse der Amplituden der Deformationen  $x'_x/y'_y$ , bzw.  $x'_y/y'_y$ , sind in Fig. 2 dargestellt und mit  $a$  bzw.  $b$  bezeichnet. Die aus Gl. (5) folgenden Verhältnisse der entsprechenden Spannungskomponenten sind in Fig. 2 mit  $A$  und  $B$  bezeichnet.

Man erkennt, daß für die quadratische Platte  $\alpha = 1$  der Scherungsanteil  $x'_y$  zur Gesamtbewegung größer als der Anteil der longitudinalen Schwingungen  $y'_y$  ist (Kurve  $b$ ). Die in dem Bereich von  $\alpha = 0,20$  bis  $0,25$  auftretende Störung beruht nach Mason<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> W. P. Mason, Bell Syst. Techn. Journ. 13, 405, 1934.

auf der Kopplung zwischen der zweiten Harmonischen und der Biegungsschwingung mit dem Scherungsschwingungsanteil von  $N_3$ , der nach Fig. 2,

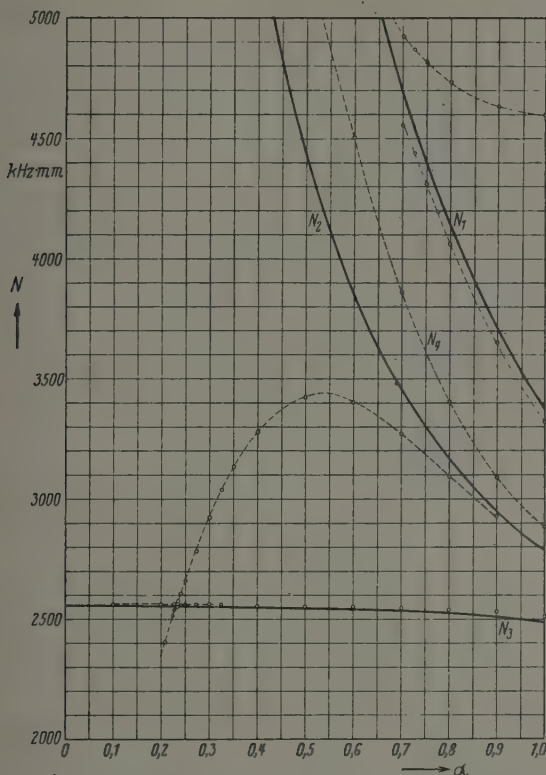


Fig. 3. Schwingungskoeffizienten der Quarzplatte  $X_{90^\circ, 71^\circ 33'}$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge.

Kurve b in diesem Bereich noch etwa 0,36 des Anteils der longitudinalen Bewegung  $y'_w$  beträgt.

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Platte  $X_{90^\circ, 71^\circ 33'}$ . Die Elastizitätskoeffizienten nehmen für den Winkel  $\psi = 71^\circ 33'$  die Werte

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} &= 9,403 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, & s'_{12} &= -2,038 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\ s'_{22} &= 14,443, & s'_{16} &= -1,606, \\ s'_{66} &= 18,010, & s'_{26} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

an. Der Elastizitätskoeffizient  $s'_{22}$  besitzt für diesen Winkel ein Maximum. Der Koeffizient  $s'_{26}$ , der die Wechselwirkung zwischen longitudinaler und



Scherungsbewegung vermittelt, wird Null. Damit kommt eine unmittelbare Kopplung zwischen der longitudinalen Bewegung  $y'_y$ , mit der Scherungsbewegung  $x'_y$ , in Fortfall. Die Kopplung zwischen den beiden longitudinalen Bewegungen  $y'_y$  und  $x'_x$ , ist wegen des etwas größeren Wertes von  $s'_{12}$  fester als bei  $\psi = 90^\circ$ ; wie aus Gl. (2) ersichtlich ist, liefert die Scherungsbewegung  $x'_y$ , über die longitudinale Bewegung  $x'_x$ , einen Beitrag zur longitudinalen Bewegung  $y'_y$ . Die piezoelektrische Anregung erfolgt ebenfalls durch ein Feld  $E_z$ , d. h.  $E_x$ . Der berechnete und gemessene Verlauf für die Schwingungskoeffizienten ist in Fig. 3 dargestellt.  $N_3$  stellt wieder die im wesentlichen durch die Stablänge bedingte longitudinale Schwingung dar,  $N_2$  die Scherungsschwingung und  $N_1$  die von der Breite abhängige longitudinale

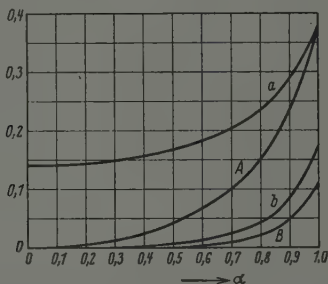


Fig. 4. Amplituden der Deformationen und Spannungen der Platte  $X_{900, 710 33'}$ , bezogen auf die Schwingung  $N_3$ , in Abhängigkeit vom Verhältnis Breite zu Länge.

Schwingung. Die entsprechenden Amplitudenverhältnisse der Deformations- bzw. Spannungskomponenten, bezogen auf die Bewegung in der Stabachse sind in Fig. 4 dargestellt. Der Beitrag der Scherungsbewegung (Fig. 4, Kurve b) zur Gesamtbewegung ist sehr klein. Insbesondere bei dem Kantenverhältnis  $= 0,235$ , bei dem der Frequenzverlauf der zweiten Harmonischen der Biegungsschwingung sich mit demjenigen von  $N_3$  schneidet, ist der Scherungsanteil nur noch etwa 0,1 % der Gesamtbewegung, so daß nur eine geringe Beeinflussung von  $N_3$  durch die Biegungsschwingung erfolgt. Die Biegungsschwingung ist unterhalb  $\alpha = 0,2$  bei der verwendeten Anregung nicht feststellbar. Sie setzt bei diesem Winkel mit sehr kleiner Amplitude ein, bei  $\alpha = 0,2$  bis zu  $\alpha = 0,235$  wächst die Amplitude und nimmt wieder ab und verschwindet bei  $\alpha = 0,3$  nahezu. Oberhalb  $\alpha = 0,35$ , je mehr sich die Kurve dem ungestörten Verlauf von  $N_2$  nähert, wird diese Schwingung kräftiger. Bei dem Verlauf von  $N_1$  tritt bei Werten von  $\alpha$  oberhalb 0,7 ebenfalls eine Störung auf, die darauf beruht, daß der Scherungs-

anteil von  $N_3$  mit der Biegungsschwingung zu einer Kopplung Anlaß gibt. Außerdem tritt noch eine vierte Schwingung auf, die ebenfalls in Fig. 3 eingetragen ist und die mit  $N_4$  bezeichnet ist, deren Entstehung noch unbekannt ist.

Bei der Platte  $X_{90^\circ, 131^\circ 44'}$  mit dem Winkel  $\psi = 131^\circ 44'$  lauten die Werte der Elastizitätskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} &= 11,695 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, & s'_{12} &= 0,157 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\ s'_{22} &= 7,761, & s'_{16} &= -3,532, \\ s'_{66} &= 26,790, & s'_{26} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Der Elastizitätskoeffizient  $s'_{22}$  besitzt ein Minimum. Der Koeffizient  $s'_{26}$  ist wieder Null,  $s'_{12}$  ist sehr klein, so daß der Einfluß der von der Breite abhängigen longitudinalen Bewegung  $x'_x$  und der durch diese vermittelte Einfluß der Scherungsbewegung  $y'_y$  äußerst gering wird. Der berechnete und gemessene Verlauf ist in Fig. 5 dargestellt. Die Lösung von Gl. (2) besteht in diesem Fall aus drei getrennten Ästen. Die Werte des horizontal verlaufenden, die longitudinale Bewegung  $y'_y$  darstellenden Zuges sind nahezu konstant, in Übereinstimmung mit dem berechneten Verlauf, gemäß dem der Einfluß der beiden anderen Bewegungen nur gering ist. Die beiden Austauschstellen zeigen den Verlauf gekoppelter Schwingungen, und zwar tritt bei dem Durchlauf der Gleichstimmung beider Frequenzen der charakteristische Amplitudenaustausch auf. Auch hierbei ist der Einfluß der Biegungsschwingung zu erkennen, der den Verlauf an der linken Austauschstelle verschiebt. Der Schnittpunkt zwischen  $N_3$  und der zweiten Harmonischen der Biegungsschwingung liegt bei  $\alpha = 0,33$ . Das Amplitudenverhältnis des Scherungsschwingungsanteils zu dem longitudinalen Anteil der Bewegung beträgt an dieser Stelle 0,22 %. Weiter tritt eine vierte mit  $N_4$  bezeichnete Schwingung auf.

Als weiteres Beispiel geben wir noch die Verhältnisse für die Platte  $Z_y$  an, die sich wie ein isotroper Körper verhält. Für diese ist in Gl. (2) unabhängig vom Winkel  $\psi$

$$\left. \begin{aligned} s'_{11} &= s'_{22} = s_{11} = 12,948 \cdot 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{dyn}, \\ s'_{12} &= s_{12} = -1,690, \\ s'_{66} &= s_{66} = 2(s_{11} - s_{12}) = 29,276, \\ s'_{16} &= s'_{26} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

zu setzen. Gl. (2) zerfällt in eine quadratische Gleichung, die die beiden longitudinalen Bewegungen  $x'_x, y'_y$  beschreibt und in eine lineare, die

Scherungsbewegung  $x'_y$ , darstellende Gleichung. Der berechnete Verlauf für diese Platte ist in Abhängigkeit von  $\alpha$  in Fig. 6 dargestellt. Die Schwingungen lassen sich durch ein parallel zur Plattenfläche verlaufendes elektrisches Feld anregen. Untersucht wurden zwei Platten mit den Winkeln  $\psi = 0^\circ$  und  $\psi = 25^\circ$ . Die gemessenen Werte sind in Fig. 6 eingetragen.

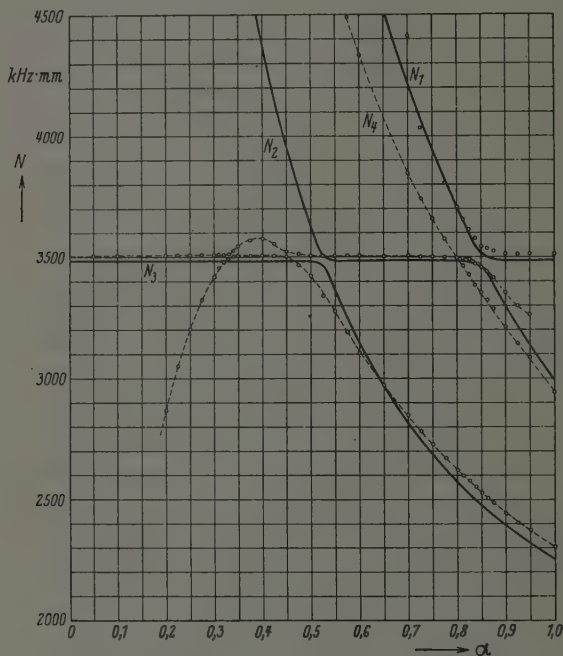


Fig. 5. Schwingungskoeffizienten der Quarzplatte  $X_{90^\circ, 131^\circ 44'}$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge.

Die an beiden Platten gewonnenen Ergebnisse stimmen innerhalb der Meßgenauigkeit überein. Sie sind unabhängig vom Winkel  $\psi$ . Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung für die longitudinalen Schwingungen  $N_1$  und  $N_3$  ist sehr befriedigend. Bei der Schwingung  $N_2$  tritt wieder die Kopplung mit der Biegungsschwingung auf. Außerdem tritt wieder eine vierte Schwingung auf, die mit  $N_4$  bezeichnet ist. Es ergibt sich, daß die beiden Bewegungen, Scherungsschwingung und Biegungsschwingung, miteinander in Wechselwirkung treten und nicht voneinander getrennt werden können. Dieses experimentelle Ergebnis läßt die vollständige Lösung erkennen, und zwar ist die Determinante (1) durch eine Zeile zu erweitern, deren viertes Diagonalglied einen Biegungsvorgang beschreibt, der mit dem

Scherungsglied koppelt, jedoch keine Wechselwirkung mit den beiden longitudinalen Bewegungen besitzt. Im allgemeinen Fall des Parallelepipedes ist die sechsreihige Determinante zu erweitern, wobei die Wechselwirkungskoeffizienten zwischen den Biegebewegungen und den longitudinalen Bewegungen Null sind. Indessen liegt die entsprechende Ableitung

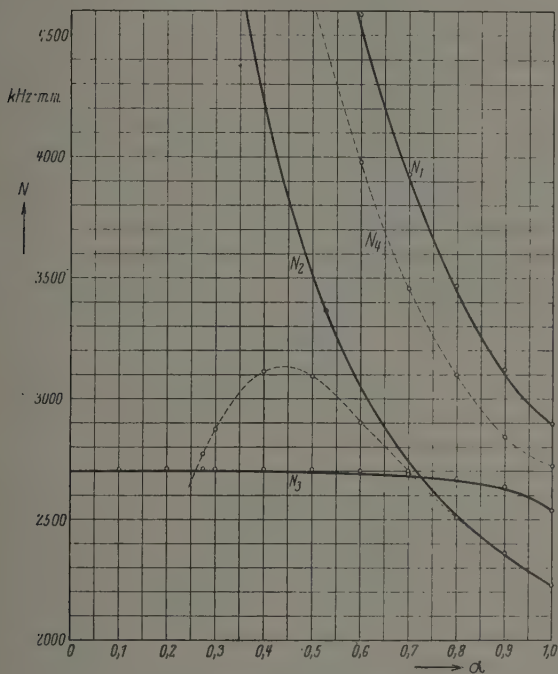


Fig. 6. Schwingungskoeffizienten der Quarzplatte  $Z_{\psi}$  in Abhängigkeit von dem Verhältnis Breite zu Länge.

und die Form der Koeffizienten noch nicht vor. Ähnliche Verhältnisse hinsichtlich der Scherungsbewegung wie bei der isotropen Platte treten bei den Platten  $Y_{9,00}$  auf, bei denen  $s'_{16}$  und  $s'_{26}$  verschwinden.

Es sei noch auf einige Erscheinungen, die bei Quarzkristallen auftreten, hingewiesen. Der Koeffizient  $s'_{12}$ , der die Wechselwirkung zwischen den beiden longitudinalen Bewegungen  $x'_x$  und  $y'_y$  bestimmt, hat bei isotropem Material stets ein negatives Vorzeichen. Dies besagt, daß bei einer Dilatation in einer Richtung eine Kontraktion in der dazu senkrechten Richtung erfolgt und umgekehrt. Der Wert von  $s'_{12}$  nimmt bei Quarzkristall in Abhängigkeit von der Orientierung sowohl negative wie positive Werte

einschließlich des Wertes Null an. So treten beispielsweise Nullstellen von  $s'_{12}$  für Platten  $X_{90^\circ \psi}$  nach (II, 18) bei  $\psi = 18^\circ, 44^\circ 5', 108^\circ$  und  $134^\circ 5'$  auf, zwischen  $18^\circ$  und  $44^\circ 5'$  ebenso zwischen  $108^\circ$  und  $134^\circ 5'$  ist  $s'_{12}$  positiv, für Platten  $Y_{\vartheta, 0^\circ}$  treten nach (II, 12) Nullstellen für  $s'_{12}$  bei  $\vartheta = 25^\circ 12'$  und  $66^\circ 55'$  auf, zwischen diesen beiden Winkeln ist  $s'_{12}$  positiv. Ganz allgemein läßt sich eine räumliche Kurve  $s'_{12} = 0$  als Funktion der Orientierungswinkel aufsuchen. Die Längsschwingungen der Platte  $X_{90^\circ, 108^\circ}$ , für die  $s'_{12}$  Null ist, hat Mason<sup>1)</sup> untersucht. Bei gleichförmiger Längsdehnung erhält man bei positiven Werten von  $s'_{12}$  eine Querdilatation. Im Falle der betrachteten Längsschwingungen sind die beiden durch  $s'_{12}$  miteinander gekoppelten Dilatationen  $x'_x$  und  $y'_y$ , bei negativen Werten von  $s'_{12}$  gegenphasig, bei positiven Werten gleichphasig. Bei Platten des Schnittes  $Y_{\vartheta, 0^\circ}$ , für die  $s'_{16}$  und  $s'_{26}$  Null sind, ergeben sich für  $s'_{12} = 0$  longitudinale Schwingungen, deren Eigenfrequenzen nur von einer Dimension abhängig sind. Die Gleichung (1) reduziert sich hierbei auf ihre Diagonalglieder. Der Schwingungskoeffizient der von der Länge abhängigen longitudinalen Schwingungen ist unabhängig von  $\alpha$ . Nicht gleichzeitig mit  $s'_{12}$  verschwinden die Koeffizienten  $s'_{13}$  und  $s'_{23}$ , die eine Querkontraktion in Richtung der Plattendicke hervorrufen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_0$  in dünnen Stäben, die gleich dem doppelten Betrag des aus Gl. (3) folgenden Wertes für  $N_0$  ist<sup>2)</sup>, unterscheidet sich von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_\infty$  longitudinaler ebener Wellen im unendlich ausgedehnten Medium. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v_\infty$  ist wiederum gleich dem doppelten Betrag des die Dickenschwingungen unendlich großer Platten bestimmenden Schwingungskoeffizienten  $N_\infty$ . Der Unterschied zwischen diesen beiden Größen ist im isotropen Medium durch den Querkontraktionskoeffizienten  $\mu$  bedingt, und zwar gilt bekanntlich

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{N_\infty}{N_0} = \sqrt{\frac{1 - \mu}{1 - \mu - 2\mu^2}}, \quad (13)$$

wobei dieser Ausdruck stets größer als 1 ist. Der entsprechende Ausdruck für anisotrope Körper ist wegen der Vielzahl der Elastizitätskoeffizienten und deren Veränderlichkeit mit der Richtung verwickelter und von der Richtung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängig. Bemerkenswert ist,

<sup>1)</sup> W. P. Mason, Bell Syst. Techn. Journ. 13, 405, 1934. — <sup>2)</sup> Legt man für die Dimension von  $v$   $m \text{ sec}^{-1}$  für  $N$   $\text{kHz} \cdot \text{mm}$  zugrunde, so ist diese Beziehung auch numerisch erfüllt.

daß beim Quarzkristall die beiden Werte  $v_0$  und  $v_\infty$  bzw.  $N_0$  und  $N_\infty$  nahezu gleich groß werden können, d. h. daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unabhängig von der Form des Körpers oder bei gegebener Form unabhängig von der Frequenz wird. In Fig. 7 sind für den unendlich dünnen longitudinal schwingenden Stab  $X_{90^\circ, \psi}$  die aus Gl. (3) folgenden Werte von  $N_0$  als Funktion von  $\psi$  aufgetragen, weiter enthält Fig. 7 die Schwingungskoeffizienten  $N_\infty$  der longitudinalen Dickenschwingung unendlich großer Quarzplatten, deren Normale mit der Stabrichtung zusammenfällt. Es sind dies

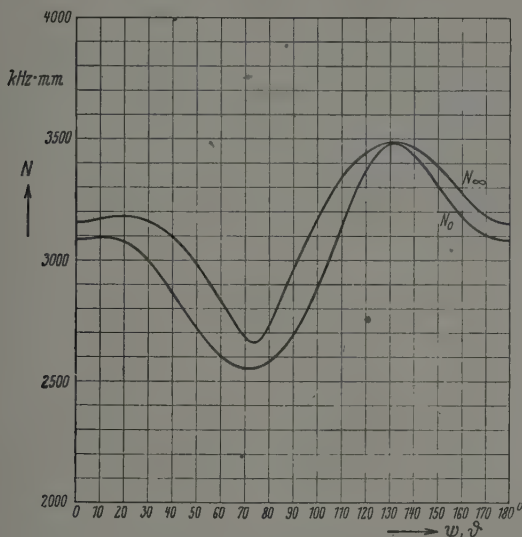


Fig. 7. Schwingungskoeffizienten der longitudinalen Längsschwingung des dünnen Stabes  $X_{90^\circ, \psi}$  und der longitudinalen Dickenschwingung der großen Platte  $Y_\vartheta$ .

die Platten  $Y_\vartheta$ , wobei die Winkel  $\psi$  und  $\vartheta$  übereinstimmen. Bei dem Winkel  $\psi = \vartheta = 131^\circ 44'$  fallen die Werte für die beiden Schwingungskoeffizienten nahezu zusammen. Für den dünnen Stab ergibt sich mit den zugrunde gelegten Elastizitätskoeffizienten der Wert  $3483,87 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ , für die longitudinale Dickenschwingung der unendlich großen Platte  $3490,70 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ . Der Unterschied zwischen den beiden berechneten Werten beträgt  $1,95 \cdot 10^{-3}$ . Der Meßwert für den unendlich dünnen Stab beträgt  $3505 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ . Er liegt um  $6 \cdot 10^{-3}$  dem berechneten Wert gegenüber höher. Für die quadratische Platte  $X_{90^\circ, 131^\circ 44'}$  ergibt sich als Rechenwert  $3485,66 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ , der beobachtete Wert ist  $3511 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ , d. h. die Eigenfrequenz der longitudinalen Schwingung ändert sich,



abgesehen von den zwei schmalen aus Fig. 5 ersichtlichen gestörten Bereichen beim Übergang von der quadratischen Platte zum schmalen Stab gemäß der Rechnung nur um  $5 \cdot 10^{-4}$ , die beobachtete Änderung beträgt  $1,7 \cdot 10^{-3}$ . Beim Übergang vom Stab mit der betrachteten Orientierung zu einer parallel zur X-Achse liegenden Platte bleibt der Schwingungskoeffizient ebenfalls nahezu konstant. Für die quadratische Platte dieser Orientierung lautet der berechnete Wert  $3495,62 \text{ kHz} \cdot \text{mm}$ , d. h. die Änderung gegenüber dem unendlich dünnen Stab beträgt  $3,9 \cdot 10^{-3}$ .

Herrn Ing. H. Goering, der die numerischen Rechnungen, Herrn Dipl.-Ing. F. Krones, der die meßtechnische Auswertung durchgeführt hat, möchte ich hiermit meinen Dank aussprechen.

## Quantentheorie der Strahlungsdämpfung \*).

Von E. Gora in Hamburg.

(Eingegangen am 31. Juli 1942.)

Das in der Quantentheorie der Strahlung gewöhnlich verwendete Näherungsverfahren wird unter Beibehaltung der sonst üblichen Voraussetzungen durch eine exakte Formulierung der Methode ersetzt. Dies ermöglicht den korrespondenzmäßigen Anschluß an die klassische Theorie mit Strahlungsdämpfung. Die Berechnung des der klassischen Strahlungsdämpfung entsprechenden Effekts im eigentlichen Anwendungsbereich der Quantentheorie, d. h. bei großen Impulsänderungen der Teilchen, wird für Streuung von Licht an geladenen, spinlosen Teilchen durchgeführt. Es ergibt sich dabei auch für höchste Energien keine merkliche Beeinflussung der Streuwahrscheinlichkeit durch die Strahlungsdämpfung, die vor allem für große Streuwinkel viel kleiner wird, als man auf Grund der klassischen Formel erwarten könnte. — Eine Abschätzung des Einflusses der Strahlungsdämpfung auf Compton-Streuung und Bremsstrahlung vektorieller Teilchen läßt für extrem relativistische Energien eine beträchtliche Herabsetzung der Wirkungsquerschnitte gegenüber den nach dem üblichen Verfahren berechneten erwarten. — Schließlich wird für Streuung von Mesonen an Kernteilchen gezeigt, daß die der elektromagnetischen Strahlungsdämpfung entsprechende Rückwirkung des Mesonenfeldes schon bei gewöhnlichen relativistischen Energien der Mesonen eine beträchtliche Herabsetzung der Streuwahrscheinlichkeit bewirkt.

In der Quantentheorie der Strahlung wird gewöhnlich ein Störungsverfahren verwendet, das in der Theorie des Mesons in einigen Fällen mit zunehmender Energie unbegrenzt anwachsende Wirkungsquerschnitte ergibt. Ein derartiges Resultat ist unvereinbar mit den Eigenschaften der durchdringenden Komponente der Höhenstrahlung. Nach Landau<sup>1)</sup> entspricht es auch nicht der allgemeinen Quantenmechanik der Stoßprobleme, die ja für Streuung an punktförmigen Kraftzentren mit zunehmender Energie abnehmende Wirkungsquerschnitte erwarten läßt. Erhält man unbegrenzt anwachsende Wirkungsquerschnitte, so kann das nur auf ein Versagen der Näherungsmethode zurückzuführen sein. Landau hat gleichzeitig darauf hingewiesen, daß die bis dahin noch nicht gelungene Erfassung der Strahlungsdämpfung in der Quantenmechanik zur Beseitigung dieser Schwierigkeit führen könnte. Bei der Formulierung des üblichen Störungsverfahrens werden nämlich in den Ausgangsgleichungen alle diejenigen Glieder vernachlässigt, die eine Rückwirkung der durch die Störung angeregten Zustände auf die jeweiligen Ausgangszustände darstellen. In der

\* ) D 15.

<sup>1)</sup> L. Landau, Journ. of Phys. 2, 483, 1940.

klassischen Theorie bedeutet das die Vernachlässigung der Strahlungsdämpfung.

Zur Klärung dieser Schwierigkeit wurde von einigen Autoren der nahe-  
liegende Versuch einer klassischen Theorie des Mesonenfeldes mit Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung gemacht. Die Grundlage dafür bot eine Methode, mit deren Hilfe Dirac<sup>2)</sup> eine konsequente und relativistisch invariante klassische Theorie des Elektrons formuliert hatte. Danach wird das Elektron als Punktladung behandelt, wobei ähnlich wie in der Quantentheorie der Strahlung divergente Glieder durch Subtraktionsvorschriften zu beseitigen sind. Anwendung der Erhaltungssätze auf das Gesamtsystem Feld-Teilchen ergibt automatisch die Strahlungsdämpfung. Bhabha und Corben<sup>3)</sup> behandelten nach dieser Methode die Wechselwirkung zwischen Mesonen und dem elektromagnetischen Feld, Bhabha<sup>4)</sup> und Fierz<sup>5)</sup> die Wechselwirkung zwischen dem Mesonenfeld und Kernteilchen. Diese Arbeiten bestätigen die Vermutung, daß die Strahlungsdämpfung dem unbegrenzten Anwachsen der Wirkungsquerschnitte entgegenwirkt. Für Streuung von vektoriellen Mesonen an Kernteilchen ergibt sich nach dieser klassischen Theorie schon für gewöhnliche relativistische Energien des Mesons ein erheblich kleinerer Streuquerschnitt als nach der üblichen quantenmechanischen Störungsmethode. Gegen die Anwendung der klassischen Theorie bestehen aber keine Bedenken, solange die Mesonenenergien viel kleiner sind als die Ruheenergien der schweren Teilchen, was auch noch für gewöhnliche, relativistische Energien des Mesons der Fall sein kann. Es ist also anzunehmen, daß bereits für diese die übliche Näherungsmethode der Quantentheorie der Strahlung versagt, da ja über deren Gültigkeitsbereich sonst nichts bekannt ist. Man hat also zunächst den Eindruck, daß in diesem Fall die klassische Theorie der Quantentheorie überlegen ist.

Das quantentheoretische Störungsverfahren versagt aber auch ähnlich wie im obigen Fall, wenn man es auf Resonanzstreuung anwendet. Der Streukoeffizient wird dann an der Resonanzstelle unendlich, während nach der klassischen Theorie ein endlicher Wert zu erwarten ist. Dirac<sup>6)</sup> konnte jedoch zeigen, daß sich auch bei Benutzung der üblichen Ansätze der Quantentheorie der Strahlung die klassische Formel für Resonanzstreuung ergibt,

---

<sup>2)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **165**, 148, 1938. — <sup>3)</sup> H. J. Bhabha u. H. C. Corben, ebenda **178**, 273, 1941. — <sup>4)</sup> H. J. Bhabha, ebenda **172**, 384, 1939; **178**, 314, 1941. — <sup>5)</sup> M. Fierz, Helv. Phys. Acta **14**, 257, 1941. — <sup>6)</sup> P. A. M. Dirac, Prinzipien der Quantenmechanik, 1930, Kap. X: Stoßprobleme; s. auch ZS.f. Phys. **44**, 585, 1927.

wenn man die entsprechend vereinfachten Ausgangsgleichungen exakt löst und eine dabei auftretende unendliche Frequenzverschiebung fortläßt. Im wesentlichen die gleiche Formel wie Dirac haben Breit und Wigner <sup>7)</sup> abgeleitet und auf Probleme der Theorie der Kerne angewendet.

Im folgenden wird gezeigt, daß sich auch das allgemeine Störungsverfahren so formulieren läßt, daß es die Diracsche bzw. Breit-Wignersche Behandlung des Resonanzproblems umfaßt. Dies wird dadurch erreicht, daß die Ausgangsgleichungen des allgemeinen Störungsverfahrens ohne die bisher übliche Vernachlässigung der Rückwirkungsglieder gelöst werden. Das Resultat ergibt sich in Form einer Reihenentwicklung (Abschnitt 1a), aus der sich sowohl die Formeln der üblichen Näherungsmethode als auch die Diracschen Formeln für den Resonanzfall gewinnen lassen (Abschnitt 1b). Ein Teil dieser Entwicklung divergiert bei Beibehaltung der üblichen Annahmen über Wechselwirkung von Strahlung mit punktförmigen Teilchen. Läßt man diesen fort, so bleibt eine Reihenentwicklung übrig, deren erstes Glied die bisher verwendete Näherungsformel ergibt. Die höheren Glieder lassen sich ebenso wie das erste ohne Zuhilfenahme irgendwelcher neuer Voraussetzungen auswerten (Abschnitt 1c). Ihre Beibehaltung ermöglicht in den betrachteten Fällen den korrespondenzmäßigen Anschluß an die klassische Theorie mit Strahlungsdämpfung. Zum Vergleich ist die erwähnte klassische Theorie des Elektrons von Dirac <sup>2)</sup> am geeignetsten, da sie den Voraussetzungen der Quantentheorie der Strahlung in ihrer gegenwärtigen Form angepaßt ist. Auch in dieser klassischen Theorie treten Divergenzen auf, die auf die Annahme punktförmiger Kraftzentren zurückzuführen sind und zunächst nur durch Fortlassung der unerwünschten Glieder beseitigt werden können. Diese Schwierigkeit dürfte erst in einer Theorie zu vermeiden sein, in der die Struktur der Elementarteilchen mit erfaßt wird. Vorläufig müssen wir uns ebenso wie Dirac in seiner klassischen Theorie des Elektrons damit begnügen, ein konsequentes und mathematisch klar definiertes Verfahren anzugeben, mit dessen Hilfe sich die experimentellen Ergebnisse besser deuten lassen als bisher.

Es dürfte somit der Beweis erbracht sein, daß sich die Quantentheorie auch auf den letzten Problemkreis anwenden läßt, in dem ihr die klassische Theorie bisher überlegen schien. Es ist bemerkenswert, daß sich dabei eine zusätzliche Einschränkung des bisherigen Gültigkeitsbereichs der klassischen Theorie ergibt. Bei Vernachlässigung der Strahlungsdämpfung gehen

<sup>7)</sup> G. Breit u. E. Wigner, Phys. Rev. (2) 49, 519, 1936.

nämlich die quantentheoretischen Formeln in die klassischen über, wenn sich die Impulse der an dem betrachteten Prozeß beteiligten Teilchen sehr wenig ändern; ihre Energie kann dabei beliebig sein. Die klassischen Formeln für die Strahlungsdämpfung gelten hingegen nur für nichtrelativistische Energien, da die bei höheren Energien möglichen größeren Impulsänderungen die Strahlungsdämpfung auch dann beeinflussen, wenn bei dem tatsächlichen Übergang nur eine sehr kleine Impulsänderung stattfindet. Bei der Berechnung der Strahlungsdämpfung hat man nämlich immer Integrationen über alle Übergangsmöglichkeiten auszuführen.

Die Rechnungen werden für Streuung von Licht an einem geladenen spinlosen Teilchen durchgeführt (Abschnitt 2a). In diesem Fall ergibt sich nur eine praktisch belanglose Beeinflussung der Streuwahrscheinlichkeit durch die Strahlungsdämpfung, während die klassische Theorie einen für hohe Energien erheblichen Einfluß vermuten läßt. Eine beträchtliche Herabsetzung des Streuquerschnitts, allerdings erst bei sehr hohen Energien, bewirkt die Strahlungsdämpfung bei Streuung von Licht an vektoriellen Mesonen (Abschnitt 2b). Die erhaltene Formel wird zur Abschätzung des Wirkungsquerschnitts für elektromagnetische Bremsstrahlung nach dem Verfahren von Weizsäcker und Williams verwendet (Abschnitt 2c). In diesem Falle bewirkt die Strahlungsdämpfung, daß der sonst linear anwachsende Wirkungsquerschnitt von Energien von etwa  $10^{11}$  e-Volt an nahezu konstant bleibt.

Von dem großen Problemkreis der Mesonentheorie der Kernkräfte wird nur Streuung von Mesonen an unendlich schweren Kernteilchen behandelt und dabei das Resultat der klassischen Theorien von Bhabha und Fierz (l. c.) bestätigt (Abschnitt 2d). Da in diesem Fall der Einfluß der elektromagnetischen Strahlungsdämpfung entsprechenden Rückwirkung des Mesonenfeldes schon für verhältnismäßig niedrige Energien des Mesons beträchtlich wird, dürfte das angegebene Verfahren, das die Berechnung der Feldrückwirkung auch über den Anwendungsbereich der klassischen Theorien hinaus ermöglicht, gerade für den Ausbau dieser Theorie von einiger Bedeutung sein.

### *1. Allgemeines zum Störungsverfahren.*

a) *Formell exakte Lösung der Ausgangsgleichungen.* Die meisten Probleme der Quantentheorie der Strahlung wurden bisher nach einem Verfahren behandelt, das wohl zum erstenmal Dirac <sup>6)</sup> in allgemeiner Form angegeben hat. Die Aufstellung der Ausgangsgleichungen erfolgte dabei ohne vereinfachende Voraussetzungen. Bei der Angabe der Lösung begnügte



man sich jedoch mit Näherungsformeln, die man als erste oder zweite Näherung bezeichnen kann, je nachdem, ob man auf direkte oder indirekte Übergänge Bezug nimmt. Bei den letzteren handelt es sich um Übergänge über die sogenannten Zwischenzustände, d. h. diejenigen stationären Zustände des Gesamtsystems, die sowohl vom Anfangs- als auch vom Endzustand aus unter Wahrung des Impulssatzes, jedoch ohne Erhaltung der Energie, erreichbar sind. Die Unterscheidung von direkten und indirekten Übergängen kann allerdings einigermaßen willkürlich sein. So hat man in der Theorie des Compton-Effekts bei relativistischer Rechnung nur indirekte bei nichtrelativistischer Rechnung jedoch daneben auch direkte Übergänge zu berücksichtigen. Im folgenden klärt sich dies dahin auf, daß die indirekten Übergänge überhaupt formell aus der Darstellung eliminiert werden können. In Anbetracht dieses Sachverhaltes dürfte es zweckmäßig sein, die üblichen Näherungsformeln durchwegs als erste Näherung zu bezeichnen.

Bei der Behandlung von Strahlungsprozessen verwendet Dirac die für diese Zwecke besonders geeignete Impulsraumdarstellung, in der er seine Ausgangsgleichungen bei gleichzeitiger Berücksichtigung direkter und indirekter Übergänge folgendermaßen anschreibt (l. c. 6, F. 39)

$$(E - E_{p', \alpha'}) (p' \alpha' |) = \sum_{\alpha''} \int (p' \alpha' | V | p'' \alpha'') dp'' (p'' \alpha'' |) + \\ + \sum_{k''} (p' \alpha' | V | k'') (k'' |), \quad (1a)$$

$$(E - E_k) (k' |) = \sum_{\alpha''} \int (k' | V | p'' \alpha'') dp'' (p'' \alpha'' |) + \\ + \sum_{k''} (k' | V | k'') (k'' |). \quad (1b)$$

Er wendet diese Gleichungen zunächst allerdings nur auf Streuung an einem festen Streuer an und wählt daher als Fundamentalzustände die stationären Zustände des ungestörten Systems, für die das gestreute Teilchen einen bestimmten Impuls  $p$  hat und der Streuer sich in einem bestimmten Zustand  $\alpha$  befindet. Polarisations- und Spinrichtungen des gestreuten Teilchens sind mit inbegriffen in  $\alpha$ . Die  $(p' \alpha' |)$  sind die Darsteller der Anfangs- oder Endzustände, die  $(k' |)$  die der Zwischenzustände und  $E_{p', \alpha'}$  und  $E_k$  die zugehörigen Eigenwerte der Energie des Gesamtsystems.  $(p' \alpha' | V | p'' \alpha'')$  usw. sind die entsprechenden Übergangselemente der Störungsmatrix.

Im wesentlichen dieselben Ausgangsgleichungen wurden später auch auf Strahlungsprozesse viel allgemeinerer Art angewandt. Vor allem kommen dabei diejenigen Prozesse in Betracht, wo im Anfangs- und Endzustand je zwei freie Teilchen beteiligt sind, wie z. B. Compton-Streuung, Paarbildung und Paarvernichtung usw. Wollte man auch bei deren Be-



handlung die ursprüngliche Diracsche Bezeichnungsweise beibehalten, so hätte man für die Darstellung des Schwerpunktsystems zu wählen, da nur in diesem die Impulse der jeweils an einem Übergang beteiligten Teilchen paarweise bis auf das Vorzeichen gleich sind und durch die obigen  $p$  dargestellt werden können. Für die Durchführung der Rechnungen wird zwar meistens das Schwerpunktsystem verwendet werden; wir wollen aber doch eine Bezeichnungsweise wählen, die diese Einschränkung vermeiden und zugleich eine möglichst einfache Darstellung erreichen läßt.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir die Zustandsvariablen  $p$  und  $\alpha$ , oder, ganz allgemein, alle Zustandsvariablen der in Betracht kommenden Anfangs- und Endzustände durch gestrichene, die der Zwischenzustände hingegen durch römische Indizes und setzen

$$(p'\alpha'|) = a', \quad (k|) = a^I, \quad (2a)$$

$$(p'\alpha'|V|p''\alpha'') = H'_{,,}, \quad (p'\alpha'|V|k') = H'_I \text{ usw.} \quad (2b)$$

und

$$E_{p'\alpha'} = E', \quad E_k = E^I. \quad (2c)$$

Diese Bezeichnungsweise entspricht im wesentlichen der von den meisten Autoren verwendeten (vgl. etwa Heitler<sup>8)</sup>], mit dem Unterschied, daß wir hier zwischen oberen und unteren Indizes unterscheiden. Für hermitesche Matrizen sind nun  $H'_{,,}$  und  $H'^I_{,,}$  konjugiert komplex.

Bei Verwendung von (2) lauten die Gleichungen (1)

$$(E - E') a' = \sum H'_{,,} a'' + \sum H'^I_{II} a^{II}, \quad (1a')$$

$$(E - E^I) a^I = \sum H'^I_{,,} a'' + \sum H'^I_{III} a^{III}, \quad (1b')$$

wobei nun die Impulsraumintegration zusammen mit den Summationen über  $\alpha$  durch die Summationen über die gestrichenen bzw. römischen Indizes ausgedrückt werden. Angabe der Indizes bei den Summenzeichen erübrigt sich, wenn man vereinbart, daß immer über alle paarweise oben und unten auftretenden Indizes zu summieren ist.

Das Gleichungssystem (1b') kann man ohne weiteres nach den  $a^I$  auflösen, wenn man beachtet, daß ganz allgemein  $(E - E^I) = 0$  ist; als Zwischenzustände wurden ja alle diejenigen Zustände bezeichnet, die aus dem Anfangszustand, in dem das Gesamtsystem die vorgegebene Energie  $E$  hat, nicht ohne Verletzung des Energiesatzes erreichbar sind. Man kann also die  $a^{II}$  auf der rechten Seite von (1b') durch den dann gleichfalls aus (1b') gewonnenen Ausdruck

$$a^{II} = \frac{1}{E - E^{II}} (\sum H'^{II}_{,,} a'' + \sum H'^{II}_{III} a^{III})$$

<sup>8)</sup> W. Heitler, Quantum Theory of Radiation, Oxford 1936.

ersetzen. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man, Konvergenz vorausgesetzt, für die  $a^I$  die Entwicklung

$$a^I = \frac{1}{E - E^I} \sum'' \left\{ H_{,,}^I + \sum \frac{H_{II}^I H_{,,}^{II}}{E - E^{II}} + \sum \frac{H_{II}^I H_{III}^{II} H_{,,}^{III}}{(E - E^{II})(E - E^{III})} + \dots \right\}$$

und durch Einsetzen dieses Ausdrucks auf der rechten Seite von (1a') das Gleichungssystem

$$(E - E') a' = \sum h_{,,}' a'' \quad (3)$$

mit

$$h_{,,}' = H_{,,}' + \sum H_I' H_{,,}^I / (E - E^I) + \sum H_I' H_{II}^I H_{,,}^{II} / (E - E^I)(E - E^{II}) + \dots \quad (4)$$

Dieses hat die gleiche Form, die (1) für direkte Übergänge allein haben würde, mit dem Unterschied, daß nun  $h_{,,}'$  an Stelle von  $H_{,,}'$  zu verwenden ist. Die Einführung indirekter Übergänge läßt sich somit formell durch eine entsprechende Modifikation der Störungsmatrix ersetzen.

Bei der Lösung des Gleichungssystems (3) hat sich Dirac zwar mit der ersten Näherung begnügt, indem er auf der rechten Seite für den Darsteller des Anfangszustandes 1 und für alle anderen 0 einsetzte, aber dabei doch die vollständige, den Anfangsbedingungen genügende Lösung des Gleichungssystems

$$(E - E') a' = f' \quad (5)$$

für eine beliebige Funktion  $f'$  angegeben. Bei dessen Behandlung wählte er die spezielle Form (l. c. F. 23)

$$(E^A - E) (P\omega\chi\alpha) = f (P\omega\chi\alpha), \quad (5')$$

unter Verwendung von Polarkoordinaten für den Impuls.  $E$  ist hier der Eigenwert der Energie des Gesamtsystems für den Zustand  $(P\omega\chi\alpha)$ . Durch den Index  $A$  soll der Anfangszustand bezeichnet werden.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$(P\omega\chi\alpha) = f (P\omega\chi\alpha) / (E^A - E) + \lambda (\omega\chi\alpha) \delta (E^A - E).$$

Das zweite Glied mit der willkürlichen Funktion  $\lambda (\omega\chi\alpha)$  ist hier hinzuzufügen, da das Produkt der Diracschen Delta-Funktion  $\delta (E^A - E)$  mit  $(E^A - E)$  verschwindet. Durch Rücktransformation in die  $x$ -Darstellung konnte Dirac zeigen, daß dieser Ausdruck nur dann eine vom Streuzentrum ausgehende gestreute Welle darstellt, wenn die Funktion  $\lambda$  so gewählt wird, daß

$$(P\omega\chi\alpha) = f (P\omega\chi\alpha) \{1/(E^A - E) - i\pi\delta (E^A - E)\}$$

wird. Er hatte dabei Integrationen über den gesamten Ortsraum auszuführen, die sich für den zweiten Teil dieses Ausdrucks genau, für den

ersten aber nur mit gewissen Vernachlässigungen ausführen ließen. Dieser erste Teil gibt auch im folgenden zu noch ungeklärten Schwierigkeiten Anlaß. Wir interessieren uns aber zunächst nur für den zweiten Teil dieses Ausdrucks, dessen Berücksichtigung, wie im folgenden gezeigt wird, den korrespondenzmäßigen Anschluß der Quantentheorie der Strahlung an die klassische Theorie mit Strahlungsdämpfung ermöglicht. Wir wollen daher auf die mit dem ersten Teil schon an dieser Stelle zusammenhängenden Schwierigkeiten vorderhand nicht eingehen und einfach untersuchen, wie sich die obige, von Dirac nur auf spezielle Probleme angewandte Lösung bei der Formulierung des allgemeinen Verfahrens verwerten läßt.

Zu der obigen Lösung, die vom Streuzentrum ausgehende Teilchen darstellt, ist noch der Darsteller des Anfangszustandes hinzuzufügen, der bei entsprechender Normierung durch  $\delta_{\alpha_A} \alpha \delta(p^4 - p)$  gegeben ist. Im Sinne von (2) wollen wir für diesen Ausdruck abkürzungs halber  $\delta'_A$  setzen. Die gesuchte Lösung von (5) lautet dann

$$a' = \delta'_A + f' D' \quad (6)$$

mit

$$D' = 1/(E^4 - E') - i\pi \delta(E^4 - E'). \quad (7)$$

Im allgemeinen Fall ist  $f$  durch die rechte Seite von (3) gegeben. Setzen wir dort (6) ein, so erhalten wir

$$f' = h'_A + \sum h', f'' D'', \quad (8)$$

d. i. ein Gleichungssystem, aus dem sich die Unbekannte  $f'$ , Konvergenz des Verfahrens vorausgesetzt, durch sukzessive Approximation bestimmen läßt. Die Lösung ergibt sich in Form einer Reihenentwicklung, die bis zu Gliedern zweiter Ordnung

$$f' = h'_A + \sum h', h'_A D'' + \sum h', h'', h'_A D'' D''' + \dots \quad (9)$$

lautet. Zu beachten ist hierbei, daß es sich eigentlich um die Lösung einer Integralgleichung handelt, da in den Summationen auch Integrationen mit inbegriffen sind.

Von der Entwicklung (9) hat man bei der Formulierung des bekannten Störungsverfahrens nur das erste Glied beibehalten und alle anderen fortgelassen mit der Begründung, daß in ihnen Summen auftreten, die mit den sonst üblichen Voraussetzungen der Quantentheorie der Strahlung divergieren. Man hat dabei nicht beachtet, daß sich die höheren Glieder der Entwicklung (9) sinngemäß einteilen lassen in einen divergierenden und einen nichtdivergierenden Teil. Eine (9) entsprechende Formel hat man bisher nur für den besonders einfachen Resonanzfall angegeben. Da sich

schon dabei die gleichen Schwierigkeiten ergeben wie im allgemeinen Fall, wollen wir auf diese erst eingehen, nachdem wir gezeigt haben, wie sich die bekannten Formeln für den Resonanzfall aus (9) gewinnen lassen.

b) *Resonanzfall und symbolische Darstellung.* Die Formeln für den Resonanzfall erhält man, wenn man  $E^A$  so nahe an eines der diskreten Energieniveaus  $E^I$  heranrücken läßt, daß alle Glieder außer dem einen, welches  $(E^A - E^I)$  im Nenner enthält, vernachlässigt werden können. Von der Reihenentwicklung (4) hat man dann nur das Glied

$$h'_{,,} = H_I' H_{,,}^I / (E^A - E^I) \quad (10)$$

beizubehalten. Setzen wir diesen Ausdruck in (9) ein, so sehen wir zunächst, daß nun in allen Gliedern dieser Reihe  $h'_A$  als Faktor auftritt und ferner, daß wir die Summationen über verschiedene Indizes unabhängig voneinander ausführen können. Wir erhalten also

$$f' = h'_A \{ 1 + \sum' D' |H_I'|^2 / (E^A - E^I) + [\sum' D' |H_I'|^2 / (E^A - E^I)]^2 + \dots \}$$

woraus, Konvergenz der Reihenentwicklung vorausgesetzt,

$$f' = \frac{h'_A}{1 - \sum' D' |H_I'|^2 / (E^A - E^I)}$$

folgt. Trennen wir Real- und Imaginärteil des Nenners (s. 7), indem wir

$$a = \sum' |H_I'|^2 / (E^A - E^I) \quad (11)$$

und

$$b = \pi \sum' |H_I'|^2 \delta(E^A - E^I) \quad (12)$$

setzen, so erhalten wir die von Dirac für den Resonanzfall angegebene Formel (l. c. F. 52)

$$f' = H_I' H_A^I / (E^A - E^I - a + ib); \quad (13)$$

$a$  stellt hier die Frequenzverschiebung und  $b$  die Halbwertsbreite der Resonanzlinie dar.

Die Zusammenhänge werden etwas übersichtlicher, wenn man sich einer symbolischen Darstellung bedient. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst einen Vertauschungsoperator  $P''$ , der auf den oberen Index einwirkt:

$$P'' f' = f''. \quad (14)$$

Um ferner auch im allgemeinen Fall wie in (13) Real- und Imaginärteil trennen zu können, führen wir die Operatoren

$$R' = \sum' 1 / (E^A - E^I) \quad (15)$$

und

$$S' = \pi \sum' \delta(E^A - E^I) \quad (16)$$

ein und setzen also  $\sum' D' = R' - iS'$ . Die Gleichung (8) lautet dann

$$f' = h'_A + (R'' - iS'') h', P'', f'. \quad (8')$$

Ihre Lösung

$$f' = \frac{1}{1 - (R'' - iS'') h', P''} \cdot h'_A \quad (17)$$

stellt die Reihenentwicklung (9) in symbolischer Form dar. Aus ihr läßt sich (13) unmittelbarer als aus (9) ableiten. Aus der Vertauschbarkeit von  $H'_1$  und  $H'_A$  mit den Operatoren in (17) folgt nämlich

$$(R'' - iS'') h', P'', h'_A = (R'' - iS'') h', h'_A = h'_A (R'' - iS'') h'',$$

und daraus die (13) gleichwertige Formel

$$f' = \frac{h'_A}{1 - (R'' - iS'') h'',} \quad (13')$$

Die Operatoren  $R'' h'', P''$  bzw.  $S'' h'', P''$  ergeben dort die durch  $(E^A - E^I)$  geteilte Frequenzverschiebung  $a$  bzw. die Linienbreite  $b$  und sind also als Verallgemeinerung dieser Größen aufzufassen.

Bisher war nur die Reihenentwicklung bekannt, die sich aus (17) bei Fortlassung der  $S$ -Glieder ergibt. Mit den üblichen Annahmen über die Wechselwirkung punktförmiger Teilchen mit dem Strahlungsfeld divergieren in dieser alle Glieder bis auf das erste. Man erhält jedoch brauchbare Resultate, wenn man diese divergierenden Glieder einfach fortläßt. Es ist auch zu erwarten, daß diese Divergenzen in einer Theorie, in der die Struktur der Elementarteilchen berücksichtigt wird, nicht mehr auftreten werden. Daß die  $S$ -Glieder überhaupt in gewissen Fällen vernachlässigbar sind, ist zumindestens plausibel, da die ihnen in der Dispersionstheorie entsprechende Frequenzverschiebung in der Optik kaum eine Rolle spielt. An sich bleibt jedoch die Frage offen, wieweit diese auch im folgenden beibehaltene Vereinfachung tatsächlich berechtigt ist.

In der Quantentheorie der Strahlung hat man bisher bei der Formulierung des allgemeinen Störungsverfahrens zusammen mit den  $R$ -Gliedern auch die  $S$ -Glieder fortgelassen. Dies ist unbegründet, da der nach Fortlassung der  $R$ -Glieder in (17) verbleibende Ausdruck

$$f'_S = 1/(1 + iS'' h', P'') \cdot h'_A \quad (18)$$

ohne Zuhilfenahme neuer Voraussetzungen berechnet werden kann. Wie sich am Beispiel des Resonanzfalles erkennen läßt, kommt den  $S$ -Gliedern in der Dispersionstheorie, wo sie die Berechnung der Linienbreite ermöglichen, eine physikalische Bedeutung zu. Ihre Beibehaltung führt auch im allgemeinen Fall zu Formeln, die die Strahlungsdämpfung bzw. ihr korre-



spondenzmäßiges Analogon beschreiben. Das Resultat der klassischen Theorie ergibt sich ganz allgemein, wenn die Anwendung des Operators im Nenner von (18) wie in (13')  $h'_A$  einfach mit einem konstanten Faktor  $\zeta$  multipliziert, also

$$S''h'', P''h'_A = S''h'', h''_A = h'_A \cdot \zeta \quad (19)$$

wird, so daß sich (18) zu

$$f'_S = h'_A / (1 + i\zeta) \quad (18')$$

vereinfacht. Im Falle großer Impulsänderungen, wo die klassische Theorie versagt, läßt sich das Resultat im allgemeinen nicht mehr auf die einfache Form (18') bringen. Die durch (19) gegebene Definition einer für den Einfluß der Strahlungsdämpfung charakteristischen Größe  $\zeta$  ist allerdings auch dort noch möglich, jedoch handelt es sich dann nicht mehr um eine Konstante, sondern um eine Funktion der Zustandsvariablen.

c) *Diskussion des Verfahrens.* Schon bei Anwendungen der Formel (18) auf Einfachprozesse können sich erhebliche rechnerische Schwierigkeiten ergeben. Ihre Anwendung auf Mehrfachprozesse dürfte überhaupt problematisch sein. Plausibilitätsbetrachtungen der Art, wie sie für Einfachprozesse durch die Analogie mit der Dispersionstheorie nahegelegt wurden, scheinen für Mehrfachprozesse nicht in Frage zu kommen. Für diese erscheint die Fortlassung der  $R$ -Glieder sogar bedenklich in Anbetracht des Umstandes, daß diese Glieder von der gleichen Art sind wie die höheren Entwicklungsglieder in (4), die in der ersten Näherung als Übergangsamplituden für Mehrfachprozesse gedeutet werden konnten. Es ist allerdings fraglich, wieweit die übliche Zuordnung dieser Glieder zu Mehrfachprozessen auch bei Berücksichtigung der Feldrückwirkung beibehalten werden kann; denn außer diesen treten dann ja  $S$ -Glieder auf, die von der gleichen Ordnung in den Matrixelementen wie diese Übergangsamplituden für Mehrfachprozesse sind und daher im Sinne der üblichen Deutung irgendwelchen Mehrfachübergängen innerhalb des Systems zuzuordnen wären.

Wir wollen alle diese Fragen offenlassen und vorderhand Mehrfachprozesse von den Überlegungen ausschließen. Auch in (4) werden wir dann konsequenterweise die höheren, als Übergangsamplituden für Mehrfachprozesse gedeuteten Glieder fortlassen und nur die beiden ersten Glieder

$$h'_{,,} = H'_{,,} + \sum H'_I H''_{,,} / (E^A - E^I) \quad (20)$$

beibehalten. Daß die Fortlassung dieser Glieder zum mindesten, solange es sich um Elementarprozesse an Elektronen von nicht zu hohen Energien handelt, keinen erheblichen Fehler bedingt, haben Heitler und Nord-

heim<sup>9)</sup> und Kockel<sup>10)</sup> gezeigt. Wieweit diese Vereinfachung auch in der Mesonentheorie zulässig ist, bleibe dahingestellt.

Da in früheren Arbeiten im allgemeinen nur das erste Glied der Entwicklung (9) beibehalten wurde, benötigte man dort den Ausdruck (20) nur für Übergänge aus dem Anfangszustand, also in der speziellen Form

$$h'_A = H'_A + \sum H_1^I H_A^I / (E^A - E^I). \quad (20')$$

Bei Durchführung der Rechnungen für das Schwerpunktsystem hatte man dabei wegen der dann willkürlichen Impulsrichtungen im Anfangszustand den allgemeinen Ausdruck  $h''$ , abzuleiten, der also in diesem Falle früheren Arbeiten entnommen werden kann. Wurden die Rechnungen jedoch nur für ein anfänglich ruhendes Teilchen durchgeführt, so hat man  $h''$ , zunächst für beliebige Zustände zu berechnen, da  $h'_A$  dann nur einen Sonderfall darstellt.

Mit der Bestimmung von  $h'_A$  ist in der bisherigen Näherung der schwierigste Teil der Rechnungen durchgeführt. Nun hat man aber noch die Reihenentwicklung (19) auszuführen, deren erste Glieder explizit

$$f'_S = h'_A - iS''h''_A - S''S'''h''_A - S''S'''h''_A + \dots \quad (21)$$

lauten. Wir wollen nun zeigen, wie die Berechnung der höheren Entwicklungsglieder in (21) auszuführen ist.

Für die zunächst zu betrachtenden Zweiteilchen-Elementarprozesse, auf die sich bei Benutzung des Schwerpunktsystems die ursprüngliche Diracsche Bezeichnungsweise anwenden läßt, hat der  $S$ -Operator (16) die folgende Form:

$$S'g' = \pi \sum_{\alpha'} \int d\mathbf{p}' \cdot g(\mathbf{p}', \alpha') \delta(E^A - E'), \quad (22)$$

wobei  $g$  eine beliebige Funktion ist. Durch die  $\delta$ -Funktion wird hier die Impulsraumintegration auf eine Winkelintegration reduziert, da sie diejenigen Zustände aussondert, für welche die Gesamtenergie den vorgegebenen Wert  $E^A$  hat. Dieser entspricht im Schwerpunktsystem der gleiche Impulswert für alle Raumrichtungen, sofern an jedem Übergang nur je zwei Teilchen beteiligt sind. Es empfiehlt sich daher die Einführung von Polarkoordinaten  $d\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega$ . Um die  $\delta$ -Funktion direkt anwenden zu können, transformieren wir noch auf  $E'$  als Integrationsvariable, wobei wir die entsprechende Funktionaldeterminante, in den betrachteten Fällen einfach  $dp/dE$ , einzuführen haben. Die rechte Seite von (22) lautet dann

$$\pi \sum_{\alpha'} \int p'^2 \frac{dp'}{dE'} dE' d\Omega g(E', \Omega, \alpha') \delta(E^A - E').$$

<sup>9)</sup> W. Heitler u. L. Nordheim, *Physica* 1, 1059, 1934. — <sup>10)</sup> B. Kockel, *ZS. f. Phys.* 107, 153, 1937.

Zu diesem Integral liefern nur diejenigen Zustände einen nichtverschwindenden Beitrag, für welche  $E' = E^A$  ist und wir erhalten, da  $\int \delta(x) dx = 1$  ist,

$$S'g' = \pi \sum_{\alpha'} \int d\Omega \left( g p^2 \frac{dp}{dE} \right)_F. \quad (23)$$

Durch den Index  $F$  haben wir hierbei die zulässigen Endzustände bezeichnet, die nunmehr durch die Winkelkoordinaten und die Zustandsvariablen  $\alpha$  bestimmt sind.

Führen wir abkürzungshalber den Operator

$$S_F = \pi \sum_{\alpha'} \int d\Omega \left( p^2 \frac{dp}{dE} \right)_F \quad (24)$$

ein, so können wir (21) die Form

$$f_S^F = h_A^F - i S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} - S_{F''} S_{F'''} h_{F''}^F h_{F'''}^{F''} l_A^{F'''} + \dots \quad (25)$$

geben, wobei wir nun auch den gestrichenen Index in  $f_S'$  unter Bezugnahme auf einen bestimmten Endzustand durch  $F$  ersetzt haben. Für die Übergangsamplituden  $f_S^F$  haben wir somit eine Formel erhalten, bei deren Anwendung in den betrachteten Fällen nur Raumwinkelintegrationen und Summationen über die Zustandsvariablen  $\alpha$  auszuführen sind.

Bei der Berechnung eines Wirkungsquerschnitts bzw. Übergangskoeffizienten ist  $f_S^F$  an Stelle des bisher verwendeten ersten Gliedes der Entwicklung (25),  $h_A^F$ , einzusetzen. Im übrigen kann auf die früheren Arbeiten verwiesen werden. So hat Dirac für den Streukoeffizienten folgende Formel angegeben (l. c. 6, F. 38):

$$w = 4\pi^2 (2\pi\hbar c)^2 \frac{\varepsilon_0}{p_0} \left( p^2 \frac{\partial p}{\partial E} \right)_F |h_A^F|^2, \quad (26)$$

$p_0$  und  $\varepsilon_0$  bedeuten hier Impuls und Energie des einfallenden Teilchens. Die Bezeichnungsweise haben wir dabei schon insofern der sonst gebräuchlichen angepaßt, als wir das Diracsche  $Pc$  durch  $p$  ersetzten. Von den meisten Autoren werden auch nicht die Impulse  $p$  selbst, sondern die Wellenzahlen  $p/(2\pi\hbar c)$  als Basis der Darstellung verwendet. Die obige Formel lautet dann (vgl. etwa Heitler, l. c. 8, S. 148, F. 13)

$$w = \frac{2\pi}{\hbar c} \frac{\varepsilon_0}{p_0} \frac{1}{(2\pi\hbar c)^3} \left( p^2 \frac{\partial p}{\partial E} \right)_F |h_A^F|^2. \quad (27)$$

Das Heitlersche Matricelement  $h_A^F$  unterscheidet sich hier von dem Diracschen durch den Faktor  $(2\pi\hbar c)^3$ .

Die angegebene Formel läßt sich zunächst nur auf Streuung irgendwelcher Teilchen an einem festen Streuzentrum oder auf Streuung von Licht an einem anfangs ruhenden Teilchen anwenden. Im allgemeinen tritt, wie Gordon<sup>11)</sup> gezeigt hat, an Stelle des Faktors  $\varepsilon_0/p_0$  die ent-

<sup>11)</sup> W. Gordon, ZS. f. Phys. 40, 117, 1926.

sprechende Funktionaldeterminante, die im Schwerpunktsystem wie in (23) durch den Ausdruck  $dp/dE$ , mit den Impuls- und Energiewerten der Teilchen im Anfangszustand, gegeben ist. Um diesen Ausdruck zu bestimmen, stellen wir die Gesamtenergie des Systems dar als Summe der Energien der beiden im Anfangs- oder Endzustand vorhandenen Teilchen,

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (28)$$

wobei wir die Energie eines einzelnen Teilchens zum Unterschied von der Gesamtenergie mit  $\varepsilon$  bezeichnen. Benutzen wir die bekannte Beziehung

$$\varepsilon^2 = p^2 + m^2, \quad (29)$$

wo  $m$  die Ruheenergie des Teilchens bedeutet, so wird im Schwerpunktsystem, in dem  $p^2$  für beide Teilchen den gleichen Wert hat,

$$E = \sqrt{p^2 + m_1^2} + \sqrt{p^2 + m_2^2}. \quad (30)$$

Durch Differentiation dieses Ausdrucks erhalten wir

$$\frac{dp}{dE} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{E p}. \quad (31)$$

Ersetzen wir  $\varepsilon_0/p_0$  und  $(dp/dE)_F$  in (27) durch diesen Ausdruck mit den durch  $A$  bzw.  $F$  bezeichneten Energie- und Impulswerten für den Anfangs- und Endzustand und wählen wir dabei die Einheiten so, daß  $\hbar c = 1$  wird, so erhalten wir

$$w = \frac{\varepsilon_{1A} \varepsilon_{2A} \varepsilon_{1F} \varepsilon_{2F}}{4 \pi^2 E^2} \cdot \frac{p_F}{p_A} |f_S^F|^2. \quad (32)$$

Auch im Schwerpunktsystem ist hierbei die Unterscheidung der Impulswerte  $p_A$  und  $p_F$  erforderlich, wenn die Teilchen im Endzustand andere Ruhemassen besitzen als im Anfangszustand.

Bei der Anwendung des Verfahrens auf die in Frage kommenden Probleme wird man durch die bei der Ableitung von (32) getroffene Wahl des Schwerpunktsystems eine erhebliche Vereinfachung der Rechnungen erzielen. Diese Wahl würde keine einschränkende Voraussetzung bedeuten, wenn man die relativistische Invarianz des durch die Fortlassung der  $R$ -Glieder in (17) bedingten „Subtraktionsverfahrens“ nachgewiesen hätte. Dies ist uns bisher nicht gelungen. Vorläufig muß also die Frage offen bleiben, ob die relativistische Invarianz bereits bei Fortlassung der  $R$ -Glieder gewahrt bleibt oder nicht.

In ähnlicher Weise ist auch die relativistische Invarianz der durch Fortlassung der höheren Glieder in (20) erzielten Vereinfachung nicht selbstverständlich. Es ist denkbar, daß sie nur in ungefähr demselben Näherungsgrad gewahrt bleibt, der auch sonst erzielt wird. Auch bei der

Fortlassung der  $R$ -Glieder könnte der Sachverhalt ähnlich sein mit dem Unterschied, daß man dort über den durch diese Vernachlässigung bedingten Näherungsgrad oder überhaupt Zulässigkeitsbereich des Verfahrens keinerlei Aussagen machen kann.

## 2. Anwendungen.

a) *Streuung von Licht an einer Punktladung.* Die Berechnung höherer Entwicklungsglieder in (25) ist im allgemeinen sehr schwierig und gestaltet sich auch für das einfachste Problem dieser Art, das ist Streuung von Licht an einer Punktladung, nur für den N. R.- und E. R.-Fall\*) verhältnismäßig einfach. Für den Ausdruck  $h''$ , (s. 20), der, auf den Anfangs- und Endzustand bezogen, das erste Entwicklungsglied in (25) liefert, ergibt sich für dieses Problem (s. Anhang, F. 80)

$$h'' = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon p} \left[ (e' e'') - \beta \frac{(e' r'')(r' e'')}{1 + \beta (r' r'')} \right], \quad (33)$$

wobei  $r$  und  $e$  Richtungs- und Polarisationsvektor des Lichtquants und  $\beta$  wie üblich die Größe  $p/\varepsilon$  bedeuten. Für das zweite Entwicklungsglied in (25) erhalten wir mit (33), (24) und (31)

$$S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} = \pi \sum_{e'} \int \frac{d\Omega'}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\varepsilon p^2}{E} \cdot \frac{4\pi^2 e^4}{\varepsilon^2 p^2} \left[ (e e') - \beta \frac{(e r')(e' r)}{1 + \beta (r' r)} \right] \times \\ \times \left[ (e' e_0) - \beta \frac{(e' r_0)(e_0 r')}{1 + \beta (r' r_0)} \right]. \quad (34)$$

Energien und Impulse der Teilchen sind in dem betrachteten Fall bei Wahl des Schwerpunktsystems im Anfangs- und Endzustand gleich. Die Indizes  $A$  und  $F$  können daher bei diesen Größen fortgelassen werden. Ferner wurden auch die Richtungsvektoren für den Anfangs- und Endzustand einfach mit  $r_0$ ,  $e_0$  und  $r$ ,  $e$  bezeichnet.

Die Summation über die Polarisationsrichtungen läßt sich mit Hilfe der Formel

$$\sum_e (a e) (e b) = (a b) - (a r) (r b) \quad (35)$$

ausführen und wir erhalten

$$S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} = \frac{e^4}{2 \varepsilon E} I \quad (36)$$

mit

$$I = \int d\Omega' \left\{ (e e_0) - \beta \left[ \frac{(e r')(r e_0)}{1 + \beta (r' r)} + \frac{(e r_0)(r' e_0)}{1 + \beta (r' r_0)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{(e r')(r' e_0) [1 - \beta^2 (r r_0)]}{[1 + \beta (r' r)][1 + \beta (r' r_0)]} \right\}. \quad (36')$$

\*) N. R. und E. R. heißt, wie auch sonst üblich, nichtrelativistisch und extrem relativistisch.



Die auszuführenden Integrationen sind zwar elementar, aber sehr kompliziert und ergeben nur in den beiden Grenzfällen verhältnismäßig einfache Formeln.

*N. R.-Fall:* In diesem ist  $\varepsilon = E = m$  und  $\beta = 0$  zu setzen. Die Ausdrücke (33) und (34) vereinfachen sich dann zu

$$h'_{r'} = \frac{2\pi e^2}{mp} (e' e'_{r'}) \quad (33')$$

und

$$S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} = \frac{e^4}{2m^2} \int d\Omega' [(e e_0) - (e r') (r' e_0)]. \quad (34')$$

Das Resultat der Integration läßt sich mit Hilfe der leicht zu beweisenden Formel

$$\int (ar) (rb) d\Omega = \frac{4\pi}{3} (ab) \quad (37)$$

sofort angeben und wir erhalten für die rechte Seite von (34')

$$\frac{e^4}{2m^2} \frac{8\pi}{3} (e e_0).$$

Greifen wir auf (33') zurück, so sehen wir, daß nun wie in (19)

$$S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} = h_A^F \cdot \zeta \quad \text{mit} \quad \zeta = 2 e^2 p / 3 m \quad (38)$$

und also

$$f_S^F = h_A^F / (1 + i \zeta) \quad (39)$$

wird. Mit diesem Ausdruck und den entsprechenden Energie- und Impulswerten erhalten wir aus (32) für den Streukoeffizienten

$$w = \frac{e^4/m^2 \cdot (e e_0)^2}{1 + (2 e^2 p / 3 m)^2}. \quad (40)$$

Die gleiche Formel ergibt sich bei Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung in der klassischen Theorie des Elektrons [vgl. etwa Dirac, l. c.<sup>2)</sup>]. Der korrespondenzmäßige Anschluß an die klassische Theorie ist somit für dieses Problem erwiesen.

*E. R.-Fall:* In diesem ist  $\varepsilon = p$ ,  $E = 2p$  und  $\beta = 1$  zu setzen. Da dann aber für  $(r r') = -1$  und  $(r' r_0) = -1$  sowohl Nenner als auch Zähler in den entsprechenden Gliedern von (36') verschwinden, hat man zunächst bei Einführung von Polarkoordinaten  $r'$  ( $\sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $\sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $\cos \vartheta$ ) die Integration über  $\varphi$  für den vollen Ausdruck (36) auszuführen und kann erst danach zum E. R.-Fall übergehen. Um die Darstellung

möglichst einfach zu gestalten, wählen wir dabei  $r_0(0, 0, 1)$  und  $e_0(1, 0, 0)$  und haben also (36') in der Form

$$I = \int_0^\pi \sin \vartheta \, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ e_x - \beta \frac{e_x \sin \vartheta \cos \varphi}{1 + \beta \cos \vartheta} - \right. \\ \left. - \frac{\sin \vartheta (e_x \cos \varphi + e_y \sin \varphi) + e_z \cos \vartheta}{1 + \beta [\sin \vartheta (r_x \cos \varphi + r_y \sin \varphi) + r_z \cos \vartheta]} \left[ \beta r_x + \frac{\sin \vartheta \cos \varphi (1 - \beta^2 r_z)}{1 + \beta \cos \vartheta} \right] \right\} \quad (36'')$$

auszuwerten. Ausführung der Integration über  $\varphi$  liefert

$$I = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+r_z)(1+\beta x)} \left\{ G \left[ r_z + \beta x - \frac{\gamma^2}{\beta^2} \left( 1 + r_z \frac{1+\beta x}{1-r_z} \right) \right] - \frac{\gamma^2}{\beta^2} \frac{1+\beta x}{(1-r_z)^2} e_z r_x + \right. \\ \left. + \frac{G \left[ (r_z + \beta x)^2 \left( 1 + \frac{\gamma^2/\beta^2}{1-r_z} \right) + \frac{\gamma^2}{\beta^2} (1+r_z)(1-\beta^2 r_z) \right] + e_z r_x \frac{\gamma^2}{\beta^2} \left[ \frac{(r_z + \beta x)(1+\beta x)}{(1-r_z)^2} + \frac{1-\beta^2 r_z}{(1-r_z)} \right]}{\sqrt{(r_z + \beta x)^2 + \gamma^2 (1-r_z^2)}} \right\},$$

wobei wir abkürzungshalber  $\cos \vartheta = x$  gesetzt und ferner

$$G = e_x - \frac{e_z r_x}{1+r_z} \quad (41)$$

und

$$\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = m/\varepsilon \quad (42)$$

eingeführt haben. Der Übergang zum E. R.-Fall ist nun durchführbar und wir erhalten mit  $\beta = 1$  und  $\gamma = 0$  den verhältnismäßig einfachen Ausdruck

$$I = 2\pi G \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+r_z)(1+x)} \{ r_z + x + |r_z + x| \}.$$

Für sehr kleine Streuwinkel hat man diesen Übergang allerdings getrennt durchzuführen, da für diese die Fortlassung der Glieder mit  $\gamma^2/(1-r_z)$  nicht zulässig ist. Diese heben sich jedoch gerade fort, so daß die obige Formel auch für  $r_z \approx 1$  gilt.

Bei der Ausführung der Integration ist zu beachten, daß der Klammerausdruck für  $(r_z + x) < 0$  verschwindet und für  $(r_z + x) > 0$  gleich  $2(r_z + x)$  wird. Es ergibt sich also

$$I = \frac{4\pi G}{1+r_z} \int_{-r_z}^1 \frac{dx}{1+x} (r_z + x) = 4\pi G K(r_z) \quad (43)$$

mit

$$K = 1 - \frac{1-r_z}{1+r_z} \log \frac{2}{1-r_z}. \quad (43')$$

Dieser Ausdruck nimmt mit zunehmendem Streuwinkel ziemlich gleichmäßig ab. Für kleine Streuwinkel  $\vartheta \ll \pi/2$  ( $r_z = \cos \vartheta$ ) ist

$$K = 1 - \frac{\vartheta^2}{2} \log \frac{2}{\vartheta}.$$

Für  $\vartheta = 90^\circ$  wird  $K = 0,31$ ; dann verlangsamt sich die Abnahme und schließlich wird für größte Streuwinkel  $K = (\pi - \vartheta)^2/8$ .

Einsetzen von (43) in (36) liefert

$$S_{F'} h_{F'}^F h_A^{F'} = h_A^F \cdot \frac{e^2}{2} K(r_z), \quad (44)$$

wobei berücksichtigt wurde, daß im E.R.-Fall aus (33) mit (41)  $h_A^F = 2\pi e^2 G/p^2$  folgt. (44) entspricht (19) mit

$$\zeta = e^2/2 \cdot K(r_z). \quad (45)$$

Da nun  $\zeta$  nicht eine Konstante, sondern eine Funktion des Streuwinkels ist, kann man das Resultat nicht sofort in der (18') entsprechenden Form angeben. Man hätte vielmehr die höheren Entwicklungsglieder in (21) zu berechnen und dabei wieder ähnliche Integrationen auszuführen wie in (36''). Aber schon im dritten Entwicklungsglied ist die Integration über  $\vartheta$  wegen des Auftretens von  $K(\cos \vartheta)$  als zusätzlichem Faktor nicht mehr elementar. Dieser bedingt aber wegen  $K \leq 1$  eine weitere Herabsetzung des schon wegen des Faktors  $e^4/4$  ( $\sim 10^{-5}$ ) sehr kleinen Gliedes. Die Entwicklung dürfte also rasch konvergieren und ein Resultat von der Form

$$f_S^F = h_A^F/(1 + i\zeta') \quad \text{mit} \quad \zeta' = e^2/2 \cdot K(r_z) + O(e^4) \quad (46)$$

zu erwarten sein, wobei  $O(e^4)$  die nicht mehr berechneten Glieder 4. und höherer Ordnung in  $e$  bezeichnet. Für den Streukoeffizienten ergibt sich mit (45) aus (32)

$$w = \frac{e^4}{4 p^2} \cdot \frac{G^2}{1 + \zeta'^2}, \quad (47)$$

d. h. bei der Kleinheit von  $\zeta'$  ( $\sim 1/274$ ) praktises das gleiche Resultat wie ohne Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung.

Es ist nun verständlich, daß die quantentheoretischen Formeln für Wirkungsquerschnitte auch für sehr hohe Energien brauchbar sein können, während klassische Formeln wie (38) eine sehr erhebliche Störung durch die Strahlungsdämpfung vermuten lassen. Man könnte zumindest annehmen, daß (38) für kleinste Streuwinkel, für die keine Impulsübertragung an das Elektron stattfindet, für beliebige Energien gültig bleibt. Tatsächlich ergibt sich aber für  $\vartheta = 0$  aus (36) die genaue Formel

$$\zeta_0 = e^2 \frac{\beta}{1 + \beta} \left[ 1 - \frac{1 - \beta^2}{\beta^2} \left( \frac{1}{2\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right) \right]. \quad (48)$$

Der klassische Ausdruck  $2e^2\beta/3$  ergibt sich aus (47) nur im N. R.-Fall. Er wird schon für  $p = 3m/4$  gleich  $e^2/2$ , während sich  $\zeta_0$  diesem Wert erst im E. R.-Fall, wo

$$\zeta_0 = e^2/2 \cdot (1 - \gamma^2 \log 2/\gamma) \quad (48')$$

wird, asymptotisch nähert. (38) versagt also auch bei verschwindender Impulsübertragung. Für größte Impulsübertragungen werden die Abweichungen noch viel erheblicher. Für  $\vartheta = \pi$  lautet die genaue Formel

$$\zeta_\pi = \frac{e^2}{2} \beta (1 - \beta) \left[ 1 + \frac{1 + \beta^2}{\beta^2} \left( \frac{1}{2\beta} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - 1 \right) \right]. \quad (49)$$

Dieser Ausdruck nimmt nur bis etwa  $p = 3m/4$  zu, erreicht dort den Maximalwert  $0,38 \cdot e^2/2$  und nimmt für höhere Energien rasch ab. Im E. R.-Fall ist

$$\zeta_\pi = \frac{e^2}{2} \gamma^2 \left( \log \frac{2}{\gamma} - \frac{1}{2} \right), \quad (49')$$

Ob man diesem für große Streuwinkel überraschend kleinen Wert der Größe  $\zeta$ , die im klassischen Grenzfall das Verhältnis der natürlichen Linienbreite zur Lichtfrequenz angibt, eine anschauliche physikalische Deutung geben kann, mag vorläufig dahingestellt bleiben.

b) *Compton-Streuung an vektoriellen Mesonen.* Verschiedene Autoren [Kobayasi - Utiyama<sup>12)</sup>, Smorodinski<sup>13)</sup>, Booth - Wilson<sup>14)</sup> und Bruno<sup>15)</sup>] haben für den E. R.-Wirkungsquerschnitt für Streuung von Licht an vektoriellen Mesonen die Formel

$$\Phi \simeq \frac{5\pi}{9} \frac{e^4 p^2}{m^4}, \quad (50)$$

für das Schwerpunktsystem ( $p$  Impuls oder Energie von Meson und Lichtquant) bzw.

$$\Phi = \frac{5\pi}{18} \frac{e^4 k_0}{m^3}, \quad (51)$$

für das Ruhesystem des streuenden Mesons ( $k_0$  Energie des einfallenden Lichtquants) angegeben. Die richtige Größenordnung erhält man auch ohne Ausführung der sehr umständlichen Rechnungen unter Bezugnahme auf die für das skalare Teilchen gewonnenen Resultate. Man hat dabei zu beachten, daß sich die Matrizelemente  $H''$ , bzw.  $H'_I$  für Wechselwirkung vektorieller Teilchen mit elektromagnetischer Strahlung durch einen Faktor  $p^2/m^2$  bzw.  $p/m$  von den entsprechenden Matricelementen für skalare

<sup>12)</sup> M. Kobayasi u. R. Utiyama, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **22**, 824, 1940. — <sup>13)</sup> J. Smorodinski, Journ. of Phys. **3**, 143, 1940. — <sup>14)</sup> F. Booth u. H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **175**, 483, 1940. — <sup>15)</sup> B. Bruno, Arkiv för Math., Astr. och Fys. **28**, 1 B, Nr. 5, 1942.

Teilchen unterscheiden. Der dort verwendete Ausdruck (33) ist also nach Fortlassung des Richtungsfaktors mit  $p^2/m^2$  zu multiplizieren und wir erhalten bis auf einen von Streu-, Spin- und Polarisationsrichtungen abhängigen Faktor von der Größenordnung 1

$$h'_{\parallel} \sim \frac{2\pi e^2}{m^2} \quad (52)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in (32) liefert für den Streukoeffizienten die Formel

$$w \sim \frac{e^4 p^2}{4m^4 (1 + e^4 p^2 / 4m^4)} \quad (53)$$

Für  $p < \sqrt{2} m/c \sim 17 m$  ergibt sich daraus

$$\Phi = 4\pi w \sim \frac{\pi e^4 p^2}{m^4} \quad (54)$$

in befriedigender Übereinstimmung mit der genauen Formel (50).

Die entsprechenden Formeln für das Bezugssystem, in dem das Meson anfänglich ruht, erhält man mit Hilfe der bekannten Transformationsformeln, und zwar für den Impuls des Streuquarks

$$k'_0 = p \frac{1 + \beta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{k_0 m}{m + k_0 (1 - \cos \vartheta_0)}, \quad (55)$$

mit  $\beta = p/c = k_0/(m + k_0)$  und für den Streuwinkelbereich

$$d[\cos \vartheta] = d \cos \vartheta_0 \frac{1 - \beta^2}{1 - \beta \cos \vartheta_0} \cong d \cos \vartheta_0 \frac{2k'_0}{k_0} \text{ (E. R.)}. \quad (55')$$

Die auf dieses System bezogenen Größen haben wir mit dem Index 0 versehen. Aus (53) ergibt sich so zunächst ohne Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung

$$w_0 \sim \frac{e^4}{2m^4} \frac{k'_0{}^2}{k_0}. \quad (56)$$

Die genaue Formel (s. Bruno, l. c., F. 33) enthält an Stelle von  $k'_0{}^2$  einen längeren Ausdruck mit Gliedern bis zu  $k'_0{}^5$ . Für den Gesamtquerschnitt erhält man aber schon mit (56) die richtige Größenordnung

$$\Phi_0 \sim 2\pi \int_{-1}^1 \frac{e^4 k'_0{}^2}{2m^4 k_0} d \cos \vartheta_0 \cong \frac{\pi e^4}{2m^3} \cdot \frac{k_0}{m}. \quad (57)$$

Das gleiche Resultat erhält man auch unmittelbar aus (53) ebenso wie (51) aus (50) bei Benutzung der gleichfalls aus den Transformationsformeln abzuleitenden E. R.-Beziehung  $2p^2 = k_0 m$ . Mit Hilfe derselben Beziehung wollen wir den Nenner von (53) transformieren und also im folgenden bei



der Abschätzung des Wirkungsquerschnitts für Bremsstrahlung von der Formel

$$w_0 \sim \frac{e k_0'^3 / k_0}{2 m^4 (1 + e^4 k_0'^3 / 16 m^2)} \quad (58)$$

Gebrauch machen. Es ist denkbar, daß an dieser Stelle das Resultat der genauen Rechnung bei Berücksichtigung der Winkelabhängigkeit von dieser Abschätzung erheblich abweichen kann, aber eine erste Orientierung über die Größenordnung des zu erwartenden Einflusses der Strahlungsdämpfung dürfte doch auch auf diese Art zu erreichen sein.

Daß unsere Abschätzung auch auf die Strahlungsdämpfung anwendbar ist, wird durch die von Bhabha und Corben (l. c., F. 111; s. Einleitung) auf klassischem Wege abgeleitete Formel für den Streuquerschnitt bestätigt, die bei Benutzung unserer Bezeichnungsweise

$$w = \sin^2 \vartheta \frac{e^4 p^2}{16 m^4} \frac{1}{1 + e^4 p^4 / 9 m^4}$$

lautet. Dieses Resultat entspricht (58) bis auf die dort nicht erfaßten Winkel- und Zahlenfaktoren. Es ist demnach zu erwarten, daß sich bei exakter Durchführung wieder der genaue korrespondenzmäßige Anschluß an die klassische Theorie mit Strahlungsdämpfung ergibt.

c) *Bremsstrahlung vektorieller Mesonen.* Den Wirkungsquerschnitt für Bremsstrahlung kann man im E. R.-Fall nach dem bekannten Verfahren von Weizsäcker<sup>16)</sup> und Williams ableiten, wenn der Compton-Streuquerschnitt bekannt ist. Booth und Wilson<sup>14)</sup> zeigen, daß dieses Verfahren für den Wirkungsquerschnitt bei Emission eines Lichtquants, dessen Energie zwischen  $\varepsilon E_0$  und  $(\varepsilon + d\varepsilon) E_0$  liegt [ $E_0$  Energie des einfallenden Teilchens\*], die allgemeine Formel (l. c., F. 132)

$$\varphi(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \int 2\pi r dr \int w_0 \frac{k_0'}{k_0} I(k_0) \frac{2\pi d \cos \vartheta_0}{(1 - \varepsilon)^2} \quad (59)$$

liefert.  $I(k_0)$ , die Intensität pro Frequenzintervall- und Flächeneinheit der Lichtquanten, durch die das Coulomb-Feld des Kerns im Ruhesystem des einfallenden Teilchens ersetzt wird, ist hierbei durch

$$I(k_0) = \frac{Z^2 e^2}{\pi^2 r^2} \text{ bzw. } 0, \quad \text{für } k_0 < \text{ bzw. } > \frac{E_0}{rm} \quad (60)$$

gegeben. Die obere Grenze dieses Ausdrucks ist in (59) durch entsprechende Wahl der oberen Integrationsgrenzen zum Ausdruck zu bringen. Dazu benötigt man noch die Transformationsformeln (l. c., F. 129)

$$k_0 = \frac{m}{1 - \cos \vartheta_0} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}, \quad k_0' = k_0 (1 - \varepsilon). \quad (61)$$

<sup>16)</sup> C. F. v. Weizsäcker, ZS. f. Phys. 88, 612, 1934. — \*) Um die Formeln der genannten Autoren unverändert übernehmen zu können, werden in diesem Abschnitt  $\varepsilon$  und  $E$  in anderem Sinn gebraucht als vorher.

Aus diesen und (60) folgt, daß die Integrationsbereiche für  $x = \cos \vartheta_0$  und  $r$  durch die Bedingungen (l. c., F. 133)

$$-1 \leq \cos \vartheta_0 \leq 1 - \frac{r m^2}{E_0} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = 1 - \eta, \quad \text{und} \quad r \leq \frac{2 E_0}{m^2} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} = R \quad (62)$$

einzuschränken sind.

Verwenden wir nun den Ausdruck (58) für den Streukoeffizienten  $w_0$  in (59), so erhalten wir

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{2 Z^2 e^6}{m^2} \varepsilon \int_{1/m}^R \frac{dr}{r} \int_{-1}^{1-\eta} \frac{dx}{(1-x)^2 + \alpha^2} \quad (63)$$

mit

$$\alpha = \frac{e^2}{4} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}. \quad (64)$$

Zur Festlegung der unteren Integrationsgrenze für  $r$  ist zu bemerken, daß die von Booth und Wilson ebenso wie von Weizsäcker getroffene Wahl der Compton-Länge  $1/m$  für Mesonen zu erheblich größeren Fehlern Anlaß geben kann als für Elektronen, da einerseits die Wechselwirkung in der Mesonentheorie in höherem Grade singulär ist als in der Elektronentheorie, und andererseits nun  $1/m$  von der gleichen Größenordnung wie die Kernradien wird. Eine zusätzliche Herabsetzung der oberen Integrationsgrenze  $R$  kann durch Abschirmung erfolgen.

Das Resultat läßt sich für die beiden Grenzfälle verhältnismäßig großer und kleiner Energien in einfacher Form angeben. Ist

$$\frac{\alpha}{\eta} \ll 1, \quad \text{d. h.} \quad E_0 \ll 4 \cdot 137 m \sim 10^{11} \text{ e-Volt}, \quad (65)$$

so ergibt sich bis auf einen Zahlenfaktor das Resultat von Booth und Wilson (l. c., F. 137)

$$\varphi \sim \frac{2 Z^2 e^6}{m^2} \varepsilon \int_{1/m}^R \frac{dr}{r \eta} \simeq (1 - \varepsilon) \frac{2 Z^2 e^6}{m^2} \frac{E_0}{m}. \quad (66)$$

Der von der oberen Integrationsgrenze herrührende Beitrag kann in diesem Fall vernachlässigt werden. Ist hingegen

$$\frac{\alpha}{\eta} \gg 1, \quad \text{d. h.} \quad E_0 \gg 4 \cdot 137 m \sim 10^{11} \text{ e-Volt}, \quad (67)$$

so wird

$$\varphi \sim \frac{2 Z^2 e^6}{m^2} \varepsilon \int_{1/m}^R \frac{dr}{r} \cdot \frac{\pi}{\alpha} = (1 - \varepsilon) \frac{8 \pi Z^2 e^4}{m^2} \log \frac{2 E_0}{m} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (68)$$

Für Teilchen mit Spin 0 und 1/2 erhält man unter sonst gleichen Voraussetzungen eine Formel, die sich von (68) im wesentlichen nur dadurch

unterscheidet, daß  $e^6$  an Stelle von  $e^4$  tritt. Dieses Resultat besagt, daß Teilchen mit Spin 1 im Bereich sehr hoher Energien — bei den beobachteten Werten der Ruhemassen der schweren Elektronen von etwa  $10^{11}$  e-Volt an — ungefähr 187mal stärker strahlen als Teilchen gleicher Ruhemasse mit Spin 0 oder  $1/2$ . Nicht der Wirklichkeit entsprechen dürfte hingegen die noch viel stärkere Strahlung, die Booth und Wilson durch Anwendung von (66) auf beliebig hohe Energien berechneten. Die Strahlungsdämpfung bewirkt, daß das zunächst lineare Anwachsen des Wirkungsquerschnitts bei etwa  $10^{11}$  e-Volt in ein logarithmisches Anwachsen übergeht. Macht sich die Abschirmung bemerkbar, was für  $2 E_0/m \cdot (1 - \varepsilon)/\varepsilon > 137 Z^{-1/3}$  (vgl. etwa Heitler, l. c. 8, S. 170) eintritt, so hört auch dieses Anwachsen auf und der Wirkungsquerschnitt wird konstant. In qualitativer Hinsicht dürfte dieses Verhalten von der genauen Form des Nenners in (58) weitgehend unabhängig sein, aber erhebliche quantitative Abweichungen dieser Abschätzung von den Resultaten genauerer Rechnungen sind durchaus möglich.

d) *Streuung von Mesonen an Kernteilchen.* Während ein Einfluß der Strahlungsdämpfung bei den betrachteten Prozessen elektromagnetischer Natur kaum oder aber erst bei sehr hohen Energien in Frage kam, erhält man in der Yukawaschen Theorie der Kernkräfte bereits bei verhältnismäßig niedrigen Energien einen analogen Effekt. Es dürfte zweckmäßig sein, für diesen die allgemeinere Bezeichnung Feldrückwirkung zu verwenden, da es sich nun um ein Materiefeld und nicht um ein Strahlungsfeld handelt. Da noch keine endgültige Fassung dieser Theorie der Kernkräfte vorliegt und auch im allgemeinen sehr umständliche Rechnungen nötig werden, wollen wir hier nur Streuung von vektoriellen Mesonen an unendlich schwer gedachten Kernteilchen betrachten. Schon die für diesen Grenzfall abgeleiteten Formeln, die brauchbar sein können, solange die Energie des gestreuten Mesons viel kleiner ist als die Ruheenergie des Streuers, lassen die Bedeutung der Feldrückwirkung deutlich erkennen.

Den Ausdruck (20) für dieses Problem können wir einer Arbeit von Heitler<sup>17)</sup> entnehmen, der die Formel für den Streuquerschnitt im Schwerpunktsystem unter der Voraussetzung abgeleitet hat, daß keine höheren Ladungs- oder Spinzustände des schweren Teilchens in Betracht kommen. Es sind dann nur indirekte Übergänge über einen einzigen Zwischenzustand möglich und es ergibt sich

$$h'_{,,} = \frac{2\pi p^3}{\varepsilon^2 m^2} \{g_1 + g_2 (\sigma [i' r'])\} \{g_1 + g_2 (\sigma [i'' r''])\}. \quad (69)$$

<sup>17)</sup> W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) 166, 529, 1938.

Mit  $g_1$  und  $g_2$  sind hier die Konstanten der Wechselwirkung, mit  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{r}$  die Polarisations- und Richtungsvektoren des Mesons bezeichnet.  $\sigma$  ist der Spinvektor des schweren Teilchens, von dem entsprechend der Annahme einer unendlich großen Ruhemasse vorzusetzen ist, daß seine Richtung durch den Mesonenstoß nicht geändert wird. Im übrigen entspricht die Bezeichnungsweise der in (34) verwendeten.

Für das zweite Glied der Entwicklung (25) erhalten wir mit (69) und (24)

$$S_F h_F^F h_A^{F'} = \pi \frac{p \varepsilon}{(2\pi)^3} \left( \frac{2\pi p^2}{\varepsilon^2 m^2} \right)^2 \{g_1 + g_2 (\sigma [\mathbf{j} \mathbf{r}])\} \\ \sum_{\mathbf{j}'} \int d\Omega' \{g_1 + g_2 (\sigma [\mathbf{j}' \mathbf{r}'])\}^2 \{g_1 + g_2 (\sigma [\mathbf{j}_0 \mathbf{r}_0])\}. \quad (70)$$

Da sich hier einige Faktoren zu  $h_A^F$  zusammenfassen lassen, können wir die rechte Seite auf die (19) oder (38) entsprechende Form  $h_A^F \zeta$  mit

$$\zeta = \frac{p^3}{4\pi \varepsilon m^2} \sum_{\mathbf{j}'} \int d\Omega' \{g_1 + g_2 (\sigma [\mathbf{j}' \mathbf{r}'])\}^2$$

bringen. Bei der Berechnung dieses Ausdrucks beachten wir zunächst, daß das in  $\mathbf{r}'$  lineare Glied bei der Integration fortfällt. Wir können dann die Summation über  $\mathbf{j}'$  unter Heranziehung bekannter Formeln wie  $(\sigma [\mathbf{j} \mathbf{r}]) = (\mathbf{j} [\mathbf{r} \sigma])$  und (35) leicht ausführen und erhalten schließlich mit Hilfe der ähnlich wie (36) abzuleitenden Formel

$$\int [\mathbf{a} \mathbf{r}] [\mathbf{b} \mathbf{r}] d\Omega = \frac{8\pi}{3} (\mathbf{a} \mathbf{b}) \quad (71)$$

den nur von der Energie, aber nicht von Streu- und Polarisationsrichtungen abhängigen Ausdruck

$$\zeta = \frac{p^3}{\varepsilon m^2} (g_1^2 + \frac{2}{3} g_2^2). \quad (72)$$

Das Resultat der Entwicklung (25) läßt sich daher wieder sofort in der (18') entsprechenden Form angeben und wir erhalten durch Einsetzen von  $f_s^F = h_A^F / (1 + i\zeta)$  in (32) mit  $\varepsilon_{1A} = \varepsilon_{1F} = E = M$

$$w = \frac{\varepsilon^2 |h_A^F|^2}{4\pi^2 (1 + \zeta^2)}. \quad (73)$$

Integration über alle Streurichtungen und Mittelung über die Polarisationsrichtungen liefert für den totalen Wirkungsquerschnitt die Formel

$$\Phi = \frac{4\pi (g_1^2 + \frac{2}{3} g_2^2)^2 p^4}{m^4 \varepsilon^2 (1 + \zeta^2)} \quad (74)$$

aus der sich nur für  $\zeta \ll 1$  die von Heitler<sup>17)</sup> abgeleitete Formel ergibt. Entnimmt man der Theorie der Kernkräfte die Werte  $g_1 \sim g_2 \sim 1/5 - 1/6$ ,

so sieht man, daß schon für  $\varepsilon \sim 2m$ , d. h. für gewöhnliche relativistische Energien des Mesons, mit dem Versagen der nach dem bisherigen Verfahren gewonnenen Formeln zu rechnen ist. Für  $\varepsilon > 2m$  nähert sich (74) rasch dem asymptotischen Wert  $4\pi/p^2$ . Das den experimentellen Befunden widersprechende rasche Anwachsen des Streuquerschnitts nach der Heitlerschen Formel läßt sich also durch Berücksichtigung der Feldrückwirkung vermeiden.

Für die  $g_1$ - bzw.  $g_2$ -Wechselwirkung allein haben Bhabha<sup>4)</sup> und Fierz<sup>5)</sup> in ihren eingangs erwähnten klassischen Theorien des Mesonenfeldes die gleiche Formel (74) erhalten. Während aber die der Voraussetzung eines festen Streuers entsprechende Gültigkeitsbedingung  $p \ll M$  ( $M$  Ruheenergie des Streuers; für Protonen oder Neutronen  $m \sim M/10$ , also  $\varepsilon \ll 10m \sim 10^9$  e-Volt) in einer klassischen Theorie unvermeidlich ist, bedeutet sie bei Anwendung der quantentheoretischen Methode nur eine vorläufige Vereinfachung. Die tatsächliche Berechnung des Streuquerschnittes für beliebig hohe Energien erscheint durchaus möglich. Sie würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit überschreiten, die nur als erste Orientierung über die Möglichkeit einer Erfassung der Feldrückwirkung in der Quantentheorie der Strahlung gedacht war. Es ist auch fraglich, ob derartigen Rechnungen mehr als bloß methodisches Interesse zukommen würde, da ja das Resultat dieses Abschnitts die übliche Mesonentheorie der Kernkräfte, in der die Feldrückwirkung nicht berücksichtigt wurde, einigermaßen revisionsbedürftig erscheinen läßt.

#### Anhang.

*Berechnung von  $h'_{,,}$  für Streuung von Licht an skalaren Teilchen.* Der Ausdruck  $h'_{,,}$  (20) kann früheren Arbeiten nur entnommen werden, wenn in diesen das Schwerpunktsystem gewählt wurde (s. oben l. c.). Der in Abschnitt 2a behandelte Fall, Streuung von Licht an geladenen, skalaren Teilchen, ist jedoch bisher nur für anfangs ruhende Teilchen bearbeitet worden [Dirac<sup>18)</sup>, Gordon<sup>11)</sup>]. Damals wurde die sogenannte wellenmechanische oder korrespondenzmäßige Methode, später hingegen bei der Behandlung derartiger Probleme häufiger eine quantenmechanische Methode verwendet, von der auch im folgenden Gebrauch gemacht wird. Nur in der letzteren kommt die Unterscheidung von direkten und indirekten Übergängen in Frage. Wir haben uns überzeugt, daß beide Methoden auch im allgemeinen Fall das gleiche Resultat liefern.

<sup>18)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 111, 405, 1926.



Die Quantentheorie des spinlosen Skalarteilchens formulierten Pauli und Weißkopf<sup>19)</sup>. Sie geben für die Hamilton-Funktion der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld den Ausdruck

$$\begin{aligned}
 H' = & -\frac{e}{2} \sum_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{k} \varepsilon} \sqrt{\frac{2\pi}{k \varepsilon \varepsilon'}} \left\{ \mathbf{e}_{\mathbf{k}} [\mathbf{p}' (a^* - b) (a' - b'^*) + \mathbf{p} (a'^* - b') (a - b^*)] \cdot \right. \\
 & \cdot [C^* \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k}) + C \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k})] - \\
 & - e \sum_{\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{2\pi}{k'}} (a^* - b) (a' - b'^*) (\mathbf{e}_{\mathbf{k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}'} [C^* C'^* \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k} + \mathbf{k}') + \\
 & + C^* C' \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \mathbf{k} - \mathbf{k}') + C C'^* \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k} + \mathbf{k}') + \\
 & \left. + C C' \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}' - \mathbf{k} - \mathbf{k}')] \right\} \quad (75)
 \end{aligned}$$

an ( $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{p}$  Impuls,  $k$ ,  $\varepsilon$  Energie des Lichtquants bzw. Teilchens;  $\mathbf{e}$ ,  $C^*$ ,  $C$  Polarisationsvektoren, Entstehungs- und Vernichtungsoperatoren der Lichtquanten;  $a^*$ ,  $a$ ,  $b^*$ ,  $b$  Entstehungs- und Vernichtungsoperatoren positiv bzw. negativ geladener Teilchen). Das Vektorpotential des elektromagnetischen Feldes wird dabei durch die Entwicklung

$$\mathbf{a} = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{2\pi}{k}} \cdot \mathbf{e} (C^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + C e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}})$$

dargestellt. Im übrigen sei auf die zitierte Arbeit verwiesen.

Die Faktoren der Operatorenausdrücke in (75) stellen die Matrixelemente für die entsprechenden Übergänge dar. So ist der Faktor des Gliedes  $a' a'^*$  das Matrixelement des Überganges, bei dem das Lichtquant  $\mathbf{k}'$  absorbiert und das Lichtquant  $\mathbf{k}$  emittiert wird; es lautet

$$H_{,,} = 2\pi e^2 \frac{(\mathbf{e}' \cdot \mathbf{e}'')}{\sqrt{\varepsilon' \varepsilon'' k' k''}} \quad (76)$$

Die in  $e$  linearen Glieder entsprechen Emission oder Absorption eines Lichtquants und liefern die Matrixelemente für indirekte Übergänge. Es sind folgende Übergangsmöglichkeiten aus dem Anfangszustand in den Zwischenzustand in Betracht zu ziehen:

- I. Absorption von  $\mathbf{k}'$  durch  $\mathbf{p}'$ ;
- II. Emission von  $\mathbf{k}''$  durch  $\mathbf{p}'$ ;
- III. Emission von  $\mathbf{k}''$  bei Entstehung des Paares  $\mathbf{p}''$ ,  $-\mathbf{p}'' - \mathbf{k}''$ ;
- IV. Absorption von  $\mathbf{k}$  bei Entstehung des Paares  $\mathbf{p}''$ ,  $-\mathbf{p}'' + \mathbf{k}$ .

<sup>19)</sup> W. Pauli u. V. Weißkopf, Helv. Phys. Acta 7, 718, 1934.



Die Operatoren, die diese Übergänge darstellen, und die ihnen entsprechenden Matrixelemente lauten:

$$a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}^* : H_I' = -e (\mathbf{e}' \mathbf{p}') \sqrt{2\pi/k' \varepsilon' \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}} , \quad (77 \text{ I})$$

$$a_{\mathbf{p}'} a_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}'}^* : H_{II}' = +e (\mathbf{e}' \mathbf{p}') \sqrt{2\pi/k' \varepsilon' \varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}'}} , \quad (77 \text{ II})$$

$$a_{\mathbf{p}''}^* b_{-\mathbf{p}''-\mathbf{f}''} : H_{III}' = -e (\mathbf{e}'' \mathbf{p}'') \sqrt{2\pi/k'' \varepsilon'' \varepsilon_{-\mathbf{p}''-\mathbf{f}''}} , \quad (77 \text{ III})$$

$$a_{\mathbf{p}''}^* b_{-\mathbf{p}''+\mathbf{f}''} : H_{IV}' = -e (\mathbf{e}'' \mathbf{p}'') \sqrt{2\pi/k'' \varepsilon'' \varepsilon_{-\mathbf{p}''+\mathbf{f}''}} . \quad (77 \text{ IV})$$

Für den Übergang aus dem Zwischenzustand in den Endzustand ergibt sich

$$a_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'} a_{\mathbf{p}''}^* : H_I' = -e (\mathbf{e}'' \mathbf{p}'') \sqrt{2\pi/k'' \varepsilon'' \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}} \text{ usw.} \quad (77 \text{ I}')$$

Der Faktor  $1/2$  des in  $e$  linearen Teiles von (75) tritt hier nicht auf, da z. B.

$$(\mathbf{e}', \mathbf{p}' + \mathbf{p}) = (\mathbf{e}', 2\mathbf{p}' + \mathbf{f}') = 2(\mathbf{e}' \mathbf{p}')$$

wird, wenn man  $\mathbf{p}$  durch den Impuls des Teilchens im Zwischenzustand I,  $\mathbf{p}' + \mathbf{f}'$ , ersetzt. Analoge Beziehungen gelten für die anderen Übergänge.

Schließlich benötigen wir noch die Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Zwischenzuständen. Da die Gesamtenergie im Anfangszustand  $\varepsilon' + \mathbf{f}'$ , im Zwischenzustand I:  $\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}$ , II:  $k' + k'' + \varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}''}$  ist, wird

$$E^A - E^I = \varepsilon' + k' - \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}, \quad E^A - E^{II} = \varepsilon' - k'' - \varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}''} \text{ usw.} \quad (78)$$

Berücksichtigt man noch die Erhaltungssätze  $\varepsilon' + k' = \varepsilon'' + k''$ ,  $\mathbf{p}' + \mathbf{f}' = \mathbf{p}'' + \mathbf{f}''$ , so erhält man durch Einsetzen von (76), (77) und (78) in (20)

$$h_{,,} = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{\varepsilon' \varepsilon'' k' k''}} \left\{ (\mathbf{e}' \mathbf{e}'') + \frac{(\mathbf{e}' \mathbf{p}') (\mathbf{e}'' \mathbf{p}'')}{\varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}} \left[ \frac{1}{\varepsilon' + k' - \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}} + \frac{1}{-\varepsilon'' - k'' - \varepsilon_{\mathbf{p}''+\mathbf{f}''}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{e}' \mathbf{p}'') (\mathbf{p}' \mathbf{e}'')}{\varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}''}} \left[ \frac{1}{\varepsilon' - k'' - \varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}''}} + \frac{1}{-\varepsilon'' + k' - \varepsilon_{\mathbf{p}''-\mathbf{f}'}} \right] \right\}, \quad (79)$$

Machen wir ferner von den Beziehungen

$$(\varepsilon' + k')^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}'+\mathbf{f}'}^2 = 2[\varepsilon' k' - (\mathbf{p}' \mathbf{f}')] ]$$

und

$$(\varepsilon' - k'')^2 - \varepsilon_{\mathbf{p}'-\mathbf{f}''}^2 = 2[\varepsilon' k'' - (\mathbf{p}' \mathbf{f}'')] ]$$

Gebrauch, so können wir (59) zu

$$h_{,,} = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{\varepsilon' \varepsilon'' k' k''}} \left[ (\mathbf{e}' \mathbf{e}'') + \frac{(\mathbf{e}' \mathbf{p}') (\mathbf{e}'' \mathbf{p}'')}{\varepsilon' k' - (\mathbf{p}' \mathbf{f}')} - \frac{(\mathbf{e}' \mathbf{p}'') (\mathbf{p}' \mathbf{e}'')}{\varepsilon' k'' - (\mathbf{p}' \mathbf{f}'')} \right] \quad (79')$$

umformen. Im Schwerpunktsystem vereinfacht sich (79') mit  $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon$ ,  $k' = k'' = p' = p'' = p$ ,  $\mathbf{p}' = +\mathbf{f}'$  und  $\mathbf{p}'' = -\mathbf{f}''$  zu

$$h_{,,} = \frac{2\pi e^2}{\varepsilon p} \left[ (\mathbf{e}' \mathbf{e}'') - \frac{(\mathbf{e}' \mathbf{p}'') (\mathbf{e}'' \mathbf{p}')}{\varepsilon p + (\mathbf{p}' \mathbf{p}'')} \right]. \quad (80)$$

Von dieser Formel sind wir in Abschnitt 2a ausgegangen.

# Über den Wertebereich der physikalischen Mengen. I.

Von J. Barnóthy in Budapest.

(Eingegangen am 13. August 1942.)

Die physikalischen Vorgänge bestehen aus der Änderung der koordinierten Mengen des Raumes, der Zeit und der Masse. Der unseren Beobachtungen zugängliche Bereich — unser physikalischer Lebensraum — ist hinsichtlich aller drei Mengen begrenzt. Unsere größten astronomischen Fernrohre dringen bis zu Entfernungen von 200 Millionen Lichtjahre in den Weltraum ein; die Größe der Masse, von deren Existenz wir solcherart noch Kunde erhalten, ist ungefähr  $10^{48}$  g; und die angehäuften Zerfallsprodukte von radioaktiven Elementen lassen auf eine Vergangenheit von höchstens 2 Milliarden Jahre schließen. Doch ist unser physikalischer Lebensraum nicht nur in der Richtung der großen, sondern auch in der Richtung der kleinen Mengen begrenzt. Die kleinste beobachtete Masse ist die Masse des Elektrons; als kleinste beobachtete Entfernung kann diejenige betrachtet werden, auf die sich ein  $\alpha$ -Teilchen einem Kern annähern kann, was ungefähr  $10^{-13}$  cm ist; und die kleinste bis jetzt direkt gemessene Zeitdifferenz betrug  $10^{-10}$  sec. Unser physikalischer Lebensraum wird von den angeführten sechs Fällen in wenigstens vier Fällen durch die Grenzen der Leistungsfähigkeit unserer physikalischen Methoden und Apparate begrenzt.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob mit der Verbesserung und Vervollkommnung unserer physikalischen Einrichtungen und mit der Erfindung neuer Methoden diese Grenzen sich fortwährend erweitern werden, oder ob in dem Aufbau der Natur Schranken existieren, deren Überschreitung durch keinerlei Vervollkommnung unserer Beobachtungstechnik erzwungen werden kann, die also endgültig den beobachtbaren und so meßbaren Bereich der physikalischen Mengen festsetzen.

Die kosmologischen Folgerungen der Relativitätstheorie führen bekanntlich zu dem Ergebnis, daß unsere Welt infolge der Raumkrümmung eine endliche Ausdehnung und endliche Masse besitzt; der Wertebereich des Raumes und der Masse würde somit in der Richtung der großen Mengen — von der Leistungsfähigkeit unserer physikalischen Apparate unabhängig — endgültig begrenzt sein. Der empirische Befund, daß kleinere Ladungen, wie die Elementarladung, und kleinere Drehimpulse, wie der Spin der Elementarteilchen bis jetzt nicht beobachtet wurden, insbesondere aber, daß diese Mengen immer nur als ganzzahlige Vielfache der kleinsten Mengen

vorkommen, berechtigt andererseits zu der Annahme, daß der Wertebereich der elektrischen Ladung und des Drehimpulses in der Richtung der kleinen Mengen endgültig begrenzt ist und die untere Grenze dieser Mengen mit der Elementarladung bzw. mit  $h/4\pi$  übereinstimmt.

Auf die angeführten Beispiele gestützt, wollen wir nun folgenden Ansatz machen:

*Der meßbare Wertebereich der physikalischen Mengen ist endlich* und untersuchen, zu welchen Folgerungen die konsequente Anwendung dieses Ansatzes — den wir im folgenden der Einfachheit halber das Prinzip der Endlichkeit bezeichnen wollen — führt.

Jede physikalische Messung besteht letzten Endes aus der experimentellen Bestimmung der Größenverhältnisse von Mengen gleicher Dimension. Unter den Grenzen des meßbaren Wertebereiches einer Menge ist somit die größte bzw. die kleinste miteinander experimentell vergleichbare Menge zu verstehen. Wählen wir die so definierte kleinste Menge als Maßeinheit, so wird der Begriff des Wertebereiches mit dem Wert der größten Verhältniszahl identisch. Das Prinzip der Endlichkeit besagt nun, daß diese größte Verhältniszahl für alle meßbaren Mengen (also nicht nur für die Grundmengen) von endlicher Größe ist. Das Prinzip will aber nicht behaupten, daß der Wertebereich der Mengen auch für das ganze Weltall im weiteren Sinne endlich ist. Wir können vorderhand z. B. nicht wissen, ob außer dem Raumbereich, der unseren Weltraum darstellt, keine weiteren eventuell ähnlich beschaffene Räume existieren. Da jedoch die Geometrie unseres Weltraumes ein Verlassen desselben und ein Übertreten in diese eventuell existierenden anderen Räume von vornherein ausschließt, sind diese Räume für uns unzugänglich und gehören demzufolge nicht zu dem für uns meßbaren Wertebereich. Untersuchen wir vorerst den Wertebereich der drei Grundmengen.

*Der Wertebereich des Raumes und der Materie.* Die kosmologischen Folgerungen der Relativitätstheorie erklären die Art des Zustandekommens der oberen Grenze des Wertebereiches des Raumes und der Masse. Wir können uns infolgedessen auf die Frage der vom Prinzip der Endlichkeit verlangten unteren Grenze beschränken, d. h. uns der Bestimmung des kleinsten Raumes und der kleinsten Masse, des Elementarraumes und der Elementarmasse zuwenden.

Der leere Raum ist physikalisch unbeobachtbar und entbehrt so jeden physikalischen Inhalt. Die Existenz des Elementarraumes erfordert somit, daß er mit einer solchen Substanz ausgefüllt sei, welche physikalisch beobachtbar ist: ein Beobachter muß auf ihn eine Kraft ausüben können.

und die Substanz soll der Wirkung der Kraft einen Widerstand leisten. Eine Substanz von solchen Eigenschaften ist die gravitierende und träge Masse. Der Elementarraum mit der zugeordneten Elementarmasse entspricht dem Begriff des Elementarteilchens. Selbstverständlich ist es eine andere Frage, ob die heute unter diesem Sammelnamen bekannten Teilchen, wie Elektron, Proton usw. tatsächlich kleinste, also Elementarteilchen sind.

Die althergebrachte Vorstellung von der Raumerfüllung der Materie steht jedoch — wie dies schon von M. von Laue<sup>1)</sup> bemerkt wurde — im Widerspruch mit der Existenz kleinster Teilchen. Erfüllt nämlich die Materie eines kleinsten Teilchens in dem gewöhnlichen Sinne einen Raum — mag dieser auch noch so klein sein —, so kann man ihn und damit das Teilchen immer noch in kleinere Teile aufteilen. Man kommt so zwingenderweise auf die Frage: was geschieht, wenn diese Unterteile des Teilchens sich gegeneinander verschieben? Wir müssen uns somit wiederum mit dem Verhalten kleinerer Teilchen als die kleinsten Teilchen befassen usw. Andererseits führt die raumlose, punktförmige Vorstellung der Elementarteilchen zu unüberwindlichen Schwierigkeiten wegen der unendlichen Selbstenergie des elektrischen Feldes, und es treten auch noch andere Divergenzschwierigkeiten auf. March<sup>2)</sup> postuliert zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten für jede Ortsbestimmung eine Ungenauigkeit  $l_0$  und umgeht hiermit die Frage der Raum- oder Punktförmigkeit der Elementarteilchen.

Ich glaube, daß man dem Prinzip der Endlichkeit und der Existenz kleinster Teilchen Genüge leisten kann, ohne dabei die althergebrachte Auffassung von der Raumerfüllung der Materie ganz aufgeben zu müssen. Das Prinzip der Endlichkeit schließt nämlich die Existenz von Unterteilen der Elementarteilchen nicht aus, und auch der von Laue erwähnte Widerspruch ist nicht durch die Existenz der Unterteile verursacht. Das Prinzip der Endlichkeit ist erfüllt, wenn die individuelle Beobachtung dieser Unterteile des Elementarteilchens und ihre gegenseitige Verschiebung seitens eines in unserem Weltraum befindlichen Beobachters unmöglich ist. Wird diese Forderung erfüllt, so ist auch der erwähnte Widerspruch beseitigt.

Zu lösen bleibt die Frage, auf welcher Art die Natur die endgültige Abgrenzung des Elementarraumbereiches von unserem Weltraum zustande bringt. Im Falle der oberen Grenze erfolgt die Abgrenzung mittels der nicht-Euklidischen Geometrie. Versuchen wir, ob diese Methode auch bei der unteren Grenze zum Ziele führt, indem wir die Annahme machen, daß

---

<sup>1)</sup> M. v. Laue, Naturwiss. 22, 439, 1934. — <sup>2)</sup> A. March u. E. Foradori, ZS. f. Phys. 114, 215, 1939.

in dem Elementarraumbereich die Raumkrümmung überall um einen endlichen Wert größer ist als in seiner nächsten Umgebung, d. h. als wie in unserem Weltraum. Dieser Zustand kann physikalisch verwirklicht werden und auch das physikalische Gleichgewicht des Systems bleibt bekanntlich gewahrt, falls die Materie im Elementarraum eine gleichmäßige Verteilung und eine solche Dichte besitzt, daß die Gesamtmasse mit der negativen trägen Masse ihrer Gravitationsenergie gerade im Gleichgewicht steht. Da ein solches System keine resultierende Masse hat, verändert es die Raumkrümmung außerhalb des Elementarraumbereiches nicht. Wegen der kleinen Abmessung der Elementarteilchen kann unser Raum in der nächsten Umgebung der Elementarteilchen als euklidisch betrachtet werden: wogegen der Elementarraum überall endliche konstante Krümmung besitzt.

Die Berührungspunkte zweier Räume bilden eine „Schnittfläche“, deren Dimension ( $m$ ) durch

$$m = i_1 + i_2 - k \quad (1)$$

gegeben ist, wo  $i_1$  und  $i_2$  die Dimensionszahlen der sich berührenden Räume und  $k$  die Dimensionszahl desjenigen Raumes bezeichnet, in dem der Schnitt vollzogen werden kann. In unserem Falle sind beide Räume dreidimensional, der Elementarraum jedoch wegen seiner Krümmung nur in einem vierdimensionalen Raum einbettbar, so daß  $k = 4$  wird. Aus der Gleichung folgt  $m = 2$ , die Schnittfläche ist also zweidimensional und besitzt, infolge der konstanten Krümmung und endlichen Ausdehnung des Elementarraumes, gleichfalls konstante absolute Krümmung und endliche Ausdehnung: ist also eine geschlossene Fläche. Diese Schnittfläche, die wir Elementarfläche nennen wollen, stellt eine singuläre Stelle innerhalb unseres euklidischen Raumes dar, an deren Ort die Raumkrümmung unendlich groß wird.

Entsprechend der Unterteilbarkeit des Raumes müssen wir uns auch die Materie im Elementarraum aus kleineren Teilchen bestehend vorstellen, deren Verteilung eine ähnliche sein kann wie die der Materie in unserem Weltraum. Diese Unterteilchen können den Elementarraum wegen seiner Geschlossenheit nicht verlassen. Für sie existiert überhaupt kein Raum außerhalb des Elementarraumbereiches. Auch ein Eindringen von unserem Raum aus in den Elementarraum ist unmöglich, selbst wenn wir Probekörper von der Kleinheit dieser Unterteilchen der Elementarteilchen zur Verfügung hätten, was wohl nicht der Fall ist. Man kann sich nämlich an einem zweidimensionalen Analogon auch anschaulich davon überzeugen, daß das Probekörperchen, wenn es unseren Raum verlassend in den Elementarraumbereich übertreten will, von der Schnittstelle angefangen sich



in einer Richtung weiterbewegen müßte, die auf unsere drei räumlichen Koordinaten senkrecht steht und so für uns imaginär ist, ebenso wie die Bewegung der Teilchen in dem Elementarraum. Wir können uns infolgedessen auf keinerlei Weise von der individuellen Existenz oder Bewegung der Teilchen im Elementarraum überzeugen; unser Raum endet an der Elementarfläche. Wir gelangen somit zu dem Ergebnis:

*Die beobachtbare geometrische Form der Elementarteilchen ist eine geschlossene Fläche von konstanter absoluter Krümmung, die denjenigen Teil unseres Raumes, den sie umschließt, für uns unzugänglich macht. Infolge dieses letzteren Umstandes besitzen die Elementarteilchen die Eigenschaften von weiter nicht unterteilbaren dreidimensionalen Körpern.*

Ich bin der Ansicht, daß diese Lösung des Problems den Widerspruch zwischen der Existenz kleinster Teilchen und der Materieerfüllung des Raumes beseitigt. Selbstverständlich bleibt noch die Frage offen, durch welche Wirkung der Materie des Elementarraumes die Elementarteilchen überhaupt zur Beobachtung gelangen, da einerseits die Gesamtenergie ihres Systems Null ist und es so keine reelle träge Masse haben kann, und andererseits zwischen unserem und dem Elementarraumbereich keine im gewöhnlichen Sinne genommene physikalische Wechselwirkung stattfinden kann. Ich möchte mich mit dieser Frage erst später befassen und hier nur auf eine Folgerung hinweisen, die schon aus der geometrischen Gestalt der Elementarfläche ableitbar ist und die darauf hinweist, daß unser Elementarteilchen dem Elektron, dem Positron und dem Proton entspricht.

Die einfachsten — die kleinste Zahl von Singularitätsstellen aufweisende — Formen der Flächen konstanter, absoluter Krümmung sind Umdrehungsflächen. Die Gleichung ihrer Meridiankurve lautet <sup>1)</sup>:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{c - Kx^2} - 1, \quad (2)$$

wo  $K$  die absolute Gaußsche Krümmung der Fläche und  $c$  eine Konstante ist. Die Fläche ist nur in dem Falle geschlossen, wenn  $0 < c < 1$  ist.

Ist  $K > 0$  und  $c = 1$ , so ist die Meridiankurve ein Kreis und die Umdrehungsfläche eine Kugeloberfläche von der absoluten Krümmung  $K = 1/r_0^2$ , wo  $r_0$  den Radius des größten Kreises bedeutet.

Ist  $K < 0$  und  $c = 0$ , so liefert die Gleichung als Meridiankurve die Traktrix, deren Umdrehungsfläche, die Pseudosphäre, die einfachste Fläche konstanter negativer Krümmung mit  $K = -1/r_p^2$  ist, wo  $r_p$  den Radius des größten Kreises der Pseudosphäre bedeutet.

<sup>1)</sup> M. v. Laue, Die Relativitätstheorie, II. Bd. Leipzig, Teubners Verlag.

Die Achsenlänge der Pseudosphäre ist jedoch unendlich und der Anschmiegewinkel der Meridiankurve an die Drehachse  $\sqrt{c} = 0$ . Dies würde dem Prinzip der Endlichkeit widersprechen, denn ein geometrischer Winkel ist eine meßbare Menge.  $\sqrt{c}$  kann nicht kleiner sein als der kleinste Fehler  $\Delta$ , den man bei der Festlegung einer Richtung begeht:

$$\sqrt{c} \geq \Delta. \quad (3)$$

Eine Richtung kann mit Hilfe zweier Ortszeichen festgelegt werden. Wählen wir Elementarteilchen als Ortszeichen, die sich in der Entfernung  $l$  voneinander befinden, so ist die Unbestimmtheit in der Richtung eines dritten Elementarteilchens, das sich von dem einen Ortszeichen in der Richtung nach dem anderen bewegt, wegen der endlichen Ausdehnung  $r$  der Elementarteilchen  $\pm 2 \frac{r}{l}$ . Außerdem weicht die Anfangsrichtung des bewegten Teilchens, wegen der Raumkrümmung, von der „euklidisch geraden“ Verbindungslinie der Ortszeichen um einen Winkel  $\pm \frac{l}{2 R_U}$  in unbestimmter Richtung ab, wenn  $R_U$  den Krümmungsradius des Weltraumes bezeichnet. Der kleinstmögliche Fehler ist im optimalen Falle ( $l \sim \sqrt{r R_U}$ )

$$\Delta \approx \sqrt{\frac{r}{R_U}} \sim 10^{-20}, \quad (4)$$

woraus die Achsenlänge der Pseudosphäre, aus der Gleichung der Traktrix abgeleitet, sich zu

$$a = r_P \left( \ln 4 \sqrt{\frac{1}{c}} - 1 \right) = r_P \left( \ln \frac{4}{\Delta} - 1 \right) = 46,4 r_P \quad (5)$$

berechnet.

Mit Hilfe langsamer Elektronen ausgeführte Streuversuche führten zu dem Ergebnis, daß die Ausdehnung des Elektrons mit der Größe von der Dimension einer Länge übereinstimmt, die aus der Elementarladung und der Ruheenergie des Elektrons gebildet werden kann:

$$r_0 = \frac{e^2}{E_0}. \quad (6)$$

Diese — gewöhnlich als klassischer Elektronradius bezeichnete Länge — spielt bekanntlich auch in der Kernphysik eine wesentliche Rolle. Auf unser Elementarteilchen angewendet kann die Formel (6) so gedeutet werden, daß zwischen der Ladung und der Ruheenergie der Elementarteilchen und der Ausdehnung der Elementarfläche der obige fundamentale Zusammenhang besteht. Aus diesem Gesichtspunkt betrachtet, kann aber die Gleichung nicht als vollständig angesprochen werden, denn einerseits

nimmt sie das Vorzeichen der elektrischen Ladung und der Ruheenergie nicht in Betracht und ist infolgedessen z. B. auf das Positron schon nicht mehr anwendbar; andererseits ist die Ausdehnung der Elementarfläche durch eine einzige Länge, dem Krümmungsradius, noch nicht vollständig bestimmt. Umdrehungsflächen konstanter Krümmung erfordern noch die Kenntnis ihrer Achsenlänge. Wir wollen deshalb die Gleichung in die folgende Form umschreiben:

$$\frac{1}{aK} = -\frac{e}{E}|\varepsilon|, \quad (7)$$

wo  $a$  und  $K$  wie oben die Achsenlänge und absolute Krümmung bedeuten und  $|\varepsilon|$  der Absolutwert der Elementarladung ist, der in der Formel die Rolle einer allgemeinen Naturkonstante spielt. Das negative Vorzeichen entspringt der Konvention, demzufolge wir der Ladung des Elektrons negatives Vorzeichen zuschreiben. Für den Fall der Kugeloberfläche, wo  $a = r_0$  ist, geht Gleichung (7) in die ursprüngliche Form (6) über. Vorausgesetzt, daß die größte Ausdehnung der verschiedenen Elementarteilchen nicht wesentlich voneinander abweicht, liefert die Formel (7) — je nach dem Vorzeichen der Elementarladung und der Krümmung der Elementarfläche — folgende vier Variationen:

Tabelle 1.

$K$	$\varepsilon$	$E$	$m$	$r$	Form	Name
+	+	—	$m_0$	$r_0$	Kugeloberfläche	Positron
+	—	+	$m_0$	$r_0$	„	Elektron
—	+	+	$2150 m_0$	$r_P 46,4$	Pseudosphäre	Proton
—	—	—	$2150 m_0$	$r_P 46,4$	„	Negatives Proton

Unsere bisherigen Betrachtungen geben also bis zu einem gewissen Grade eine Erklärung für das Massenverhältnis des Elektrons und des Protons, weiter, warum sich die Ladung des Positrons und des Protons im Vorzeichen von dem des Elektrons unterscheidet. Sie sprechen außerdem für die Existenz eines negativen Protons, also eines dem Elektronenpaar entsprechenden Protonenpaar. Wir werden im späteren sehen, daß das beschriebene „Modell“ die Berechnung der Größe der elektrischen Ladung, der Masse, des Dreh- und des magnetischen Momentes des Elektrons und des Protons mit einer Genauigkeit erlaubt, die innerhalb der Fehlergrenzen mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt.

Es wirkt vielleicht befremdend, wenn wir hier von einer genauen Ausdehnung und Gestalt der Elementarteilchen reden, wo doch schon ihr Ort nur ungenau bestimmbar ist. Auch die Impulsmasse eines Elektrons unterliegt der

Ungenauigkeitsrelation, nichtsdestoweniger ist die Ruhemasse genau bestimmbar. Ausdehnung und Gestalt haben ebenso wie Ruhemasse (im Gegensatz zu dem Ort und der Impulsmasse) für sämtliche gleichartige Elementarteilchen denselben Wert und sind durch wiederholte Messungen „beliebig“ genau bestimmbar bzw. aus anderen Daten theoretisch ableitbar.

*Der Wertebereich der Zeit.* Die physikalische Forschung wird durch das Vertrauen auf die ununterbrochene stetige Gesetzmäßigkeit aller physikalischer Vorgänge gerechtfertigt. Eine stetige physikalische Gesetzmäßigkeit schließt einen Zustand, dem kein physikalisches Ereignis vorausgegangen war, aus. Da der Zeitbegriff mit der Existenz physikalischer Vorgänge identisch ist, folgt hieraus, daß die Zeitkoordinate sowohl in der Richtung der Vergangenheit wie der Zukunft unendlich ist und kein absoluter Anfangspunkt existieren kann. Wir können aus diesem Umstand die für das Folgende wichtige Folgerung ziehen, daß

*die Form der physikalischen Gesetze und der Zahlenwert der physikalischen Konstanten im Laufe der Zeit keine dauernde meßbare Veränderung erleiden können* (Konstanzprinzip).

Die Änderung der Form der physikalischen Gesetze und die Änderung des Zahlenwertes der physikalischen Konstanten würde in allen Fällen unbedingt die Änderung des Zahlenwertes einer meßbaren Menge nach sich ziehen. Was diese Änderung für eine Funktion der Zeit auch sein mag, führt sie nach genügend langer, jedoch endlicher Zeit notwendigerweise zu dem Ergebnis, daß die betreffende Menge die Grenze ihres meßbaren Wertebereiches überschreitet und demzufolge die mit ihr verbundene physikalische Erscheinung aus dem Bereich der beobachtbaren Erscheinungen ausscheidet. Mit Hinsicht auf die Unendlichkeit der Vergangenheit wäre dieser Zustand für alle diejenigen physikalischen Erscheinungen schon eingetreten, die dem Konstanzprinzip nicht unterworfen waren. Und im Falle, daß die Änderung eine solche Funktion der Zeit wäre, daß die betreffende meßbare Menge asymptotisch einem endlichen Wert zustrebt, wäre die Annäherung an diesen Wert schon unendlich fortgeschritten und die betreffende Menge einer konstanten Menge gleichwertig.

Solche zeitlichen Änderungen demgegenüber, bei denen sämtliche mit der veränderlichen Menge vergleichbaren Mengen — so auch die Wertebereichsgrenzen — eine gleich große Veränderung erfahren, führen auch nach Ablauf unendlich langer Zeiten nicht zum Aufhören der Beobachtbarkeit der betreffenden Menge und der mit ihr verbundenen Phenomene; doch ist in diesem Falle auch die Veränderung selbst auf keinerlei Weise beobachtbar und steht so nicht im Widerspruch mit dem Konstanzprinzip.

Auf einer unendlichen Koordinatenachse ist mangels eines absoluten Anfangspunktes auch keine absolute Ortsbestimmung ausführbar. Wir können daher das Konstanzprinzip auch in der Form aussprechen:

*Die physikalischen Umstände erleiden keine solche Veränderungen, mit deren Hilfe eine absolute Zeitangabe möglich wäre.*

Das Prinzip ist in dieser Form nur die Ausdehnung der Relativität der räumlichen Koordinaten auf die Zeitkoordinate.

Wie steht es jedoch mit den Theorien der fortwährend expandierenden Weltsysteme? Der Grad der Expansion, die momentane Massendichte, kann als absolutes Zeitzeichen betrachtet werden. Die diesbezüglichen kosmologischen Betrachtungen gehen jedoch von einem unbekannten, vor endlicher Zeit abgelaufenen und außerhalb der heutigen physikalischen Gesetze stehenden Schöpfungsakt aus; sie sind infolgedessen nicht mit einer stetigen physikalischen Gesetzmäßigkeit vereinbar. Eine Ausnahme scheint das Lemaitresche Universum zu bilden, welches bekanntlich aus einem schon existierenden Einsteinschen statischen Universum entstanden ist. Das statische Universum befindet sich nach den Friedmanschen Gleichungen in einem labilen Gleichgewichtszustand. Eine noch so geringe Störung seines Gleichgewichts, z. B. die Verminderung seiner Masse oder des Strahlendruckes, zieht eine immer schneller anwachsende Expansion nach sich. War die Störung des Gleichgewichts unendlich klein, so ist auch die Anfangsbeschleunigung der Expansion unendlich klein und die seit Anfang der Expansion verflossene Zeit kann — obzwar der bisher erreichte Expansionsgrad nur von endlicher Größe ist — unendlich lang sein. Es scheint also, als ob ein Lemaitresches Universum keine ad hoc-Hypothese zu ihrer Entstehung benötigte. In der Wirklichkeit kann aber nicht mit einer unendlich kleinen Störung des ursprünglichen Gleichgewichts gerechnet werden. Es genügt z. B., daß ein Photon sich in ein Elektronenpaar umwandle, die hierdurch eintretende Verminderung des Strahlungsdruckes verursacht schon eine mit endlicher Geschwindigkeit beginnende Expansion. Auch in dem — dem heutigen Zustand vorausgegangenen — statischen Zustand unseres Weltsystems kann das Eintreten solcher und ähnlicher Vorgänge bei einer stetigen physikalischen Gesetzmäßigkeit nicht ausgeschlossen werden. Daraus folgt, daß seit Beginn der Expansion nur eine endliche Zeit verflossen sein konnte und auch der statische Zustand nur kurze Zeit andauerte. Wir sind somit wiederum gezwungen, entweder das statische Universum aus einem unbekannten, der Expansion kurz vorausgegangenen Entstehungsakt hervorgehen zu lassen, oder aber vorauszusetzen, daß in dem statischen Universum die



physikalischen Vorgänge, bis zu einem in endlicher Vergangenheit liegenden Zeitpunkt, sozusagen eingefroren waren. Am wenigsten widersprechend wäre — da es keinen von den heutigen abweichenden physikalischen Zustand erfordert —, daß das Gleichgewicht des statischen Universums doch auf irgendeine Weise gesichert wird. Wenn auch in diesem Falle eine gewisse Oszillation erfolgen kann, schließt diese Lösung selbstverständlich die Existenz eines stetig expandierenden Lemaitre-Universums aus. Wir kommen also letzten Endes auf das Ergebnis, daß die Theorien der andauernd expandierenden Weltsysteme sich nicht mit einer stetigen physikalischen Gesetzmäßigkeit vereinbaren lassen und wir deshalb im folgenden von der Existenz solcher Weltsysteme absehen dürfen.

Die Zeit kann mit Hilfe ablaufender Naturereignisse gemessen werden. Aus unseren obigen Betrachtungen folgt, daß, falls man von dem Einfluß der äußeren Umstände absehen kann, das Verhältnis der Ablaufgeschwindigkeit der physikalischen Vorgänge zeitlich konstant bleibt; denn im entgegengesetzten Falle könnte das momentane Verhältnis der Ablaufgeschwindigkeiten als absolutes Zeitzeichen benutzt werden. Die Messung der Zeit wird der Möglichkeit nach auf solche Naturvorgänge zurückgeführt, deren Ablaufgeschwindigkeit, nach den sie bestimmenden physikalischen Gesetzen zu urteilen, von den äußeren Umständen nicht beeinflußt wird. Strenggenommen existieren nach unserem heutigen Wissen nur zwei solche „natürliche Uhren“: der Umlauf der Atomelektronen und der Zerfall der radioaktiven Elemente. Für praktische Zwecke wird die Zeitmessung auf die Umdrehungszeit der Erde zurückgeführt. Aus dem konstanten Verhältnis der Ablaufgeschwindigkeit sämtlicher Naturvorgänge folgt, daß die Zeiteinheiten aller Naturvorgänge, sämtlicher natürlichen Uhren, jederzeit mit der Zeiteinheit der Atomuhr als identisch betrachtet werden können.

Nur die vergangene Zeit ist meßbar. Wir können aber mit Hilfe einer beliebig gewählten Zeiteinheit  $\delta t$  sowohl in der Vergangenheit wie in der Zukunft mit Zeitmengen rechnen. Es ist zweckmäßig und gebräuchlich, hierbei die Zeiteinheit so zu wählen, daß sie im Augenblick der Gegenwart mit der natürlichen Zeiteinheit, mit der Zeiteinheit der Atomuhr  $\delta \tau$ , übereinstimmt, und außerdem den Anfangspunkt der berechneten Zeit  $t$  mit dem Augenblick der Gegenwart zusammenfallen zu lassen. Zur Zeit

$$t = 0 \quad \text{ist} \quad \delta t = \delta \tau. \quad (8)$$

So läßt sich z. B. die zukünftige Lebensdauer eines Sternes auf Grund der heute in der Zeiteinheit ausgestrahlten Energie berechnen.

Der Gang der natürlichen Uhren braucht nicht ab ovo zeitlich konstant zu bleiben; die Länge der natürlichen Zeiteinheit kann sich mit der Zeit ändern. Obzwar diese Änderung noch unbekannt ist, folgt aus der Gesetzmäßigkeit aller Naturvorgänge, daß die Zeiteinheit der Atomuhr als Funktion der berechneten Zeit angegeben werden kann.

$$\delta\tau = \delta t f(t). \quad (9)$$

Mit Hinsicht auf (8) ist

$$f(0) = 1. \quad (10)$$

Der Zahlenwert einer gemessenen Menge ist der Größe ihrer Maßeinheit umgekehrt proportional

$$d\tau = \frac{dt}{f(t)}. \quad (11)$$

Die Zeitdauer der gemessenen und berechneten Vergangenheit kann voneinander abweichen. Das Prinzip der Endlichkeit ist in Hinsicht der oberen Grenze des Wertebereiches der Zeit befriedigt, wenn die natürlichen Uhren so beschaffen sind, daß sie nur endliche Vergangenheit registrieren.

$$\tau_{max} = \int_0^{-\infty} \frac{dt}{f(t)} = \text{const} = -T \quad (T > 0). \quad (12)$$

Hieraus folgt, daß bei  $t = -\infty$ ,  $f(t) = \infty$  ist, also nach (9) die Länge der natürlichen Zeiteinheit in der Vergangenheit länger war, d. h. der Gang der natürlichen Uhren von der Vergangenheit nach der Zukunft hin sich beschleunigt. Das Prinzip der Endlichkeit erfordert jedoch diese Eigenschaft nur für solche Naturvorgänge, mit deren Hilfe eine andauernde Zeitmessung ausführbar ist. Die periodische Schwankung des elektromagnetischen Feldes kann zu keiner andauernden Zeitmessung verwendet werden, da die Quanten der elektromagnetischen Strahlung keine endlosen Wellenzüge sind. Infolgedessen enthält das Prinzip der Endlichkeit keinerlei Bedingung betreffs der zeitlichen Änderung der Frequenz, d. h. der Änderung der Zeiteinheit des emittierten Photons. Von der Photonenuhr wissen wir nur soviel, daß ihre Zeiteinheit im Augenblick der Emission mit der Zeiteinheit der Atomuhr übereinstimmt und — mit Hinsicht auf die Gesetzmäßigkeit sämtlicher Naturvorgänge — gleichfalls als irgendeine Funktion  $\varphi(t)$  der berechneten Zeit angegeben werden kann. Die Zeiteinheit  $\delta\vartheta$  eines im Augenblick der Gegenwart emittierten Photons ist mit Hinsicht auf (8)

$$\delta\vartheta = \delta\tau = \delta t. \quad (13)$$

Ist seit der Emission — in den Zeiteinheiten der Gegenwart gemessen —  $\Delta t$  Zeit verstrichen, so ist

$$\delta \vartheta = \delta \tau \varphi (\Delta t); \quad (14)$$

für  $\Delta t = 0$  wird

$$\varphi (0) = 1 \quad (15)$$

und mit Hinsicht auf (9)

$$\delta \vartheta = \delta t f(t) \varphi (\Delta t). \quad (16)$$

Experimentell kann man den Gang der Atomuhren mit dem Gang der Photonenuhr so vergleichen, daß man die am Ort  $A$  bzw.  $B$  emittierten Spektrallinien derselben Atomart, also die Frequenzzahl, die Zeiteinheit der Photonen, an einem solchen Ort vergleicht, der von  $A$  und  $B$  in verschiedener Entfernung liegt, z. B. in  $A$ . In diesem Falle wird am Orte  $A$

für das in  $A$  emittierte Photon  $t = 0$  und  $\Delta t = 0$ ,

für das in  $B$  emittierte Photon  $t = -\Delta t$  und  $\Delta t = \frac{AB}{c}$ .

Mit Hinsicht darauf, daß die Zeiteinheit der Photonenuhr mit der Zeitdauer einer Periode direkt, also mit der Frequenzzahl umgekehrt proportional ist, wird das beobachtete Verhältnis der Frequenzen nach (16)

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{f(-\Delta t)}{f(0)} \cdot \frac{\varphi(\Delta t)}{\varphi(0)}. \quad (17)$$

Zu welcher Zeit man auch diesen Versuch ausführt, muß er nach unseren obigen Betrachtungen immer zu demselben Ergebnis führen, da im entgegengesetzten Falle das momentan beobachtete Verhältnis der Frequenzen als absolutes Zeitzeichen benutzt werden könnte, besser gesagt, wäre das Verhältnis der Frequenzen heute nicht mehr beobachtbar. Weiterhin folgt aus dem Konstanzprinzip, daß weder die zeitliche Entfernung von  $A$  und  $B$ , noch die Form der Funktionen  $f(t)$  und  $\varphi(t)$  sich während der Zeit ändern können, und so zur Zeit  $t$

$$\frac{\nu_A}{\nu_B} = \frac{f(t - \Delta t)}{f(t)} \cdot \frac{\varphi(\Delta t)}{\varphi(0)}. \quad (18)$$

Aus (17) und (18) folgt mit Hinsicht auf (10)

$$f(t - \Delta t) = f(t) f(-\Delta t). \quad (19)$$

Bekanntlich ist die einzige stetige reelle Lösung dieser Funktionalgleichung die

$$f(t) = e^{kt} \quad (20)$$

Exponentialfunktion. In das Integral (12) eingeschrieben und in Betracht gezogen, daß das Integral nur dann konvergiert, wenn  $k < 0$  ist, erhalten wir als eindeutig bestimmte Funktion der Zeitbeschleunigung<sup>1)</sup>

$$f(t) = e^{-t/T}. \quad (21)$$

Die von den natürlichen Uhren registrierte Vergangenheit ist somit

$$\tau = T(e^{t/T} - 1). \quad (22)$$

Die auf Grund des Blei- und Heliumgehaltes ausgeführten Altersbestimmungen uranhaltiger Mineralien ergeben übereinstimmend  $(1,8 \pm 0,2) \cdot 10^9$  Jahre als obere Grenze für das Alter der Gesteine. Diese Zeit ist als die größte von den natürlichen Uhren registrierbare Vergangenheit  $T$  zu betrachten und keinesfalls so zu deuten, als wenn das Alter der Gesteine, der Erde oder unseres Weltsystems, in den heutigen Zeiteinheiten ausgedrückt, nur 2 Milliarden Jahre betragen würde.

Auch Milne<sup>2)</sup> kommt zu einer ähnlichen Funktionsform für das geologische Alter, jedoch unter der Voraussetzung, daß der radioaktive Zerfall sich gegenüber der Erdumdrehung beschleunigt. Nach der Auffassung von Milne besteht ein fundamentaler Unterschied zwischen der Kern- und Atomdynamik einerseits und der makroskopischen Dynamik, d. h. der Erdumdrehung, Planetenbewegung, Pendelschwingung usw. andererseits.

Aus der Größe von  $T$  berechnet sich die Beschleunigung der natürlichen Uhren, die Abnahme der Länge ihrer Zeiteinheiten in der Zeiteinheit zu

$$i = \frac{d\delta\tau}{d\tau} = -\frac{1}{T} = -(1,77 \pm 0,20) \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1}. \quad (23)$$

Obzwar die Beschleunigung außerordentlich geringfügig (6 % pro 100 Millionen Jahre) ist, verursacht sie in dem Spektrum von Sternen in einigen Millionen Lichtjahren Entfernung schon eine meßbare Rotverschiebung.

Aus (17) folgt mit Hinsicht, daß  $\frac{AB}{c} = \Delta t \ll T = 1,8 \cdot 10^9$  Jahre

$$\frac{\nu_A - \nu_B}{\nu_A} = 1 - \frac{e^{i\Delta t}}{\varphi(\Delta t)} \approx \frac{AB}{c} \left( \frac{1 - \frac{1}{\varphi(\Delta t)}}{\Delta t} - \frac{i}{\varphi(\Delta t)} \right). \quad (24)$$

Ist die Frequenzänderung der Photonen nach ihrer Emission im Vergleich mit der Beschleunigung der natürlichen Uhren klein, so kann das erste

<sup>1)</sup> Herrn Prof. J. Egerváry danke ich für die Diskussion des mathematischen Beweises der Funktionsform. — <sup>2)</sup> E. A. Milne, Proc. Roy. Soc. London (A) 158, 328, 1937.

Glied auf der rechten Seite der Gleichung in der Klammer vernachlässigt werden; die Rotverschiebung wird — solange die Entfernung des Sternes klein gegenüber  $1,8 \cdot 10^9$  Lichtjahren ist — in erster Näherung mit der Entfernung linear anwachsen. Nach den bisher bis 200 Millionen Lichtjahre Entfernungen ausgeführten Untersuchungen ist im Spektrum der Nebel und Nebelhaufen tatsächlich eine mit der Entfernung linear anwachsende Rotverschiebung zu beobachten:

$$\frac{\nu_A - \nu_B}{\nu_A} = \alpha \frac{A}{c}, \quad (25)$$

wo  $\alpha = (1,88 \pm 0,40) \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1}$  die Hubble-Konstante ist<sup>1)</sup>. Die Rotverschiebung kann auch als ein infolge der Expansion unseres Weltsystems auftretender Doppler-Effekt gedeutet werden. Besser gesagt, man folgert aus der beobachteten Rotverschiebung auf die Expansion des Weltalls. Diese Erklärungsmöglichkeit ist nach dem über die expandierenden Universume Gesagten auszuschließen, aber auch überflüssig, denn aus der annähernd gleichen Größe von  $\alpha$  und  $i$  können wir ersehen, daß die Zeitbeschleunigung ( $i$ ) den überwiegenden Teil ( $[94 \pm 24]\%$ ) der Rotverschiebung zu erklären imstande ist und auf die Frequenzänderung der Photonen höchstens  $[6 \pm 24]\%$  entfallen, ein Wert, der innerhalb der Fehlergrenzen bleibt. Obzwar es nicht zu leugnen ist, daß die Schätzungen betreffs der Genauigkeit der Hubble-Konstante sich in recht weiten Grenzen (20 bis 50%) bewegen<sup>2)</sup> und hier der kleinere Wert verwendet wurde, unterstützt dieses Ergebnis doch die Annahme, daß

$$\varphi(\Delta t) = 1, \quad (26)$$

ist, also die Frequenzzahl des emittierten Photons sich nicht ändert.

Schon A. Haas<sup>3)</sup> wies darauf hin, daß die Rotverschiebung der Nebelspektren nicht nur als Doppler-Effekt, sondern auch als Beschleunigung der natürlichen Uhren erklärt werden kann. In die Berechnungen ist jedoch ein Rechenfehler unterlaufen, indem irrtümlich  $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\nu_B}{\nu_A} = \frac{dt}{dt'}$ , anstatt  $\frac{\nu'}{\nu} = \frac{dt'}{dt}$  gesetzt wurde. Das richtige Ergebnis einer aus einer linearen Rotverschiebung abgeleiteten Zeitbeschleunigung ist  $t' = \tau = (\alpha t/2 + 1)t$ , woraus für die Vergangenheit — wie es auch zu erwarten ist —  $t'/t = \tau/t < 1$  folgt. Doch wird bei  $t = -2/\alpha$  die gemessene Zeit gemäß der Gleichung einen Vorzeichenwechsel erleiden woraus zu ersehen ist, daß diese Funktionsform der Beschleunigung der natürlichen Uhren ab ovo nicht der Wirklichkeit entsprechen kann.

<sup>1)</sup> ten Bruggencate, Naturwiss. 24, 609, 1936. — <sup>2)</sup> Es handelt sich um eventuelle systematische Fehler in der Entfernungsbestimmung der Nebel. — <sup>3)</sup> A. Haas, Naturwiss. 20, 316, 1932.



Der gewichtete Mittelwert der geologischen und astronomischen Messungen ergibt

$$i = - [1,79 \pm 0,04] \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1},$$

$$T = [5,59 \pm 0,14] \cdot 10^{16} \text{ sec}.$$

Wenden wir uns nun zur Bestimmung der unteren Grenze des Wertebereiches der Zeit zu. Sehr kurze Zeitspannen können gemessen werden, indem man zwischen zwei Ortszeichen die Laufzeit eines schnellbewegten Teilchens beobachtet. Die kleinste meßbare Zeitdifferenz hängt erstens von dem kleinsten möglichen Abstand der Ortszeichen und zweitens davon ab, wie lange das betreffende bewegte Teilchen das Ortszeichen überdeckt. Wählen wir für unser Gedankenexperiment sowohl für das bewegte Teilchen wie für die Ortszeichen Protonen als Teilchen kleinster Ausdehnung. Nach (7) ist, wenn  $a = r_0$  gesetzt wird,

$$r_P = r_0 \sqrt{\frac{m_0}{m_P}} = \frac{r_0}{43} = 6,6 \cdot 10^{-15} \text{ cm}. \quad (27)$$

Die kleinste Entfernung, auf die sich zwei Protonen annähern können, kann keinesfalls kleiner als  $2r_P$  sein. Denken wir uns den Beobachter an den Ort des einen Ortszeichens versetzt, so ist die zurückzulegende Strecke, da das Zeichen wieder an den Beobachter zurückgegeben werden muß, wenigstens  $4r_P$ . Die Anordnung kann als ein Elementarpendingel aufgefaßt werden. Bewegt sich der Pendelkörper mit nahezu Lichtgeschwindigkeit und berücksichtigen wir, daß der Durchgang durch das Ortszeichen, die Überdeckung, im besten Falle nur mit einem Fehler von  $\pm \sqrt{2} r_P$  beobachtbar ist, so beträgt die kleinste meßbare Zeit, die untere Grenze des Wertebereiches der Zeit:

$$T_0 = 2 \sqrt{4 + 2 + 2 \frac{r_P}{c}} = 1,24 \cdot 10^{-24} \text{ sec}. \quad (28)$$

Aus der registrierten Zeit der natürlichen Uhren kann man nach (22), da die Größe der Zeitbeschleunigung bekannt ist, die in den Zeiteinheiten der Gegenwart tatsächlich verflossene Zeit berechnen.

$$t = T \ln \frac{T - \tau}{T}. \quad (29)$$

Diese Berechnung hat aber nur solange einen Sinn, bis die Differenz  $T - \tau$  noch von beobachtbarer Größe ist, d. h. solange sie nicht die untere Grenze des Wertebereiches der Zeit erreicht. Somit beträgt die größte berechenbare Vergangenheit

$$t_{\max} = T \ln \frac{T_0}{T} = -5,24 \cdot 10^{18} \text{ sec} \sim 1,7 \cdot 10^{11} \text{ Jahre}. \quad (30)$$

Die Zeit besitzt zwei Wertebereiche. Während der Wertebereich der mittels natürlicher Uhren direkt registrierten Zeit

$$\frac{T}{T_0} = 4,5 \cdot 10^{40} = \gamma \quad (81)$$

beträgt, ist der Wertebereich der aus der registrierten Zeit berechneten verfloßenen Zeit

$$\frac{t_{max}}{T_0} = \gamma \ln \gamma = 4,2 \cdot 10^{42}. \quad (92)$$

Es ist interessant, daß diese Zahl auch in einem ganz anderen Zusammenhang in der Natur auftritt, nämlich in dem Verhältnis der Gravitations- und elektrostatischen Kräfte zweier Elektronen:  $\frac{\varepsilon^2}{m_0^2 f} = 4,17 \cdot 10^{42}$ . Der hiernach bestehende Zusammenhang:  $\frac{\varepsilon^2}{m_0^2 f} = \gamma \ln \gamma$  kann, wie wir später sehen werden, auch theoretisch abgeleitet werden.

Wir wollen zum Schluß noch die Wertebereiche der drei Grundmengen vergleichen. Nach den Messungen von Sinclair, Smith, Holmberg u. a.<sup>1)</sup> kann die durchschnittliche Dichte der Materie im Weltraum auf  $2,5 \cdot 10^{-29}$  g pro  $\text{cm}^3$  geschätzt werden. Mit diesem Wert berechnet, ergibt sich der Krümmungsradius eines Einsteinschen Weltsystems zu  $R_U = 6,5 \cdot 10^{27}$  cm seine Gesamtmasse zu  $M_U = 1,4 \cdot 10^{56}$  g und sein Volumen zu  $V_U = 5,5 \cdot 10^{84}$   $\text{cm}^3$ . Wegen der verschiedenen Ausdehnung und Ruhemasse des Elektrons bzw. des Protons ergeben sich für Länge, Masse und Raum je zwei verschiedene Wertebereiche.

Tabelle 2.

Länge	$\frac{\pi R_U}{r_0} = 7 \cdot 10^{40} \sim \gamma = 4,5 \cdot 10^{40}$	$\frac{\pi R_U}{r_P} = 3 \cdot 10^{42} \sim \gamma \ln \gamma = 4 \cdot 10^{42}$
Zeit	$\frac{T}{T_0} = 4,5 \cdot 10^{40} = \gamma$	$\frac{t_{max}}{T_0} = 4,2 \cdot 10^{42} = \gamma \ln \gamma$
Masse	$\frac{M_U}{m_P} = 8 \cdot 10^{79} \sim \gamma^2 = 2 \cdot 10^{81}$	$\frac{M_U}{m_0} = 1,5 \cdot 10^{83} \sim (\gamma \ln \gamma)^2 = 1,7 \cdot 10^{85}$
Raum	$\frac{V_U}{v_0} = 6 \cdot 10^{121} \sim \gamma^3 = 9 \cdot 10^{121}$	$\frac{V_U}{v_P} = 9 \cdot 10^{126} \sim (\gamma \ln \gamma)^3 = 7 \cdot 10^{127}$

Wir können aus der Tabelle ersehen, daß die Wertebereiche der Grundmengen anscheinend gleich sind oder in einem einfachen Potenzverhältnis

<sup>1)</sup> J. H. Jeans, Nature 143, 158, 1939.

miteinander stehen. Obzwar die Übereinstimmung nur eine größenordnungsmäßige ist, kann es doch kaum ein Spiel des Zufalls sein. Andererseits können wir auf Grund unserer Betrachtungen eine beobachtbare Expansion unseres Weltsystems ausschließen, hieraus folgt, daß das Verhältnis

$$\frac{R_U}{r_0} = \text{const}$$

eine von der Zeit unabhängige Naturkonstante ist. Aus diesen zwei Umständen können wir letzten Endes die Folgerung ziehen, daß

*der Wertebereich sämtlicher meßbaren physikalischen Mengen konstant ist und in einem einfachen mathematischen Verhältnis mit einer dimensionslosen Zahl steht, die als Grundzahl der Wertebereiche neben  $c$ ,  $f$  und der Zeitbeschleunigung  $i$  die vierte fundamentale Naturkonstante ist, und den Wert*

$$\gamma \approx 4,5 \cdot 10^{40}$$

*hat.*

Die möglichen Folgen der Zeitbeschleunigung sollen im II. Teil der Arbeit behandelt werden.

Ich möchte auch an dieser Stelle meiner Frau, Magdalene Forró, für die fördernden Diskussionen meinen Dank aussprechen.

*Budapest, Inst. f. Exp. Phys. der Universität, den 2. August-1942.*

## Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit Neutronen \*).

Von Willibald Jentschke.

Mit 14 Abbildungen. (Eingegangen am 18. September 1942.) \*\*)

Mit Hilfe einer dünnen, frei tragenden Uranfolie werden die Massen der Spaltprodukte bestimmt, die bei Bestrahlung mit nicht verlangsamten ( $\text{Rn} + \text{Be}$ )-Neutronen entstehen. Die dabei in Freiheit gesetzten Energien werden gemessen. Frühere Versuche mit thermischen Neutronen werden wiederholt, um genaue Vergleichsmöglichkeiten zu schaffen. — Es ergeben sich sehr weitgehende Analogien bei Bestrahlung mit schnellen und thermischen Neutronen. Die Spaltung des  $^{235}_{92}\text{U}$ -Kernes erfolgt so, daß die Massenwerte der leichteren Bruchstücke etwa zwischen 79 und 114, die der schwereren zwischen 125 und 160 liegen. Den häufigsten Aufspaltungen kommen Werte von 142 und 97 zu. Aufspaltungen in gleich schwere Bruchstücke kommen also auch bei Bestrahlung von Neutronen, deren Energien bis etwa 10 MeV reichen, nicht vor. Die angegebenen Massen bei den Versuchen mit schnellen Neutronen sind deshalb etwas unsicherer als die mit thermischen Neutronen erhaltenen, weil die Zahl der entstehenden sekundären Neutronen bei der Spaltung des  $\text{U}_1$ -Kernes sicher größer ist als bei der Spaltung von  $\text{AcU}$ . Die mit schnellen Neutronen zu 163 MeV gemessene mittlere Gesamtenergie ist etwas größer als die bei dem Versuch mit thermischen Neutronen erhaltene, die zu 160 MeV bestimmt wurde. Ein Unterschied zeigt sich auch in der Weise, daß bei den Versuchen mit schnellen Neutronen die Halbwertsbreiten der einzelnen Statistiken größer sind als bei den mit langsamen Neutronen. Vergleiche mit den bisherigen chemischen Ergebnissen über die entstehenden Massen werden gezogen. Weiter werden experimentelle und theoretische Untersuchungen über die zu erwartenden kinetischen Energien der Kernbruchstücke mit den hier vorliegenden Ergebnissen verglichen. — Versuche mit Thorium, die mit einer dünnen Schicht auf dicker Unterlage ausgeführt wurden, ergaben als häufigste Gesamtenergie einen Wert von 150 MeV. Den häufigsten Aufspaltungen kommen hierbei Massen von 141 und 92 zu.

1. *Einleitung.* Durch gleichzeitige Messung der Einzelenergien zweier zusammengehöriger Bruchstücke, die bei Bestrahlung der schwersten Kerne mit Neutronen entstehen, kann auf die Größe und Häufigkeit der bei den Spaltungsprozessen entstehenden Massen geschlossen werden. Bisher wurden jedoch nur Versuche durchgeführt, bei denen vorwiegend thermische Neutronen wirksam waren<sup>1)</sup>. In der vorliegenden Arbeit werden auch

\*) Eingereicht zur Erlangung des Grades eines Dr. phil. habil. in der philosophischen Fakultät der Universität in Wien. — \*\*) Die Fertigstellung erfolgte im September 1941. Die Veröffentlichung konnte aus äußeren Gründen bisher nicht erfolgen. — <sup>1)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, *ZS. f. Phys.* 119, 696, 1942.

nähere Angaben über Energien und Massen der Kernspaltprodukte, die bei Bestrahlung mit schnellen Neutronen (unverlangsamten (Rn + Be)-Neutronen) entstehen, gemacht.

In Übereinstimmung mit chemischen Untersuchungen ergab sich bei den Versuchen mit thermischen Neutronen, daß der Actinurankern in sehr verschiedene Massen aufspalten kann, wobei der am häufigsten vorkommenden Aufspaltung etwa die Massen 142 und 94 zukommen. Aufspaltungen in gleich große Massen kommen nicht vor, obwohl dabei die größten Energien frei würden.

Demgegenüber erhielten japanische Forscher <sup>1)</sup> bei Bestrahlung mit sehr schnellen Neutronen der Reaktion ( $\text{Li} + \text{D}$ ), die Energien bis zu 17 MeV besitzen, auch Spaltungen des Urankernes  $^{239}_{92}\text{U}$  in annähernd gleich schwere Bruchstücke. Diese Ergebnisse konnten in jüngster Zeit von Segrè und Seaborg <sup>2)</sup> bestätigt werden. Es erhob sich nun die Frage, welche Spaltungen durch Neutronen hervorgerufen würden, wie sie etwa eine Radon-Beryllium-Neutronenquelle aussendet. Diese Neutronen besitzen mehrere Energiegruppen, wobei die höchsten noch mit merklicher Intensität vorkommenden Neutronenenergien bis zu etwa 10 MeV reichen. An Uran, das mit Neutronen bestrahlt war, deren Energien etwa zwischen 1 und 10 MeV liegen, wurden bisher noch keine genaueren chemischen Untersuchungen ausgeführt. Solche schnelle Neutronen sind jedoch bei den meisten Versuchen mit thermischen Neutronen vorhanden, so daß in diesen Fällen ein kleiner Prozentsatz an Spaltprodukten durch diese erzeugt wird. Auf Grund der dabei erhaltenen Ergebnisse war es wahrscheinlich, daß ähnliche Kerne wie bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen entstehen. Untersuchungen der Einzelenergien <sup>3)</sup> und der gesamten frei werdenden kinetischen Energien der Bruchstücke <sup>4)</sup> weisen ebenfalls darauf hin. Bei all diesen Versuchen konnte jedoch nichts darüber ausgesagt werden, ob auch annähernd symmetrische Aufspaltungen, wenn auch selten, vorkommen.

Um einen unmittelbaren Vergleich zwischen den mit schnellen und langsamen Neutronen erhaltenen Ergebnissen zu besitzen, wurden die

---

<sup>1)</sup> T. Yasaki, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Research, Tokyo, **37**, 457, 1940; Y. Nishina, T. Yasaki, K. Kimura u. M. Ikawa, Phys. Rev. **58**, 660, 1940; Nature **146**, 24, 1940. — <sup>2)</sup> E. Segrè u. G. T. Seaborg, Phys. Rev. **59**, 212, 1941. — <sup>3)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, S.-B. Akad. Wiss. Wien. Abt. II a, **148**, 237, 1939; Mitt. d. Inst. f. Radiumforsch., Nr. 431, Phys. ZS. **40**, 706, 1939. — <sup>4)</sup> M. H. Kanner u. H. H. Barshall, Phys. Rev. **57**, 372, 1940. Bei diesen Versuchen war mit unverlangsamten ( $\text{D} + \text{D}$ )-Neutronen bestrahlt worden.



Versuche mit thermischen Neutronen <sup>1)</sup> wiederholt, da auch einige technische Verbesserungen eine größere Genauigkeit gegenüber den früher erhaltenen Resultaten erwarten ließen.

2. *Versuchsanordnung.* Bei den Versuchen fand wieder eine sehr dünne Folie Verwendung. Die kinetische Energie der nach beiden Seiten austretenden Bruchstücke wurde gleichzeitig durch Verwendung von zwei Röhrenelektrometern gemessen. Dadurch konnte nicht nur die gesamte, bei einer Kernspaltung auftretende Energie bestimmt werden, sondern auch aus dem Verhältnis der Teilenergien  $E_1$  und  $E_2$  der beiden Bruchstücke auf die entstehenden Massen  $M_1$  und  $M_2$  geschlossen werden. Die Summe der Massen  $M_1 + M_2$  muß dabei bekannt sein. Die Impulsverwaschung, die bei der Einfangung eines schnellen Neutrons entsteht, ist hierbei zu vernachlässigen. Im übrigen stimmte die Versuchsanordnung mit der schon früher beschriebenen überein. Selbstverständlich wurde bei den mit schnellen Neutronen durchgeführten Versuchen kein Paraffin verwendet und die Kammer allseitig mit Cadmium umgeben.

Die Uranfolie wurde wieder durch Kathodenzerstäubung hergestellt. Die Größe der wirksamen Folienfläche betrug  $12,5 \text{ cm}^2$ . Die verwendete Folie sandte halbseitig sechs  $\alpha$ -Teilchen in der Sekunde aus. Die Dicke der Folie mußte etwa dreimal so groß gewählt werden wie bei den früheren Versuchen, denn die Ausbeute an Bruchstücken betrug bei Bestrahlung mit schnellen Neutronen nur  $1/15$  von der bei Bestrahlung mit langsamen. Das Luftäquivalent der Folie errechnete sich aus einem Gewicht von  $0,04 \text{ mg/cm}^2$  zu etwa  $0,1 \text{ mm}$ . Messungen des Luftäquivalents ergaben durch Mittelwertbildung über mehrere Messungen einen Wert von  $0,15 \text{ mm}$ .

Die Neutronen stammten aus einer Radium-Berylliumquelle mit  $300 \text{ mg}$  Radium und Radon-Berylliumquellen, deren Anfangsaktivitäten durchschnittlich  $500 \text{ mg}$  Radiumäquivalent betrugen. Zwischen der Ionisationskammer und den  $\gamma$ -strahlenden Neutronenquellen befanden sich  $6 \text{ cm}$  Blei gegenüber  $8 \text{ cm}$  bei den früheren Versuchen. Diese geringere Bleidicke wurde deshalb gewählt, um die Zahl der an Blei unelastisch gestreuten Neutronen herabzusetzen, da ja mit möglichst energiereichen Neutronen bestrahlt werden sollte. Die Spannung für das Feld der Ionisationskammer betrug  $4500 \text{ Volt}$ . Als Füllgas diente wieder hochgereinigtes Argon.

Um die Genauigkeit der Eichung zu erhöhen, wurde eine Eichanordnung entwickelt, die auch bei den hier verwendeten Verstärkern mit sehr kleinen Zeitkonstanten eine genaue Bestimmung der erzeugten Ionenmengen

<sup>1)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, ZS. f. Phys. 119, 696, 1942.

gewährleistet. Die nähere Beschreibung findet sich in einer Arbeit von Jentschke, Schintlmeister und Hawliczek<sup>1)</sup>. Durch Schließen des Kontaktes einer Quecksilberschaltröhre oder auch durch ein Thyatron-Kippgerät konnten über einen geeichten Influenzring genau bekannte Ladungen auf das Gitter der Eingangsrohre influenziert werden.

3. *Durchführung der Versuche und ihre Auswertung.* Bei dem Versuch mit schnellen Neutronen wurden insgesamt 433 Kernspaltungen photographisch registriert. Die gesamte Aufnahmezeit betrug 108 Stunden, was einer Ausbeute von vier Zertrümmerungen in der Stunde entspricht. Bei dem Versuch mit thermischen Neutronen betrug die Zahl der gemessenen Spaltungen 484. Dabei wurden ungefähr 60 Spaltprozesse in der Stunde gezählt.

Die Bestimmung der Ladungsempfindlichkeit des Röhrenelektrometers mit künstlichen Impulsen wurde jede Stunde vorgenommen. Innerhalb dieser Zeit erwies sich der Verstärkungsfaktor als völlig konstant. Mit derselben Anordnung wurde auch die Linearität der Verstärker geprüft. Sie war innerhalb einer Genauigkeit von  $\pm 1\%$  gewahrt.

Bevor auf die erhaltenen Ergebnisse eingegangen wird, seien noch die Korrekturen angeführt, mit denen die folgenden Auswertungen bereits versehen sind. Wegen der Foliendicke von 0,15 mm Luftäquivalent wurde zu den gemessenen kinetischen Energien der schwereren als auch der leichteren Kernbruchstücke je 1 MeV dazugezählt. Dieser Wert wurde bei Berücksichtigung der geometrischen Verhältnisse unter der Annahme erhalten, daß der Energieverlust der schwereren und leichteren Kernbruchstücke im ersten Millimeter der Bahn etwa 7 MeV beträgt. Die zweite Korrektur betrifft den Einfluß der positiven Ionen und ist ebenfalls gering. Um die durch die  $\gamma$ -Strahlen hervorgerufene Unruhe möglichst herabzudrücken, fanden für die einzelnen Stufen des Verstärkers Kopplungsglieder mit sehr kleiner Zeitkonstante von  $5 \cdot 10^{-5}$  Sekunden Verwendung. Nach völliger Reinigung des Gases ist die Aufladezeit der negativen Elektronen wohl genügend klein; jedoch befinden sich die positiven Ionen nach  $10^{-5}$  Sekunden praktisch noch an ihrem Entstehungsort und influenzieren auf die Gitterelektrode eine positive Ladung. Diese bewirkt, daß ein Teil der von den Elektronen herrührenden negativen Ladung kompensiert wird. Man muß daher bei Verwendung dieser kleinen Zeitkonstanten die Anordnung so treffen, daß nur ein möglichst kleiner Teil dieser Influenzladung

<sup>1)</sup> Noch nicht veröffentlicht. Anm. b. d. Korr. siehe J. Schintlmeister: Die Elektronenröhre als physikalisches Meßgerät, S. 158. Wien, Springer, 1942.

auf der Gitterelektrode wirksam ist. (Verwendung einer möglichst tiefen Kammer und einer möglichst kleinen Elektrode. Die Tiefe der Kammer betrug 7,5 cm; die Elektrode besaß einen Durchmesser von 3,5 cm, war also gegenüber dem letzten Versuch noch um 0,5 cm verkleinert worden.) Um die Größe der Verwaschung zu bestimmen, die durch diese positive Influenzladung hervorgerufen wird, wurde die Kammerspannung umgepolt, so daß die sehr rasch beweglichen Elektronionen zur Kammerwand liefen. Die positiven Ionen blieben dagegen während dieser Zeit praktisch an ihrem Bildungsort. Die positive Influenzladung kann so direkt gemessen werden. Bei einer Statistik von 200 Teilchen wurden Ausschlagsgrößen bis zu 2,7 MeV festgestellt. Den größten Werten sind die energiereichsten Kernbruchstücke zuzuordnen. Da die Größe der Influenzladung auch noch von der Richtung des Ionen erzeugenden Teilchens abhängig ist, kommt noch als weitere Bedingung hinzu, daß es sich dabei um Teilchen handelt, die der Gitterelektrode möglichst nahe kommen. Sie treten also ungefähr senkrecht zur Folienfläche aus. Die Korrektur für die weitaus meisten Strahlen wird daher erheblich kleiner als der Maximalwert sein. Die Influenzladungen, die durch die positiven Ionen der schwereren Kernbruchstücke erzeugt werden, sind niedriger anzusetzen, weil diese Kernbruchstücke energieärmer und kürzer sind. Nach Abwägen dieser verschiedenen Umstände wurden schließlich zu den gemessenen Energien der leichteren Kernbruchstücke 1,2 MeV, zu den der schwereren Kernbruchstücke 0,7 MeV dazugezählt.

Eine gewisse Unsicherheit liegt in der Berechnung der Energien aus den gemessenen Ionenmengen. Da man bei solch schweren Teilchen keine näheren Anhaltspunkte über den Energiewert hat, der im Mittel für die Bildung eines Ions erforderlich ist, muß man auf die Ionisationsverhältnisse bei den  $\alpha$ - und H-Strahlen zurückgreifen. Die relative Ionisation zwischen Argon und Luft in Abhängigkeit von der Restreichweite wurde für  $\alpha$ -Strahlen von Gurney<sup>1)</sup> gemessen. Aus seinen Ergebnissen folgt, daß bei kleineren Geschwindigkeiten der  $\alpha$ -Strahlen das Verhältnis der Ionisation in Luft und Argon nicht konstant ist. Dies bedeutet, daß für  $\alpha$ -Strahlen in Argon keine exakte Proportionalität zwischen Energieverlust und Ionisation besteht, wenn sie in Luft vorhanden ist. Ähnlich liegen die Verhältnisse auch für die anderen Edelgase und für Wasserstoff. Da neuere Untersuchungen von Naidu<sup>2)</sup> viel höhere Werte für das Ionisationsverhältnis

---

<sup>1)</sup> R. W. Gurney, Proc. Roy. Soc. London (A) **100**, 332, 1935. — <sup>2)</sup> R. Naidu, Ann. de Phys. **1**, 72, 1934.

zwischen Argon und Luft ergeben hatten, wurde diese Sachlage gemeinsam mit Maresch <sup>1)</sup> geprüft. Mit Hilfe des Röhrenelektrometers mit großer Zeitkonstante <sup>2)</sup> wurden die von  $\alpha$ -Strahlen genau bekannter Energie erzeugten Ionenmengen in Luft und Argon gemessen. Die daraus abgeleiteten Ionisationsverhältniszahlen stimmen sehr befriedigend mit den Werten von Gurney überein (Fig. 1). Den am häufigsten vorkommenden Kernspaltungen entsprechen Teilchen mit Geschwindigkeiten von  $1,4 \cdot 10^8$  cm/sec und  $0,94 \cdot 10^8$  cm/sec. Für gleich schnelle  $\alpha$ -Strahlen betragen die relativen

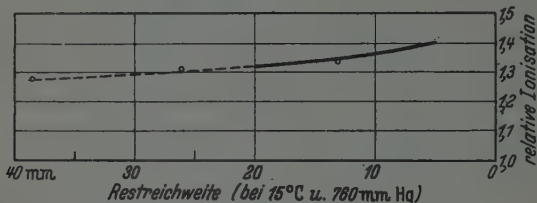


Fig. 1. Relative Ionisation zwischen Argon und Luft in Abhängigkeit von der Restreichweite für  $\alpha$ -Strahlen. Ausgezogene Kurve: Messungen nach R. W. Gurney. Punkte: Messungen nach W. Jentschke und E. Maresch.

Ionisationswerte zwischen Argon und Luft nach unseren Messungen 1,31 und 1,35. Die zur Bildung eines Ions in Luft erforderliche Energie beträgt für den hier zu berücksichtigenden Geschwindigkeitsbereich 36,6 e-Volt mit einer Genauigkeit von  $\pm 1\%$ . Nimmt man als relatives Ionisationsverhältnis zwischen Argon und Luft für die hier in Betracht kommenden Geschwindigkeiten den mittleren Wert 1,33 an, so folgt, daß die Bildung eines Argonions im Mittel 27,5 e-Volt erfordert. Damit wurde die Energie der schweren Kernbruchstücke berechnet. Bei Berücksichtigung sämtlicher angeführter Fehlerquellen und Korrekturen kann die Genauigkeit der angegebenen Energiewerte auf  $\pm 5\%$  geschätzt werden.

#### 4. Ergebnisse bei Bestrahlung mit schnellen und langsamen Neutronen.

Fig. 2 gibt einen Überblick über die Häufigkeit der verschiedenen möglichen Massenaufspaltungen bei Bestrahlung mit schnellen (Rn + Be)-Neutronen. Auf der Abszisse sind die entstehenden Massenzahlen, auf der Ordinate ihre Häufigkeiten aufgetragen. Dabei wurde angenommen, daß die Summe der Massen 239 ergibt. Die Aussendung von Neutronen ist also nicht berücksichtigt. Nach diesen Ergebnissen weisen die leichteren Bruchstücke Massen auf, die etwa zwischen 79 und 114, die schwereren dagegen solche, die zwischen 125 und 160 liegen. Den häufigsten Spaltungen kommen die

<sup>1)</sup> Noch nicht veröffentlicht. — <sup>2)</sup> G. Ortner u. G. Stetter, ZS. f. Phys. 54, 449, 1929.

Massen von 142 und 97 zu. Da es wahrscheinlich ist, daß bei der Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$  eine größere Zahl von Sekundärneutronen gebildet wird als bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$ , besteht für die angeführten Massenzahlen eine größere Unsicherheit als für die bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$  erhaltenen. Fig. 3 gibt die statistische Verteilung der Gesamtenergie wieder. Die häufigste auftretende Gesamtenergie beträgt 163 MeV, doch kommen auch Energien

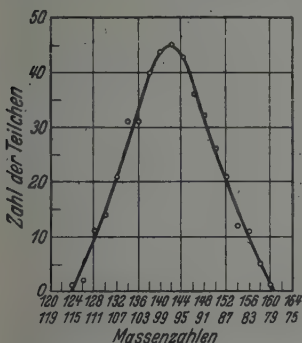


Fig. 2. Gesamtverteilung der entstehenden Massen bei der Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit schnellen (Rn + Be)-Neutronen.

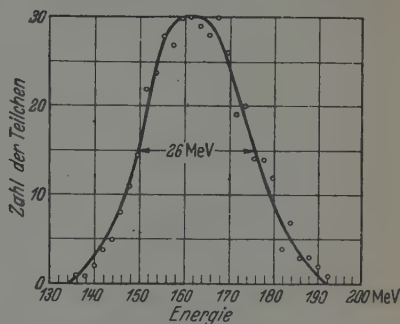


Fig. 3. Statistische Verteilung der Summe der kinetischen Energien beider Bruchstücke bei der Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit schnellen (Rn + Be)-Neutronen.

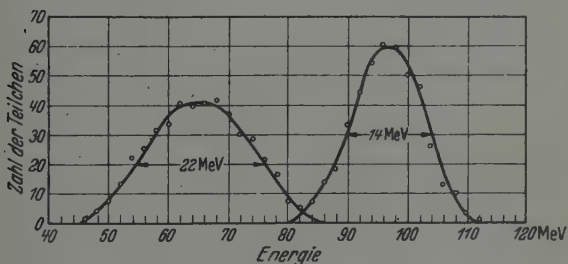


Fig. 4. Statistische Verteilung der schwereren und leichteren Bruchstücke bei der Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit schnellen (Rn + Be)-Neutronen.

zwischen 139 und 192 MeV vor. Kanner und Barshall<sup>1)</sup> haben bei Verwendung von nicht verlangsamten Neutronen der (D + D)-Reaktion die kinetische Gesamtenergie der Kernbruchstücke gemessen. Eine dünne Aluminiumfolie diente als Trägersubstanz, auf die Uran aufgestäubt worden war. Als Ionisationsgas verwendeten sie Luft. Ihr Wert von 159 MeV stimmt sehr gut mit dem hier zu 163 MeV gemessenen überein. Auch die

<sup>1)</sup> M. H. Kanner u. H. H. Barshall, Phys. Rev. **57**, 372, 1940.



Angabe von 165 MeV, die sie gemäß einer Anmerkung von Henderson<sup>1)</sup> nunmehr für wahrscheinlicher halten, steht mit dem von mir erhaltenen Wert in gleich guter Übereinstimmung.

Die Verteilung der Einzelenergien der beiden Bruchstücke, wie sie auch bei Verwendung einer dünnen Schicht auf dicker Unterlage erhalten werden

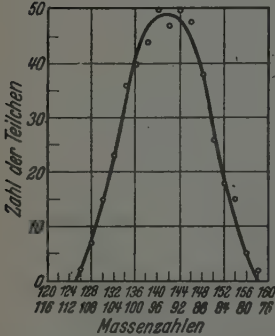


Fig. 5. Gesamtverteilung der entstehenden Massen bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit vorwiegend thermischen Neutronen.

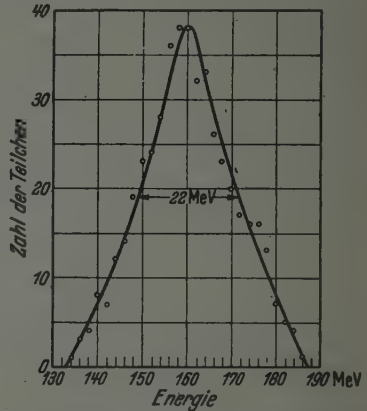


Fig. 6. Statistische Verteilung der Summe der kinetischen Energien beider Bruchstücke bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit vorwiegend thermischen Neutronen.

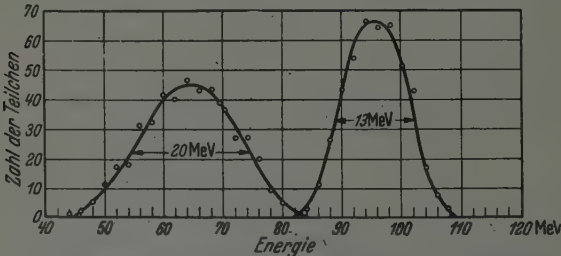


Fig. 7. Statistische Verteilung der schwereren und leichteren Bruchstücke bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$ . Bestrahlung mit vorwiegend thermischen Neutronen.

kann, gibt Fig. 4 wieder. Die Häufigkeitsmaxima liegen bei 66 und 97 MeV. Die Summe beider stimmt mit der häufigsten Gesamtenergie überein. Die oberen Energiegrenzen für die beiden Teilchengruppen liegen bei 111 und 85 MeV. Bevor diese Ergebnisse weiter diskutiert werden, seien die Versuche mit thermischen Neutronen angeführt, die angestellt wurden, um genaue

<sup>1)</sup> M. C. Henderson, Phys. Rev. 58, 774, 1940.

Vergleichsmöglichkeiten unter denselben Versuchsbedingungen zu erhalten. Die schon früher erhaltenen Ergebnisse<sup>1)</sup> konnten im wesentlichen bestätigt werden, jedoch war es möglich, bezüglich der entstehenden Massen und der Größe der frei werdenden Energien etwas genauere Resultate zu erhalten. Den in den Fig. 2 bis 4 angeführten Ergebnissen bei Bestrahlung mit nicht verlangsamten (Rn + Be)-Neutronen entsprechen die Fig. 5 bis 7 bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen. Aus dem Vergleich der einander entsprechenden Statistiken folgt, daß die Verhältnisse bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$  und  $^{239}_{92}\text{U}$  weitgehend ähnlich sind. Auch bei den Versuchen mit nicht verlangsamten (Rn + Be)-Neutronen gibt es keine Aufspaltungen in gleich schwere Bruchstücke. Bei dem Versuch mit schnellen Neutronen gehören die häufigsten Aufspaltungen zu einem Massenverhältnis von 1,47 bei dem Versuch mit langsamen Neutronen zu einem solchen von 1,49. Die mit schnellen Neutronen zu 163 MeV gemessene mittlere Gesamtenergie ist etwas größer als die bei dem Versuch mit thermischen Neutronen erhaltene, die 160 MeV beträgt. Ein Unterschied zeigt sich auch in den Halbwertsbreiten der einzelnen Kurven, die bei den Versuchen mit schnellen Neutronen größer sind als bei den mit langsamen Neutronen. So ergeben sich für die Halbwertsbreiten der statistischen Verteilung der Gesamtenergie bei den Versuchen mit schnellen und langsamen Neutronen (Fig. 2 und 5) Werte von 26 und 22 MeV und für die Halbwertsbreiten der Einzelstatistiken der Bruchstücke (Fig. 3 und 6) Werte von 22 und 14 MeV, sowie 20 und 13 MeV. Weiter ist auch das Massenspektrum der Spaltprodukte von  $^{239}_{92}\text{U}$  etwas breiter als das von  $^{236}_{92}\text{U}$ , doch liegt der dabei auftretende Unterschied nicht mit Sicherheit außerhalb der erreichten Genauigkeit.

*5. Vergleich mit Ergebnissen chemischer Untersuchungen. Diskussion der Massenaufspaltung.* Da der Klärung der Frage, welche Massenaufspaltungen eintreten können, ein besonderes Interesse zukommt, soll eine Arbeit von Anderson, Fermi und Grosse<sup>2)</sup> ausführlich diskutiert werden. Sie bezieht sich allerdings nur auf die Verhältnisse bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen. Durch sie wird ein wenigstens qualitativer Vergleich mit den chemischen Ergebnissen bezüglich der Bildungswahrscheinlichkeit einiger bisher bekannter Aufspaltungsreihen möglich. Anderson, Fermi und Grosse haben die Intensitäten der  $\beta$ -Strahlen unter Berücksichtigung ihrer Durchdringungsfähigkeit gemessen. Auf diese Weise wurde bisher hauptsächlich für die Zerfallsreihen der schwereren Bruchstücke je ein  $\beta$ -Strahler der verschiedenen radioaktiven Reihen genauer untersucht,

<sup>1)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, ZS. f. Phys. 119, 696, 1942. — <sup>2)</sup> H. L. Anderson, E. Fermi u. A. V. Grosse, Phys. Rev. 59, 52, 1941.



wobei gleiche geometrische Anordnungen und quantitative chemische Methoden Anwendung fanden. Die von den Autoren erhaltenen Ergebnisse sind in Tabelle 1 angeführt<sup>1)</sup>. Wären sämtliche schwerere Kernbruchstücke bereits gefunden, müßte die Summe der in Prozenten angegebenen Intensitäten 100 ergeben. Da die Intensität der bisher untersuchten Zerfallsreihen der schwereren Kernbruchstücke erst etwa 50 % ergibt, folgern die Autoren, daß sicher noch unbekannte Spaltungsmöglichkeiten vorhanden sein müssen. Allerdings sind bei diesen Versuchen die Intensitätsschwankungen nicht berücksichtigt, die innerhalb einer solchen Zerfallsreihe auftreten können. Die Stärke der Aktivität der beiden Bromisotope mit Halbwertszeiten von 140 Minuten und 30 Minuten kann deshalb ungefähr angegeben werden, weil Hahn und Strassmann<sup>2)</sup> die Ionisationsstärken der Strahlung dieser beiden Elemente mit der des Jodkörpers von 54 Minuten Halbwertszeit verglichen haben.

Die Übereinstimmung der chemischen Angaben mit den in Fig. 5 niedergelegten Ergebnissen ist sehr befriedigend. Die elektrische Messung ergibt als untere Grenze für die Massenwerte der schwereren Bruchstücke etwa 126, während auf chemischem Wege als bisher leichteste Masse der schwereren Spaltstücke ein Wert von 127 festgestellt ist. Die Bildungswahrscheinlichkeit dieser Spaltungsreihe ist sehr gering. Mit zunehmender Atommasse wächst die Intensität der Zerfallsreihen, um in der Gegend von etwa 140 ein Maximum zu erreichen. Die schwerste noch vorkommende Masse wurde zu etwa 157 gefunden. Von den Elementen, deren stabile Massen über 140 liegen, konnten auf chemischem Wege erst zwei aktive Cerisotope mit Halbwertszeiten von 15 und 300 Tagen<sup>3)</sup> festgestellt werden. Daß aber auch solche schwerere Elemente häufiger vorkommen müssen, geht aus den verhältnismäßig großen Intensitäten der entsprechenden leichteren Bruchstücke hervor. So gehören zu den festgestellten Massen 88 89 und 90 der leichteren Gruppe Massen von 148, 147 und 146 der schwereren Gruppe, also stabile Neodym- und Samariumisotope. Die Verschiebungen

---

<sup>1)</sup> Für die Halbwertszeiten der einzelnen Spaltprodukte wurden bei der Korrektur verbesserte Werte eingesetzt, die z. B. einer zusammenfassenden Darstellung von O. Hahn, F. Strassmann u. H. Götte (Abh. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1942, Math.-naturw. Klasse, Nr. 3) zu entnehmen sind. Auch sind einige neuere Ergebnisse von O. Hahn, F. Strassmann u. Mitarbeiter berücksichtigt (l. c.). Es sei noch bemerkt, daß in der Tabelle im allgemeinen nur die Zerfallsreihen angeführt wurden, bei denen schon jetzt Aussagen über die relativen Intensitäten oder nähere Aufschlüsse über die zugehörigen Massenzahlen möglich sind. — <sup>2)</sup> O. Hahn u. F. Strassmann, Naturwiss. 28, 817, 1940. — <sup>3)</sup> O. Hahn u. F. Strassmann, ebenda. 28, 543, 1940.

durch Neutronenabspaltungen können nicht bedeutend sein, da nach den bisherigen Ergebnissen bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen im Mittel nur etwa zwei Neutronen pro Kernspaltung ausgesendet werden. Die kleinste Masse, die bisher durch chemische Abtrennungen gefunden wurde, beträgt 88. Der entsprechende Massenwert des schwereren Bruchstückes wäre 158. Er liegt also sehr nahe dem Wert von 157, der aus Fig. 5 abzulesen ist. Die Zerfallsreihe, die zu dem stabilen  $^{83}_{36}\text{Kr}$  führt, hat eine sehr geringe Intensität. Daraus folgt, daß damit das äußerste vorkommende Massenverhältnis anscheinend schon erreicht ist. Die obere Grenze der Masse der leichteren Bruchstücke dürfte etwa bei 109 liegen.

Es besteht also bei der Spaltung von  $^{236}_{92}\text{U}$  bezüglich der auftretenden Bruchstücke und ihrer Häufigkeitsverteilung eine sehr gute Übereinstimmung der elektrischen Messungen mit den chemischen Ergebnissen. Es treten aber, wie bereits früher<sup>1)</sup> erwähnt, Elemente auf, deren Nachweis auf chemischem Wege noch aussteht. So müßten vor allem folgende, teils  $\beta$ -strahlende, teils inaktive seltene Erden in abnehmender Häufigkeit vorkommen: Praseodym, Neodym, Element 61, Samarium, Europium und vielleicht auch Gadolinium. Bei den leichteren Bruchstücken müßten noch mit geringer Intensität vorhanden sein: Ruthenium, Rhodium und Palladium. Das Fehlen einiger dieser Elemente könnte dadurch bedingt sein, daß bei manchen Spaltungen eine wesentlich größere Zahl von Neutronen frei wird als das im Mittel der Fall ist; dann ist es nicht möglich, aus dem Massenverhältnis genauere Schlüsse auf die schließlich entstehenden stabilen Massen abzuleiten.

Die Spaltprodukte von  $^{239}_{92}\text{U}$  wurden chemisch noch nicht eingehend untersucht. Feather und Bretscher<sup>2)</sup> fanden bei Verwendung der energiereichen Neutronen aus der Reaktion: ( $^7_3\text{Li}$  ( $\alpha$ ,  $n$ )  $2^4_2\text{He}$ ) Jod und Tellurisotope mit den Halbwertszeiten von 66 Stunden und 2,5 Stunden, die mit den in der Tabelle angegebenen von 77 Stunden und 2,4 Stunden offenbar identisch sind. Weiter ergaben die noch vor Entdeckung der Kernspaltung durchgeführten Untersuchungen von Meitner, Hahn und Strassmann<sup>3)</sup> viele gleiche Aktivitäten bei Bestrahlung mit nur schnellen und langsamen Neutronen. Die hier erhaltenen Ergebnisse kann man daher in Übereinstimmung mit den bisherigen chemischen Untersuchungen dahin zusammenfassen, daß bei Bestrahlung mit nicht sehr energiereichen schnellen Neutronen im

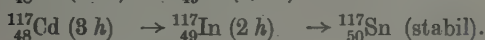
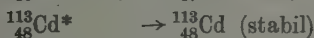
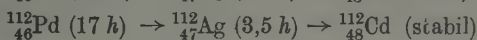
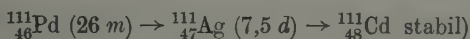
<sup>1)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, ZS. f. Phys. 119, 696, 1942. —

<sup>2)</sup> N. Feather u. E. Bretscher, Nat. 143, 516, 1939. — <sup>3)</sup> L. Meitner, O. Hahn u. F. Strassmann, ZS. f. Phys. 106, 249, 1937.



wesentlichen dieselben Spaltprodukte wie bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen entstehen.

Im folgenden sollen noch die zuerst von japanischen Forschern <sup>1)</sup> durchgeführten Versuche besprochen werden, die mit Neutronen angestellt wurden, deren Energien bis 17 MeV reichten. Dabei konnten Palladium-, Cadmium-, Silber- und Indiumisotope nachgewiesen werden. Diese Elemente konnten bei Bestrahlung mit energieärmeren Neutronen nicht festgestellt werden. Im einzelnen sind folgende Umwandlungsreihen bekannt:



Außerdem konnten auch noch  $\beta$ -aktive Ruthenium-, Rhodium- und Zinnisotope <sup>2)</sup> nachgewiesen werden. Nähere Angaben über die zu diesen Spaltprodukten gehörenden anderen Bruchstücke zu machen, ist unmöglich, da die Zahl der bei Bestrahlung mit so energiereichen Neutronen emittierten Sekundärneutronen völlig unbekannt ist. Auch ist noch zu berücksichtigen, daß bei Bestrahlung mit Neutronen, deren Energien über 10 MeV liegen, die Spaltung von  $\text{U}_I$  selbst eine Rolle spielt <sup>3)</sup>. Nach einem unelastischen Streuprozeß eines ursprünglich sehr energiereichen Neutrons an dem  $\text{U}_I$ -Kern kann dieser noch so hoch angeregt zurückbleiben, daß eine Spaltung auftritt. Vergleicht man die Massenzahlen der angeführten Zerfallsreihen mit den Massen, wie sie aus den Energien der beiden Bruchstücke erhalten wurden (Fig. 2), so ersieht man, daß auch bei Bestrahlung mit den weniger energiereichen ( $\text{Rn} + \text{Be}$ )-Neutronen in *seltenen* Fällen Zerfallsprozesse vorkommen, bei denen die leichteren Bruchstücke Massen von 111, 112 und vielleicht auch 115 aufweisen. Diese Massenzahlen sind jedoch deshalb unsicher, weil, wie schon erwähnt, die Sekundärneutronenemission nicht berücksichtigt ist, die bei der Spaltung von  ${}_{92}^{239}\text{U}$  größer als bei der von  ${}_{92}^{236}\text{U}$  sein dürfte. Ist die Zahl der Sekundärneutronen, die bei einer Spaltung von  ${}_{92}^{239}\text{U}$  ausgesendet werden, nicht größer als etwa 3 bis 5, so sprechen diese

<sup>1)</sup> T. Yasaki, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Research, Tokyo, **37**, 457, 1940; Y. Nishina, T. Yasaki, K. Kimura u. M. Ikawa, Phys. Rev. **58**, 660, 1940; Nature **146**, 24, 1940. — <sup>2)</sup> K. Kimura u. M. Ikawa, Phys. Rev. **59**, 677, 1941; Anmerkung bei der Korrektur: siehe auch Y. Nishina, K. Kimura, T. Yasaki u. M. Ikawa, ZS. f. Phys. **119**, 195, 1942. — <sup>3)</sup> N. Bohr, Phys. Rev. **58**, 864, 1940.

Ergebnisse dafür, daß auch bei Bestrahlung mit energieärmeren Neutronen in seltenen Fällen einige der vorstehend angeführten Isotope entstehen. Sie konnten jedoch chemisch noch nicht nachgewiesen werden, da ihre Bildungswahrscheinlichkeiten sicher sehr gering sind. Jedenfalls liefern die chemischen Untersuchungen das Ergebnis, daß bei Bestrahlung mit großen Neutronenenergien auch annähernd symmetrische Aufspaltungen mit größerer Häufigkeit auftreten. Diese Tatsache ist am einfachsten so zu deuten, daß die Aufspaltungsmöglichkeiten in bezug auf Ordnungs- und Massenzahlen um so größer werden, je höher angeregt der Urkern ist. Interessant wäre die Untersuchung der Frage, ob bei Bestrahlung mit sehr hohen Neutronenenergien auch noch extremere Massen- und Ordnungszahlen auftreten, als sie bisher gefunden wurden. Dies könnte sich am leichtesten in der Anwesenheit aktiver Selen-, Arsen- oder Germaniumisotope bemerkbar machen. Andererseits sollten bei Bestrahlung mit Neutronen, deren Energie gerade ausreicht, die Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$  auszulösen, die Aufspaltungsmöglichkeiten etwas geringer sein.

Energiemessungen der Bruchstücke bei Bestrahlung mit (Li + D)-Neutronen wurden von Lark-Horovitz und Schreiber<sup>1)</sup> durchgeführt. Aus den mit dünner Schicht auf dicker Unterlage angestellten Versuchen ergab sich neben den beiden bekannten Gruppen noch ein drittes Maximum bei einer Energie von 86 MeV, das die beiden Autoren den symmetrischen Spaltungen zuschreiben. Durch Versuche mit dünnen auf Aluminiumfolien aufgestäubten Uransichten konnte die mittlere kinetische Gesamtenergie bei Bestrahlung mit unverlangsamten (Li + D)-Neutronen zu 172 MeV bestimmt werden. Eine weitgehende Klärung über die Größe und Intensität der auftretenden Massen wäre wohl auch hier nur durch gleichzeitige Messung der Energien der beiden entstehenden Bruchstücke zu erwarten.

6. *Mittlere und maximale Energie der Spaltstücke; Vergleich mit der Theorie.* Im Anschluß an die Theorie sei noch folgendes Problem behandelt: Wie stimmen die in Freiheit gesetzten Energien, die aus den Massendefekten der beteiligten Kerne abgeschätzt werden, mit den gemessenen Energien der Kernbruchstücke überein? Nach den von Bohr und Wheeler<sup>2)</sup> angegebenen Formeln läßt sich bei jeder Spaltung die Summe der Energien berechnen, die insgesamt auf  $\beta$ -Energie entfällt. Da die Packungsanteile der ungefähr gleich schweren stabilen Isotope bekannt sind, kann man weiter die Größe der kinetischen Energien der Kernbruchstücke bei einem beliebigen

<sup>1)</sup> K. Lark-Horovitz u. R. E. Schreiber, Phys. Rev. 66, 156, 1941

— <sup>2)</sup> N. Bohr u. J. A. Wheeler, Phys. Rev. 56, 426, 1939.

Aufspaltungsverhältnis abschätzen. Bei einem vorgegebenen Massenverhältnis können noch die Ordnungszahlen der unmittelbar bei der Spaltung entstehenden Kernbruchstücke variieren. Dies hat zur Folge, daß der auf die  $\beta$ -Strahlen entfallende Energiebetrag in weiten Grenzen verschieden sein kann. Um die Frage nach den maximal möglichen kinetischen Energien der Kerntrümmer zu beantworten, wählt man bei der Berechnung für die primär entstehenden Kernbruchstücke solche Ordnungszahlen, daß die ins-

Fig. 8. Kurve: Gerechnete größtmögliche kinetische Energien der Kernbruchstücke bei verschiedenen Massenaufspaltungen des  $^{235}_{92}\text{U}$ -Kernes. Die kinetischen Energien der schnellen Neutronen sind bei der Berechnung nicht berücksichtigt; dagegen ist die bei der Anlagerung des Neutrons an den  $^{235}_{92}\text{U}$ -Kern frei werdende Bindungsenergie mitgerechnet. Kreise: Die gemessenen größten kinetischen Gesamtenergien der Kerntrümmer.

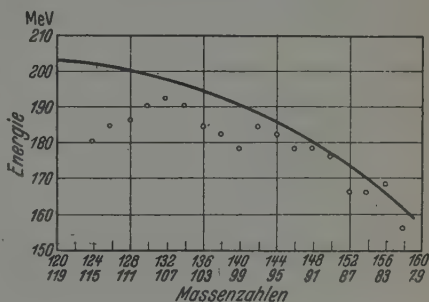
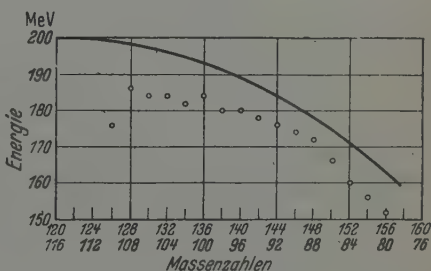


Fig. 9. Kurve: Gerechnete größtmögliche kinetische Energien der Kernbruchstücke bei verschiedenen Massenaufspaltungen des  $^{238}_{92}\text{U}$ -Kernes. Die bei der Anlagerung des Neutrons an den  $^{238}_{92}\text{U}$ -Kern frei werdende Bindungsenergie ist mitgerechnet. Kreise: Die gemessenen größten kinetischen Gesamtenergien der Kerntrümmer.



gesamt auf  $\beta$ -Strahlen aufgehende Energie möglichst klein ist. Auf diese Weise erhält man für jedes Massenverhältnis die maximal möglichen Werte der kinetischen Energien der Kernbruchstücke. Sie sind für die beiden Uranspaltungen in den Fig. 8 und 9 in Form einer Kurve wiedergegeben. Für den Fall der Spaltung von  $^{239}_{92}\text{U}$  wäre auch noch die kinetische Energie des eingefangenen Neutrons dazuzuzählen, die bei Bestrahlung mit  $(\text{Rn} + \text{Be})$ -Neutronen durchschnittlich 3 bis 4 MeV betragen dürfte. Die eingezeichneten Punkte stellen die größten, bei einem gegebenen Massenverhältnis experimentell bestimmten kinetischen Energien der Spaltungsstücke dar. Wenn man bedenkt, daß den gerechneten Werten höchstens eine Genauigkeit von  $\pm 10$  MeV zukommt und auch die hier experimentell gefundenen Werte nicht genauer als  $\pm 5\%$  sind, so liegen die Meßpunkte befriedigend nahe

unterhalb der berechneten Kurven. Daraus folgt, daß es bei Bestrahlung mit schnellen und langsamen Neutronen Aufspaltungen geben dürfte, bei denen die Kernbruchstücke die annähernd größtmöglichen Energien besitzen. Diese Fälle sind jedoch sehr selten. Auch sonst sind die Verhältnisse bei Bestrahlung mit schnellen Neutronen ganz analog denen, wie sie bereits für thermische Neutronen gefunden worden sind<sup>1)</sup>. Je mehr sich

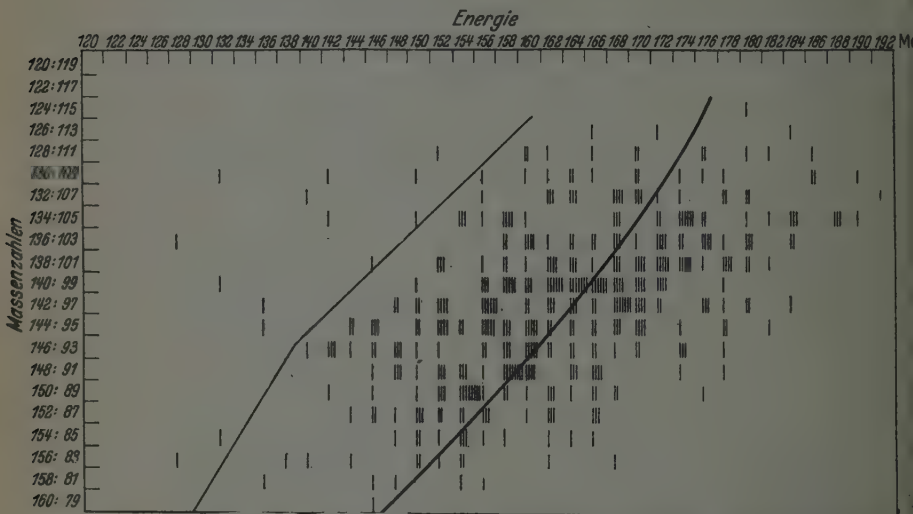


Fig. 10. Versuch mit schnellen (Rn + Be)-Neutronen. Zusammenhang zwischen Gesamtenergien und Massenaufspaltungen. Kurve: Mittelwerte der zu bestimmten Massenverhältnissen gehörenden Gesamtenergien. Die links der dünn gezeichneten Linie liegenden Teilchen wurden bei den Auswertungen nicht berücksichtigt, da es sich dabei um verkürzte Strahlen handelt.

die beiden Bruchteile in ihren Massen voneinander unterscheiden, um so kleiner wird in Übereinstimmung mit den gerechneten Kurven die kinetische Gesamtenergie.

Die Fig. 10 und 11 geben den Zusammenhang zwischen Gesamtenergie und Massenaufspaltungen bei Bestrahlung mit schnellen und langsamen Neutronen wieder. Zu ein und demselben Massenverhältnis gehören ganz verschiedene Gesamtenergien. Mittelt man über die zur selben Massenaufspaltung gehörende Gesamtenergie, so bekommt man den in den Figuren eingezeichneten Verlauf. Auch hierin stimmen also die Ergebnisse mit schnellen und langsamen Neutronen überein.

Für die Energieverwaschung bei festem Massenverhältnis sind vor allem folgende Ursachen anzuführen: Die Zahl der bei einem bestimmten

<sup>1)</sup> W. Jentschke u. F. Prankl, ZS. f. Phys. 119, 696, 1942.

Massenverhältnis ausgeschleuderten Neutronen wird keineswegs immer dieselbe sein und auch ihre Energien können um größere Werte schwanken. Die Bindungsenergien und kinetischen Energien der Sekundärneutronen werden bei der Messung der kinetischen Energien der Kernbruchstücke nicht mitgemessen. Auch der in Form von  $\gamma$ -Strahlung abgehende Energiebetrag wird bei den hier durchgeführten Messungen nicht erfaßt. Auch kommt

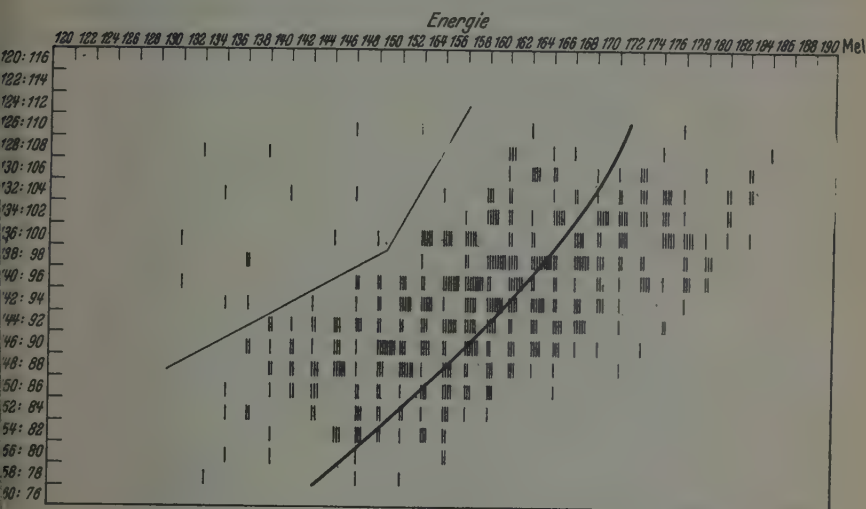


Fig. 11. Versuch mit vorwiegend thermischen Neutronen. Zusammenhang zwischen Gesamtenergien und Massenaufspaltungen. Kurve: Mittelwerte der zu bestimmten Massenverhältnissen gehörenden Gesamtenergien. Die links der dünn gezeichneten Linie liegenden Teilchen wurden bei den Auswertungen nicht berücksichtigt, da es sich dabei um verkürzte Strahlen handelt.

noch die Streuung hinzu, die durch die Aufspaltung in verschiedene Ordnungszahlen entsteht. Welche von diesen Ursachen in erster Linie für die Schwankung der Gesamtenergie verantwortlich ist, die bei demselben Massenverhältnis auftritt, kann nicht ohne weiteres entschieden werden. Wäre die Aufspaltung in verschiedene Ordnungszahlen dafür maßgebend, so müßten die meisten Spaltungen so vor sich gehen, daß der ganze Neutronenüberschuß bei einem Bruchstück bleibt, das andere also stabil ist. Träfe dies zu, müßte das Bruchstück mit dem großen Neutronenüberschuß eine vielgliedrige Umwandlungsreihe durchlaufen, bis eine stabile Atomart entsteht. Da solche lange Reihen bisher nicht festgestellt werden konnten, ist es wahrscheinlich, daß die große Energieverwaschung nicht in erster Linie durch die Aufspaltung in verschiedene Ordnungszahlen bedingt ist. Auch ein weiterer Umstand spricht noch für diese Anschauung. Da



bei den Untersuchungen mit thermischen Neutronen bereits zahlreiche, wahrscheinlich primäre Spaltungsprodukte mit ihren Massen und Ordnungszahlen festgestellt sind, kann man die bei diesen Prozessen auf  $\beta$ -Strahlung verbrauchten Energien abschätzen. Dabei sei wieder die Annahme gemacht, daß die Summe der entstehenden Massen 236 beträgt, also keine Sekundärneutronen entstehen. Die Energiebeträge, die für die verschiedenen, wahrscheinlich primär erfolgenden Spaltungen nach Abzug der  $\beta$ -Energien zur Verfügung stehen, sind in Fig. 12 eingezeichnet. Die Spaltprodukte,

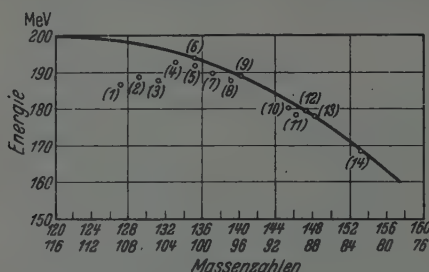


Fig. 12. Kurve: Die größtmöglichen kinetischen Energien der Kernbruchstücke bei verschiedenen Massenaufspaltungen des  $^{236}_{92}\text{U}$ -Kernes (gerechnet). Punkte: Die größten kinetischen Energien, die für die nach den bisherigen chemischen Ergebnissen wahrscheinlich primär erfolgenden Spaltungen zur Verfügung stehen (gerechnet).

$\underline{^{127}_{51}\text{Sb}} + \underline{^{109}_{41}\text{Nb}}$ (1)	$\underline{^{135}_{50}\text{Sn}} + \underline{^{101}_{42}\text{Mo}}$ (6)	$\underline{^{146}_{54}\text{Xe}} + \underline{^{90}_{38}\text{Sr}}$ (11)
$\underline{^{129}_{51}\text{Sb}} + \underline{^{107}_{41}\text{Nb}}$ (2)	$\underline{^{137}_{50}\text{Sn}} + \underline{^{99}_{42}\text{Mo}}$ (7)	$\underline{^{144}_{56}\text{Ba}} + \underline{^{88}_{36}\text{Kr}}$ (12)
$\underline{^{131}_{52}\text{Te}} + \underline{^{105}_{40}\text{Zr}}$ (3)	$\underline{^{139}_{54}\text{Xe}} + \underline{^{97}_{38}\text{Sr}}$ (8)	$\underline{^{148}_{56}\text{Ba}} + \underline{^{88}_{36}\text{Kr}}$ (13)
$\underline{^{133}_{51}\text{Sb}} + \underline{^{103}_{41}\text{Nb}}$ (4)	$\underline{^{140}_{54}\text{Xe}} + \underline{^{96}_{38}\text{Sr}}$ (9)	$\underline{^{153}_{57}\text{La}} + \underline{^{83}_{35}\text{Br}}$ (14)
$\underline{^{135}_{52}\text{Te}} + \underline{^{101}_{40}\text{Zr}}$ (5)	$\underline{^{146}_{56}\text{Ba}} + \underline{^{91}_{36}\text{Kr}}$ (10)	

Die chemisch festgestellten, wahrscheinlich primär entstehenden Bruchstücke sind unterstrichen.

die chemisch festgestellt werden konnten, sind dabei unterstrichen. Die Energiebeträge liegen im allgemeinen sehr nahe an den maximal möglichen. Die etwas größere Abweichung bei den Aufspaltungen in Antimon- und Niobisotope könnte dadurch bedingt sein, daß die primären Spaltungen nicht in Antimon und Niob, sondern in Zinn und Molybdän erfolgen, was chemisch noch nicht näher untersucht wurde. Es ist möglich, daß manche der vorstehend als unmittelbare Spaltstücke angenommenen Elemente in Wirklichkeit selbst schon Umwandlungsprodukte anderer primärer aktiver Stoffe sind. Auch in diesem Falle ändert sich das Ergebnis nicht wesentlich, wenn sich die tatsächlich primären Bruchstücke in ihren Ordnungszahlen nur um 1 oder 2 Einheiten von den in Fig. 12 angeführten unterscheiden.

Eine experimentelle Prüfung, wie weit eine Spaltung in verschiedene Ordnungszahlen bei festgehaltenem Massenverhältnis auftritt, wäre in der Weise möglich, daß die Intensität der  $\beta$ -Strahlen der einzelnen aktiven Produkte verglichen würde, die zu einer Zerfallsreihe gehören.

Mit Hilfe einer kalorimetrischen Methode wurde von Henderson<sup>1)</sup> die mittlere Gesamtenergie, die bei einer Uranspaltung frei wird, zu 177 MeV bestimmt. Infolge der gewählten Versuchsanordnung sind in diesem Wert auch alle mittleren  $\beta$ -Energien der Folgeprodukte enthalten. Es wurde

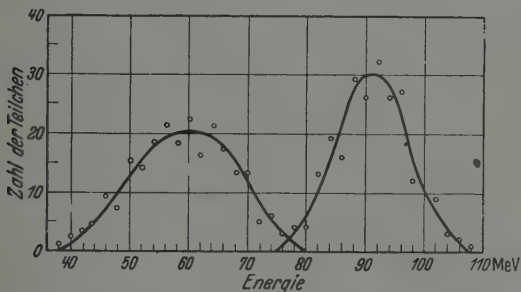


Fig. 13. Statistische Verteilung der schwereren und leichteren Bruchstücke bei der Spaltung von  $^{235}_{90}\text{Th}$ . Bestrahlung mit schnellen (Bn + Be)-Neutronen.

sowohl bei Bestrahlung mit thermischen als auch mit schnellen ( $D + D$ )-Neutronen ungefähr derselbe Wert erhalten. Der auf die mittlere Energie der  $\beta$ -Strahlen entfallende Energiebetrag wäre nach diesen Messungen bei Bestrahlung mit thermischen Neutronen etwa 17 MeV ( $177 - 160$ ), bei Bestrahlung mit schnellen Neutronen 14 MeV ( $177 - 163$ ), doch kommt diesen Zahlen höchstens eine Genauigkeit von  $\pm 50\%$  zu. Immerhin zeigen die beiden nach ganz verschiedenen Methoden ausgeführten Versuche zur Messung der frei werdenden Energien eine sehr befriedigende Übereinstimmung.

7. *Versuche mit Thorium.* Versuche mit Thorium wurden unter Mitarbeit von Bruna ausgeführt. Dabei fand eine dünne, durch Kathodenzerstäubung hergestellte Schicht auf einer dicken Unterlage Verwendung. Fig. 13 gibt die statistische Verteilung der Energien der Kernbruchstücke wieder. Da die beiden Maxima den häufigsten Aufspaltungen entsprechen, ergeben sich für die häufigsten Aufspaltungen die Massen 141 und 92 und für die häufigsten Gesamtenergien 150 MeV.

<sup>1)</sup> M. C. Henderson, Phys. Rev. 58, 774, 1940.

In Fig. 14 ist die den Fig. 8 und 9 entsprechende Kurve für die frei werdende Energie bei der Spaltung von Thorium wiedergegeben. Da bei den Thoriumversuchen keine direkte Messung der Gesamtenergie vorgenommen wurde, kann nur ein Vergleich mit der häufigsten vorkommenden Gesamtenergie gegeben werden. Sie beträgt etwa 150 MeV. Der Wert

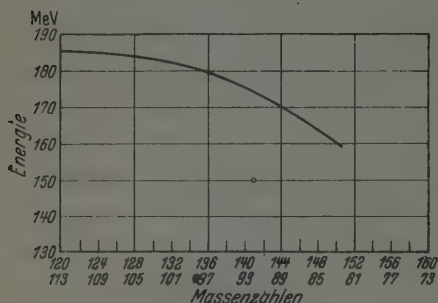


Fig. 14. Gerechnete größtmögliche kinetische Energien der Kernbruchstücke bei verschiedenen Massenaufspaltungen des  $^{232}_{90}\text{Th}$ -Kernes. Die bei der Anlagerung des Neutrons an den  $^{232}_{90}\text{Th}$ -Kern frei werdende Bindungsenergie ist mitgerechnet. Punkte: Gemessene mittlere kinetische Gesamtenergie.

liegt um 24 MeV tiefer als die bei dem vorgegebenen Massenverhältnis aus theoretischen Überlegungen zu erwartende Höchstenergie. Ungefähr die gleiche Energiedifferenz wurde auch bei den Uranversuchen erhalten. Die für die Uranspaltungen dargelegten Verhältnisse sind demnach auch für die Thoriumspaltung gültig, zumal ja auch bereits auf chemischem Wege viele gleiche Spaltprodukte nachgewiesen werden konnten.

Wien, 16. September 1941. II. Physikalisches Institut d. Universität.

## Beiträge zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung.

Von Nobutsugu Koyenuma in Tokio, zur Zeit Berlin.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 29. September 1942.)

Die statistische Methode der physikalischen Analyse der biologischen Strahlenwirkung, die sogenannte Treffertheorie, wird auf Vielzeller und auf Variabilität der Zellempfindlichkeit erweitert. Die erhaltenen Trefferformeln werden einer strengen mathematischen Behandlung unterzogen. Die erweiterte Theorie wird mit experimentellen Ergebnissen verglichen und eine befriedigende Übereinstimmung gefunden.

### 1. Einleitung. Die Bedeutung der biologischen Treffertheorie.

Die biologische Wirkung ionisierender Strahlen, der Röntgenstrahlen, Strahlen der radioaktiven Substanzen sowie der optischen Strahlung, vor allem der ultravioletten Strahlung, ist in den letzten Jahren wiederholt der Gegenstand physikalischer Betrachtungen gewesen. Die sogenannte Treffertheorie faßt die Wirkung dieser Strahlen als die Folge der Quantenabsorption in dem biologischen Objekt auf und behandelt diese Vorgänge nach statistischen Methoden. Hierbei wurden zunächst gewisse vereinfachende Voraussetzungen gemacht. Darum ist es verständlich, daß die so entstandene Theorie nicht völlig mit den experimentellen Tatsachen übereinstimmte, d. h. die berechneten Kurven wichen mehr oder weniger von den experimentellen Kurven, den sogenannten Schädigungskurven, die eine Beziehung zwischen Absterbeziffer und verabfolgter Strahlendosis darstellen, ab. Um genügende Übereinstimmung zwischen beiden zu erzielen, war es erforderlich, die ursprüngliche Theorie<sup>1)</sup> weiter auszubauen. Zunächst wurde die Variabilität der Zellempfindlichkeit berücksichtigt. Weiter erschien es notwendig, die theoretischen Betrachtungen auf Vielzeller<sup>2)</sup> auszudehnen, da ein großer Teil des experimentellen Materials sich mit der Strahlenwirkung auf Vielzeller befaßt.

Im Hinblick auf solche Erweiterungen der Theorie haben Meissner<sup>3)</sup> und Glocker<sup>4)</sup> eine Reihe von den mathematischen Beziehungen an-

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. M. Blau u. K. Altenburger, ZS. f. Phys. **12**, 315, 1923; I. A. Crowther, Proc. Roy. Soc. London (B) **96**, 207, 1924; **100**, 390, 1926; E. U. Condon u. H. H. Terril, J. cancer Res. **12**, 324, 1928; P. Curie, C. R. hebdom. Seances Acad. Sci. **188**, 202, 1929. — <sup>2)</sup> Darunter wird verstanden entweder ein Aggregat aus mehreren Zellen, von denen jede eine strahlenempfindliche Stelle besitzt, oder eine Zelle, deren strahlenempfindliche Stelle mehrfach unterteilt ist. — <sup>3)</sup> A. Zuppinger, Strahlentherapie **28**, 639, 1928. — <sup>4)</sup> R. Glocker, ZS. f. Phys. **77**, 653, 1932.

gegeben, die jedoch bisher von der experimentellen Seite nicht immer genügend berücksichtigt wurden.

Die Theorie von Meissner, die zuerst der Variabilität der Zellempfindlichkeit bei der biologischen Strahlenwirkung Rechnung trägt, gibt zwar gegenüber den früheren Ansätzen eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment, konnte jedoch trotz erheblichen mathematischen Aufwandes eine befriedigende Übereinstimmung nicht erzielen. Möglicherweise ist die Tatsache, daß die hier zum Vergleich herangezogenen Untersuchungen Zuppingers mit Askariseier im Vielzellenstadium durchgeführt wurden, ein Grund der ungenügenden Übereinstimmung.

Wir haben es unternommen, die Theorie sowohl hinsichtlich der biologischen Variabilität wie hinsichtlich der Berücksichtigung der Vielzeller zusammenzufassen und weiterhin auszubauen. In bezug auf die Ableitungsmethoden der klassischen Trefferformel verweisen wir auf die Literatur<sup>1)</sup>, in der sie behandelt worden sind. Hier sind nur die erweiterten Trefferformeln für Einzeller sowie Vielzeller mit besonderer Berücksichtigung der Variabilität der Zellempfindlichkeit einer strengen mathematischen Analyse unterworfen.

## 2. Darstellungsmethoden der biologischen Strahlenwirkung.

Bei der Bestrahlung mit einer Dosis  $D$  wird die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das biologische Objekt (Einzeller) von Quanten bzw. Ionen mindestens  $n$ -mal getroffen wird:

$$\frac{y}{y_0} = 1 - e^{-\alpha D} \left( 1 + \alpha D + \frac{(\alpha D)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha D)^{n-1}}{(n-1)!} \right), \quad (1)$$

wobei  $y_0$  = Gesamtzahl der bestrahlten biologischen Objekte,  $y$  = Anzahl der geschädigten Individuen,  $\alpha$  = die Trefferwahrscheinlichkeit, die von der Größe des empfindlichen Volumens sowie der Wellenlänge der Strahlung abhängt,  $n$  = sogenannte Trefferzahl, die aus experimentellen Kurven entnommen werden kann und deren Kombination mit der verabreichten Dosis  $D$  wieder direkt  $\alpha$  ergibt. Wir können der Formel verschiedene Form geben, die eventuell bei der Auswertung von experimentellen Kurven nützlich sein wird: Z. B. modifiziert sich (1) einfach in

$$\frac{y}{y_0} = e^{-\alpha D} \left( e^{\alpha D} - \left( 1 + \alpha D + \frac{(\alpha D)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha D)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right), \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. M. Blau u. K. Altenburger, l. c.; I. A. Crowther, l. c.



welche Beziehung nach Entwicklung von  $e^{\alpha D}$  in eine Potenzreihe in

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} &= e^{-\alpha D} \frac{(\alpha D)^n}{n!} \left( 1 + \frac{\alpha D}{n+1} + \frac{(\alpha D)^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right) \\ &= e^{-\alpha D} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(\alpha D)^m}{m!} \end{aligned} \quad (3)$$

übergeführt werden kann.

Mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung (1) durch einen Quotienten

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_{\infty}(n)} \quad (4)$$

darstellbar ist, gewinnt man den Ausdruck:

$$\frac{y}{y_0} = \frac{(\alpha D)^n}{n!} \left( 1 - \frac{\alpha D}{n!} \frac{n}{n+1} + \frac{(\alpha D)^2}{2!} \frac{n}{n+2} - \frac{(\alpha D)^3}{3!} \frac{n}{n+3} + \dots \right), \quad (5)$$

wobei

$$\Gamma_x(n) = \int_0^x e^{-x} x^{n-1} dx.$$

Die Formel (5) wird außerdem deformiert in

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} &= (\alpha D)^n \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + n \left( \frac{1}{n!} - \frac{\alpha D}{1!(n+1)!} + \frac{(\alpha D)^2}{2!(n+2)!} - \dots \right) \right) \\ &= (\alpha D)^n \left( \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} + n \cdot J_n(2\sqrt{\alpha D}) (\sqrt{\alpha D})^{-n} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Hierbei bedeutet  $J_n(x)$  die Bessel-Funktion erster Art der Ordnung  $n$ . Schließlich läßt sich (1) auch in

$$\frac{y}{y_0} = \frac{(\alpha D)^{n+1}}{(n+1)!} \left( 1 - \frac{\alpha D}{1!} \frac{(n+1)}{(n+2)} + \frac{(\alpha D)^2}{2!} \frac{(n+1)}{(n+3)} - \dots \right) + e^{-\alpha D} \frac{(\alpha D)^n}{n!} \quad (7)$$

überführen, was leicht verständlich ist, wenn man von dem Quotienten der Gammafunktionen ausgeht.

### 3. Studium der Umgebung des Wendepunktes von experimentellen Schädigungskurven.

Die Lage des Wendepunktes der Schädigungskurven läßt sich theoretisch leicht berechnen:  $(d^2 y)/dD^2 = 0$ , also  $\alpha D_w = n - 1$ , wobei  $D_w$  = Wendepunktsdosis. Nun möchten wir den Wert  $(y)_{\alpha D = n-1} = y(n-1)$  näher betrachten, was uns ermöglichen wird, aus den Schädigungskurven direkt  $n$  abzulesen, wie wir schon an anderer Stelle beschrieben haben<sup>1)</sup>. Abgesehen

<sup>1)</sup> N. Koyenuma, ZS. f. Phys. 117, 510, 1941.

davon können wir, wenn die Kurven  $\Gamma_{n+z}(n)/\Gamma_{\infty}(n) = \text{Konst.}$  graphisch dargestellt werden (Fig. 1)<sup>1)</sup>, seine Lage ungefähr abschätzen, also etwa  $0,4 < \lim (y) < 0,5$ .

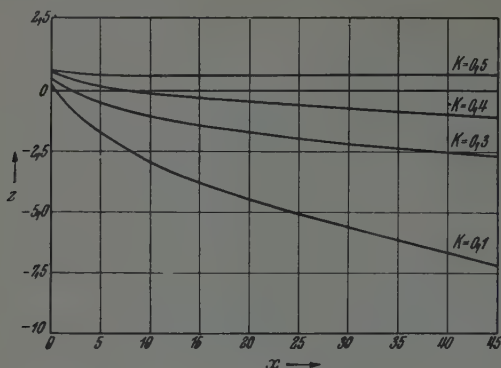


Fig. 1. Graphische Darstellung der Gleichung  $\frac{\Gamma_{x+z-1}(n)}{\Gamma_{\infty}(n)} = k$  (Konstante).

Wenn  $x + z - 1 = n - 1$ , liegt  $k$  zwischen 0,4 und 0,5. Man kann leicht von dieser Darstellung  $\alpha$  so wählen, daß  $x + z - 1 = n - \alpha$  und gleichzeitig  $k = 1/2$  erfüllt wird.

Unsere frühere Formel  $(y)_{\alpha D = n-1}$  lautet:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)_{\alpha D = n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi(n-1)}} - \frac{1}{16(n-1)} - \dots \quad (8)$$

Wir möchten hier die Näherungsfunktion für  $(y)_{\alpha D = n-1}$  in anderer Weise wie (8) ableiten, wozu wir wieder von der Stirlingschen Formel in folgender Form Gebrauch machen:

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)^n \int_0^{\infty} (e^{-x} x)^{n-1} dx \\ &\approx \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \sqrt{2\pi(n-1)} \\ &\approx \left(\frac{n-1}{e}\right)^{n-1} \left( \sqrt{2\pi(n-1)} + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right) \quad \text{für großes } n, \quad (9) \end{aligned}$$

wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0(1/\sqrt{n-1}) \rightarrow 0$ , d. h. Null von der Ordnung  $1/\sqrt{n-1}$ . Wir betrachten nun ein Integral

$$S = \frac{1}{n!} \int_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} e^{-x} x^n dx, \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Vgl. E. Jahnke u. F. Emde, Funktionentafeln. Leipzig u. Berlin 1938.

das, wenn anstatt  $x$  eine neue Variable  $x = (X/n) - 1$  eingeführt wird, direkt unter Benutzung von (9) ergibt:

$$S = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(1 + 1 \left(\frac{1}{n}\right)\right) \int_{-1}^{\alpha n^{-1/2} + \beta n^{-1}} (e^{-x} (1+x))^n dx \quad (11)$$

oder

$$S = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(1 + 0 \left(\frac{1}{n}\right)\right) \int_{-\eta}^{\alpha n^{-1/2} + \beta n^{-1}} (e^{-x} (1+x))^n dx + 0 \left(1/n e^{-\frac{n^2 \varepsilon}{2}}\right) \quad (12)$$

wobei

$$\eta = n^{-1/2 + \varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{6}.$$

Wenn wir weiter berücksichtigen

$$e^{-x} (1+x) = e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} (1+\Theta)x^{-4}} \quad (0 < \Theta = \Theta(x) < 1),$$

so wird (12) zu

$$\left. \begin{aligned} S &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(1 + 0(n^{-1+4\varepsilon})\right) \int_{-\eta}^{\alpha n^{-1/2} + \beta n^{-1}} e^{-n\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)} dx + 0(n^{-1+6\varepsilon}), \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(1 + 0(n^{-1+4\varepsilon})\right) \int_{-\eta}^{\alpha n^{-1/2} + \beta n^{-1}} e^{-\frac{x^2 n}{2}} \left(1 + n \cdot \frac{x^3}{3}\right) dx + 0(n^{-1+6\varepsilon}), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

da der Faktor

$$e^{n \cdot x^3/3} = 1 + n \cdot x^3/3 + 0(n^{-1+6\varepsilon}), \quad \int_{-\eta}^{\alpha n^{-1/2} + \beta n^{-1}} e^{-\frac{x^2 n}{2}} dx \approx n^{-1/2},$$

so daß nach der Transformation  $x \rightarrow x \cdot 1/\sqrt{n}$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\eta^{\varepsilon}}^{\alpha + \beta n^{-1/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right) dx + 0(n^{-1+6\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha + \beta n^{-1/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{x^3}{3\sqrt{n}}\right) dx, \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\alpha + \beta n^{-1/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \int_{-\infty}^{\alpha + \beta n^{-1/2}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{x^3}{3} dx + 0(n^{-1+6\varepsilon}). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Daraus folgt:

$$\frac{1}{n!} \int_0^{n+\alpha\sqrt{n}+\beta} e^{-x} x^n dx = A + \frac{B}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^1, \quad (15)$$

wobei

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \beta - \frac{\alpha^2 + 2}{3} \right) e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

und unter  $\alpha$  und  $\beta$  beliebige Konstanten verstanden sind.

(15) kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_0^{n+\alpha\sqrt{n-1}+\beta-1} e^{-x} x^{n-1} dx = A + \frac{B}{\sqrt{n-1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \quad (16)$$

für großes  $n$ .

Wenn wir nun in (16)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  wählen, so bestimmen sich

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad (17)$$

Infolgedessen geht also  $(y)_{\alpha D=n-1}$  über in

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)_{\alpha D=n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi(n-1)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right). \quad (18)$$

Damit ist die gewünschte Formel abgeleitet.

Daneben ist noch zu bemerken, daß die Möglichkeit besteht, einen Wert, der der Gleichung

$$1 - e^{-\alpha D} \left( 1 + \alpha D + \dots + \frac{(\alpha D)^{n-1}}{(n-1)!} \right) = \frac{1}{2}$$

genügt, zu bestimmen. Hierfür hat man nur  $\beta$  in der Gleichung (16) so zu bestimmen, daß ihre rechte Seite einen minimalen Wert annimmt, also etwa  $B = 0$ , was mit  $\beta = \left(\frac{\alpha^2 + 2}{3}\right)_{\alpha=0}$  identisch ist.

Dann wird  $\beta = 2/3$ , so daß  $\alpha \cdot D_{1/2} = n - 1 + 2/3 = n - 1/3$ , wobei  $D_{1/2}$  = eine Dosis bedeutet, die eine 50%ige Schädigung der Zellen herbeiführt. Dieser theoretische Wert stimmt mit der experimentell von Glocker abgeleiteten Formel<sup>2)</sup> völlig überein. Er ist selbstverständlich auch aus der Fig. 1, wie bereits gesagt, zu entnehmen.

<sup>1)</sup> Vgl. auch G. Pólya u. G. Szegő, Die Grundlehren d. mathem. Wiss. Bd. 19, I, Berlin 1925. — <sup>2)</sup> R. Glocker, ZS. f. Phys. 77, 653, 1932.

Was den Wert  $(y)_{\alpha D = n-1}$  anbelangt, so gehen wir wieder von der Gleichung (1) aus, die nach der Taylorschen Entwicklung von  $e^{-\alpha D}$  ( $y_0 = 1$  angenommen)

$$\left. \begin{aligned} (y) &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right), \\ &= 1 - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^r}{r!} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

liefert, wobei  $x = \alpha \cdot D$ .

Für großes  $n$  kann man (19) folgendermaßen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} (y) &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{x^r}{r!}, \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^m}{m!} \frac{x^r}{r!} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{m!^2} \right), \\ &= \frac{1}{2} (1 - J_0(2x)), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

wobei  $J_0(x)$  wiederum die Bessel-Funktion erster Art ist.

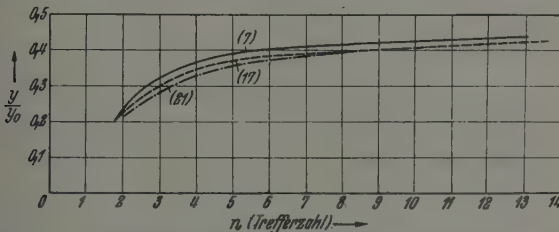


Fig. 2. Das Verhalten der Gleichung (1) in der Umgebung des Wendepunktes.

(7): Abschätzung (7),  
(17): Abschätzung (17),  
(21): Abschätzung (21); } vgl. Text.

Sämtliche Formeln können für die Bestimmung der Trefferzahl bei Einzelner verwendet werden.

Da für  $J_0(x)$  folgende asymptotische Entwicklung für großes  $n$  gilt

$$J_0(x) = \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\frac{1}{2} \pi x}} \quad \text{mit} \quad \varphi = x - \frac{\pi}{4} \quad J_0(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2} x}}, \quad (21)$$

kann (20) schließlich annähernd in der Form

$$(y)_{x=n-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{\pi(n-1)}} \quad (22)$$

geschrieben werden. Diese drei Abschätzungen von  $(y)_{x=n-1}$  sind in Fig. 2 miteinander verglichen (Fig. 2). Aus ihr oder aus den abgeleiteten Formeln



läßt sich zeigen, daß für großes  $n$   $(y)_{\alpha D=n-1} \rightarrow 1/2$ , wobei allerdings aber noch  $(y)_{x=n-0,33} \geq (y)_{x=n-1}$ .

#### 4. Erweiterung der Trefferformel auf Vielzeller.

Die oben abgeleiteten Formeln gelten nur für Einzeller, so daß eine allgemeine Formel für Vielzeller aufgestellt werden muß, die nach Veränderung des darin enthaltenen Parameters sich als identisch mit der für Einzeller erweisen wird. Als einfachstes Modell einer Formel für Vielzeller haben Bethe und Seyfarth<sup>1)</sup> die Gleichung

$$y_m = y_0 \left( \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_\infty(n)} \right)^m \quad \text{mit} \quad x = \frac{\alpha D}{m} \quad (23)$$

abgeleitet, die die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der aus  $m$ -Partikelchen bestehende Zellkomplex erst dann geschädigt wird, wenn bei der Bestrahlung mit einer Dosis  $D$  jedes der  $m$ -Partikelchen mindestens  $n$ -mal von Quanten bzw. Ionen getroffen wird. Für  $m \rightarrow 1$  geht (23) einfach in (1) über. Diese Gedankengänge entfalten sich auch in

$$y_m = y_0 (1 - (1 - y)^m)^2 \quad (24)$$

oder noch im allgemeinen<sup>2)</sup>

$$y_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)! n!} (1 - y)^{m-n} y^n, \quad (25)$$

wobei  $y$  mit der Gleichung (1) identisch ist.

Nun müssen wir die scheinbare Trefferzahl aus den Gleichungen (23), (24) und (25) berechnen, die mit der für Einzeller vergleichbar ist. Da sich später herausstellt, daß die scheinbaren Trefferzahlen aus (23) und (24) explizit, selbst bei großem  $n$ , nicht leicht berechenbar sind, sind hier die Gleichungen, mit denen diese Zahlen zu bestimmen sind, angegeben. Außerdem sind noch die Beziehungen zwischen der daraus folgenden Halbwertsdosis für (23), (24) und (25) und  $m$  und  $n$  graphisch dargestellt und miteinander verglichen.

a) Berechnung der scheinbaren Trefferzahl aus Gleichung (23). Zur Gewinnung der scheinbaren Trefferzahl differenziert man (23), wie bei (1), zweimal in bezug auf die Dosis  $D$ . Dann lautet die Gleichung mit Rücksicht auf (7)

$$x^2 + 2 \cdot x - (n^2 - 1 + n(n+1)(m-1)) = 0, \quad (26)$$

<sup>1)</sup> R. Glocker, l. c. — <sup>2)</sup> H. Dänzer, ZS. f. Phys. 89, 421, 1934.

deren Wurzel, da sie lediglich positiv sein muß,

$$x = \sqrt{n(mn + m - 1)} - 1 \quad (27)$$

wird. (27) bedeutet den Punkt, an dem gerade der Wendepunkt von (23) liegt. Wenn man (27) genau so wie die Gleichung für Einzeller betrachtet, ist nämlich die scheinbare Trefferzahl gleich

$$N = \sqrt{n(mn + m - 1)}. \quad (28)$$

Setzt man in (28)  $m = 1$ , so geht (28) über in  $N = n$  oder  $x = n - 1$ , was, wie erwartet, mit der Trefferzahl für Einzeller identisch ist.

Die hier abgeleitete scheinbare Trefferzahl besagt, daß die Gleichung (23) für Vielzeller durch eine Gleichung vom Typ (1), also durch eine Gleichung für Einzeller mit einer größeren Trefferzahl einigermaßen ersetzt werden kann. Um diese Tatsache zu erkennen, vergleichen wir (28) für verschiedene  $m$  und  $n$  mit den Zahlenwerten, die von Glocker<sup>2)</sup> der Pearsonschen Tabelle entnommen wurden (Tabelle 1).

Tabelle 1.

$n = 1$	4		16		32	
	(G)	(K)	(G)	(K)	(G)	(K)
$n = \begin{cases} 2 \\ 5 \\ 10 \\ 20 \\ 40 \end{cases}$	5	4,7	10	9,7	—	13,8
	12	10,7	22	21,8	—	30,9
	23	20,7	—	41,8	—	59,2
	50	40,7	—	82,0	—	115,8
	—	89,2	—	161,8	—	229,0

(G) = Glocker. — (K) = Verfasser.

Die Tabelle ist so zu verstehen, daß z. B. durch die Gleichung (1) mit  $n = 82$  die Gleichung (23) mit  $n = 20$  und  $m = 16$  ersetzt werden kann. Es gibt keine Möglichkeit, die Zahl  $m$  allein theoretisch zu bestimmen.

<sup>1)</sup> Diese Wurzel bedeutet natürlich die Lage des Wendepunktes der Gleichung (23), so daß man das Verhalten dieser Gleichung in der Umgebung dessen nach (8) folgendermaßen abschätzen kann:

$$(y_m)_x = \sqrt{n(mn + m - 1)} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}(\sqrt{n(mn + m - 1)} - 1)^{1/2}} - 0\left(\frac{1}{\sqrt{n(mn + m - 1)}}\right). \quad (8')$$

<sup>2)</sup> R. Glocker, l. c.

b) *Berechnung der scheinbaren Trefferzahl aus Gleichung (24).* Die Anwendung derselben Methode wie bei a) auf (24) ergibt nach einer Rechnung

$$\frac{(n-1)x^n}{(n-1)!} - \left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)(n-1-x) = 0, \quad (29)$$

deren allgemeinen Wurzeln sich nicht leicht berechnen lassen. Man muß sich mit den Lösungen für die gegebenen Werte von  $n$  begnügen: Z. B. wenn  $n = 1, 2$  und  $3$  usw., so sind

$$m \neq 0, \quad x = 0, \quad (30)$$

$$m \neq 0, \quad x = \sqrt{1/m}, \quad (31)$$

$$m \neq 0, \quad x = \sqrt[3]{\frac{2}{m}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{27m}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{2}{m}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{27m}}\right)}. \quad (32)$$

Die Werte von  $x$  geben den Wendepunkt der Gleichung (24) an, daher kann diese scheinbare Trefferzahl durch  $\underline{x+1}$ , d. h. entsprechend (30), (31) und (32) je

$$N = 1, \quad (30')$$

$$N = \sqrt{\frac{1}{m}} + 1, \quad (31')$$

$$N = \sqrt[3]{\frac{2}{m}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{27m}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{2}{m}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{27m}}\right)} + 1 \quad (32')$$

gegeben werden.

Wenn man aber von vornherein großes  $n$  voraussetzt, kann man von der Gleichung (24) leicht folgende Abschätzung gewinnen:

$$\begin{aligned} x_{1/2} = n + \sqrt{\pi(n-1)} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - (0,5)^{1/m} \sqrt{2} \right) - \\ - \frac{1}{3} \left( \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - (0,5)^{1/m} \sqrt{2} \right)^2 - 1 \right) + O(1). \end{aligned} \quad (33)$$

c) *Berechnung der scheinbaren Trefferzahl aus Gleichung (25).* Für großes  $m$  läßt sich (25) mit Dänzer<sup>1)</sup> unter Berücksichtigung der Gauss'schen Näherung

$$\binom{m}{n} y^n (1-y)^{m-n} = \frac{e^{-\left(\frac{n-my}{\sqrt{2my(1-y)}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi my(1-y)}} \quad (34)$$

<sup>1)</sup> H. Dänzer, l. c. Bei der Darstellung vom Integral (35) wurde als Normierungsfaktor  $2/\sqrt{\pi}$  gewählt, der bei Dänzer gleich  $1/\sqrt{\pi}$  war.

in folgender Integralform schreiben

$$y_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_Y^{\infty} e^{-Y^2} dY, \quad (35)$$

wobei  $Y = \frac{n-x}{\sqrt{2x(1-\frac{x}{m})}}$  mit  $x = my$ .

Unter Einführung des Fehlerintegrals

$$\left(\frac{1}{2}\right)! E_2(x) = x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \dots \quad (36)$$

wird (35) zu

$$\left. \begin{aligned} y_m &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\infty} e^{-Y^2} dY - \int_0^Y e^{-Y^2} dY \right), \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^Y e^{-Y^2} dY \right), \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^Y e^{-Y^2} dY = 1 - \int_0^Y E_2'(x) dx = 1 - E_2(Y). \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Da wir uns hierbei nur für die Lage des Wendepunktes von (37) interessieren, wird wieder dieselbe Differentiation wie bei a) bzw. b) durchgeführt. Es ergibt sich jetzt nach einer langwierigen Rechnung

$$\begin{aligned} 4mx^5 - 4x^4(2m^2 + m(1-n) + 2n) + mx^3(4m^2 + m(11-12n+4n^2) + \\ + 16n) - m^2x^2(3m^2 + m(4n^2 + 3n + 4) + 4n(n-1)^2) + \\ + m^2x(m(1+5n-3n^2) + 4n(n-1)^2) - nm^3(n-1)^2 = 0, \end{aligned} \quad (38)$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind im allgemeinen schwer zu erhalten. Man kann aber, wenn es sich um nicht so großes  $x$  handelt, (38) eventuell annähernd durch

$$x \approx \frac{n(n-1)^2}{m(1+5n-3n^2) + 4n(n-1)^2} \quad (39)$$

ersetzen. (39) ergibt direkt die Lage des Wendepunktes von (37), daher kann die scheinbare Trefferzahl durch  $\underline{x+1}$ , also

$$1 + \frac{n(n-1)^2}{m(1+5n-3n^2) + 4n(n-1)^2}$$

definiert werden.

Es bleibt noch übrig, die drei Resultate von (23), (24) und (25) miteinander zu vergleichen. Da es nicht praktisch erscheint, die Wendepunktdosis aus den experimentellen Schädigungskurven zu entnehmen, kann

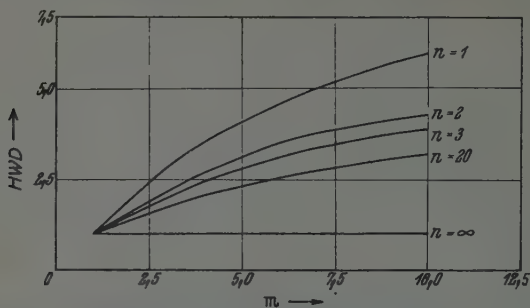


Fig. 3 a. Beziehung zwischen Halbwertsdosis (HWD) und  $m$  bei festem  $n$ , die von der Gleichung (22) abgeleitet worden ist.

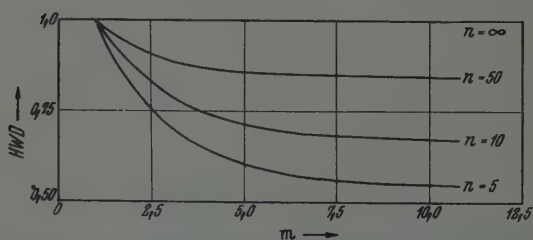


Fig. 3 b. Beziehung zwischen Halbwertsdosis und  $m$  bei festem  $n$ , die von der Gleichung (33) abgeleitet worden ist.

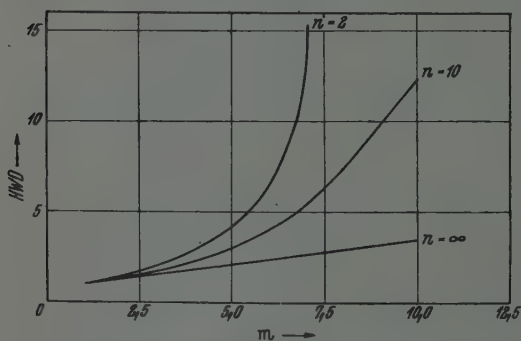


Fig. 3 c. Beziehung zwischen Halbwertsdosis und  $m$  bei festem  $n$ , die von der Gleichung (24) abgeleitet worden ist.

anstatt der Wendepunktdosis  $D_w$  die Halbwertsdosis, die bereits oben definiert ist, gewählt werden. Die Fig. 3 ergibt die Beziehungen zwischen  $m$  und  $D^{1/2}$  bei festen  $n$ .



### 5. Einführung der Variabilität der Zellempfindlichkeit gegenüber der Bestrahlung.

Sei  $\varepsilon_n$  die Empfindlichkeit, die der Trefferzahl  $n$  entspricht, so wird der Mittelwert der Wahrscheinlichkeit, daß mindestens  $n$ -mal getroffen werden soll,

$$\frac{y_\varepsilon}{y_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_\infty(n)}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n}, \quad (40)$$

was auch in folgender Form ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{y_\varepsilon}{y_0} &= 1 - e^{-x} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x^m}{m!}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n} \\ &= 1 - \frac{e^{-x}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n} \left( \varepsilon_1 + \varepsilon_2 (1+x) + \varepsilon_3 \left( 1+x+\frac{x^2}{2!} \right) + \dots \right). \end{aligned} \quad (41)$$

Wenn man der Einfachheit halber für  $\varepsilon_n$  die Poissonsche Verteilung  $\frac{e^{-x_1} x_1^n}{n!}$  annimmt, so geht (41) über in

$$\frac{y_\varepsilon}{y_0} = 1 - e^{-(x+x_1)} \left( x_1 + \frac{x_1^3}{2!} (1+x) + \frac{x_1^3}{3!} \left( 1+x+\frac{x^2}{2!} \right) + \dots \right). \quad (42)$$

Wir haben hier nur Gleichung (42) zu betrachten, die einer mathematischen Analyse unterzogen werden soll.

a) *Darstellung der Gleichung (42) durch Bessel-Funktionen.* Um die Gleichung (42) irgendwie zu deformieren, ist es nicht sehr bequem, von (42)

<sup>1)</sup> R. Glocker, l. c. Diese ist aber von Meissner (vgl. A. Zuppinger, Strahlenther. 28, 639, 1928) als  $y = \sum_{r=0}^{\infty} y_r \sum_{s=0}^r \varepsilon_s$  definiert, mit  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \rightarrow 1$ , wobei  $y_r = 1 - e^{-x} \left( 1+x+\frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \right)$ . Es ist jedoch zu bemerken, daß mit dieser Formel etwa dasselbe Resultat wie Meissner herauskommt.

selbst auszugehen, sondern von (40) unter Berücksichtigung der Annahme der Poissonschen Verteilung für  $\varepsilon_n$ . Man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_{\infty}(n)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n e^{-x_1}}{n!} \left( 1 - e^{-x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right) \\ &= 1 - e^{-(x+x_1)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right) \\ &= 1 - e^{-(x+x_1)} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n x^{n-1}}{n! (n-1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n x^{n-2}}{n! (n-2)!} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n}{n!} \right) \\ &= 1 - e^{-(x+x_1)} \left( -i \sqrt{\frac{x_1}{x}} J_1(2i\sqrt{xx_1}) - \frac{x_1}{x} J_2(2i\sqrt{xx_1}) + \right. \\ &\quad \left. + i \left( \frac{x_1}{x} \right)^{3/2} J_3(2i\sqrt{xx_1}) + \dots \right). \end{aligned} \right\} (43)$$

Da  $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \rightarrow 1$ , so ist

$$\frac{y_{\varepsilon}}{y_0} = 1 - e^{-(x+x_1)} \left( -i \sqrt{\frac{x_1}{x}} J_1(2i\sqrt{xx_1}) - \frac{x_1}{x} J_2(2i\sqrt{xx_1}) + \right. \\ \left. + i \left( \frac{x_1}{x} \right)^{3/2} J_3(2i\sqrt{xx_1}) + \dots \right). \quad (44)$$

$J_n(x)$  sind die Bessel-Funktionen erster Art von der Ordnung  $n$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Zu dem gleichen Ziel kann man auch auf einem anderen Wege kommen: Unter Benutzung der Reihenentwicklung (8) wird (40) zu

$$\frac{y_{\varepsilon}}{y_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n e^{-x_1}}{n!} \cdot \frac{x^n e^{-x}}{n!} \left( 1 + \frac{x}{n+1} + \frac{x^2}{(n+1)(n+2)} + \right. \\ \left. + \frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right), \quad (45)$$

die sich direkt in

$$\frac{y_{\varepsilon}}{y_0} = e^{-(x+x_1)} \left( J_0(2i\sqrt{xx_1}) - i \sqrt{\frac{x_1}{x}} J_1(2i\sqrt{xx_1}) - \frac{x}{x_1} J_2(2i\sqrt{xx_1}) + \right. \\ \left. + i \left( \frac{x}{x_1} \right)^{3/2} J_3(2i\sqrt{xx_1}) + \dots \right) \quad (46)$$

verwandelt.

<sup>1)</sup> Die Gleichung (44) sowie (46) gibt dasselbe Resultat, wie es sein muß.

Der Verlauf von  $(y_\epsilon/y_0)_{x=x_1}$  ist in Fig. 4 wiedergegeben. Es ist merkwürdig, daß  $(y_\epsilon/y_0)_{x=x_1}$  sich immer 0,5 nähert, was á priori mit den früheren Abschätzungen für Einzeller übereinstimmend ist [vgl. auch (8), (18) und (22)].

Es liegt deshalb die Annahme nahe, daß  $x_1 = x$  in Wirklichkeit etwa den Wendepunkt bzw. den Punkt von (44) bzw. (46), dem die Halbwertsdosis entspricht, bedeutet. Dies wird im folgenden bewiesen werden.

b) Die Frage, ob  $x = x_1$  für (44) bzw. (46) den Wendepunkt ergibt. Es genügt schon, wenn die Tatsache, daß  $x = x_1$  wirklich den Wendepunkt von (44) bzw. (46) gibt, für großes  $x$  bewiesen wird, wie bei (8) bzw. (22). Wir gehen nicht direkt von (44) oder (46) aus, sondern von (40), deren zweimalige Differentiation liefert:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)'' = e^{-(x+x_1)} \left( i \sqrt{\frac{x_1}{x}} J_1(2i\sqrt{x x_1}) - J_2(2i\sqrt{x x_1}) \right), \quad (47)$$

was leicht zu beweisen ist.

Da für großes  $x$  bzw.  $x_1$

$$\left. \begin{aligned} J(ix) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \cdot i \left( 1 - \frac{3}{1!8x} - \frac{15}{2!(8x)^2} \right), \\ J(ix) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (-1) \left( 1 - \frac{15}{1!8x} + \frac{105}{2!(8x)^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

gelten, so reduziert sich unsere Aufgabe darauf, die folgende elementare Gleichung zu lösen:

$$x_1 - \frac{15}{16} \left( \frac{x}{x_1} \right)^{1/2} - (x x_1)^{1/2} + \frac{3}{16} = 0. \quad (49)$$

Dies ist relativ leicht getan:

$$x = x_1 \left( 1 - \frac{1}{2(4x_1 + 5)} \right)^2. \quad (50)$$

Aus (50) kann man leicht erkennen, daß  $x$  sich immer  $x_1$  nähert, wenn es genügend groß gewählt wird, was ja zu beweisen war. Es ist damit völlig

<sup>1)</sup> Vgl. E. Jahnke u. F. Emde, l. c. — <sup>2)</sup> Dieser Ansatz oder  $x = x_1$  führt mit Hilfe der Formel (40) zur Bestimmung der Trefferzahl (vgl. A. Zupping, l. c.). Dort hat Meissner seinerzeit nicht deutlich geklärt, was für einen Punkt  $x = x_1$  eigentlich darstelle, allerdings ihn als Wendepunkt nicht betrachtet.

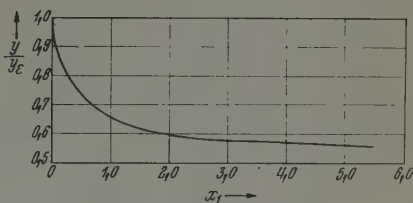


Fig. 4. Der Verlauf von  $(y/y_0)_{x=x_1}$ .  
[Vgl. Gleichung (43)].

geklärt, daß  $(y_e/y_0)_x = x_1$ , wie oben erwähnt, sich dem Wert 0,5 nähert. Die Erfahrung hat gezeigt, daß bei photochemischen Prozessen, z. B. bei der Schwärzung der photographischen Schicht, es nicht gleichgültig ist, ob bei gleicher Lichtmenge das Licht mit großer Intensität in kurzer Zeit oder mit kleiner Intensität in langer Zeit zur Einwirkung kommt. Die Schwärzung ist in dem zweiten Fall geringer. Die Zusammenhänge finden hier ihren Ausdruck in dem sogenannten Schwarzschildschen Gesetz. Es ist nun bekannt, daß bei der Einwirkung ionisierender Strahlen auf Lebewesen ähnliche Verhältnisse herrschen. Der Grund ist hier vor allem in der mehr oder weniger stattfindenden Erholung der geschädigten Zellen zu suchen. Es schien uns daher zweckmäßig, bei der Erweiterung der Trefferformel (1) auch das Schwarzschildsche Gesetz einzubeziehen.

*6. Erweiterung der Trefferformel (1) durch Berücksichtigung des Schwarzschildschen Gesetzes.*

Um die Formel (1) so zu modifizieren, daß man bei der biologischen Strahlenwirkung der Empfindlichkeit der bestrahlten Zellen Rechnung trägt, setzt man in (1) einfach  $D = I \cdot t^\beta$ , wo  $I$  = die Intensität der Strahlung bekannter Wellenlänge,  $t$  = Expositionsdauer,  $\beta$  = Schwarzschild-scher Exponent ( $> 0$ ). Man erhält so:

$$\frac{y_\beta}{y_0} = 1 - e^{-\alpha I t^\beta} \left( 1 + \alpha I t^\beta + \frac{(\alpha I t^\beta)^2}{2!} + \dots + \frac{(\alpha I t^\beta)^{n-1}}{(n-1)!} \right), \quad (51)$$

welche Gleichung für verschiedene Wert von  $\beta$  in Fig. 5 a, b, c wiedergegeben ist. Es ist bei diesen Kurven zu bemerken, daß das Resultat für  $\beta = 5$  und  $n = 2$  schon eine Kurve darstellt, die gewonnen werden kann, wenn man in der Formel (1)  $n =$  etwa 193 setzt (Fig. 5c).

Da  $I \cdot t = D_0$  die Dosis ohne Erholung ergibt (Bunsen-Roscoesches Gesetz,  $\beta = 1$ ), geht (51) über in

$$\begin{aligned} \frac{y_\beta}{y_0} = 1 - e^{-\alpha D_0 t^{-(1-\beta)}} & \left( 1 + \alpha D_0 t^{-(1-\beta)} + \right. \\ & \left. + \frac{(\alpha D_0)^2}{2!} t^{-2(1-\beta)} + \dots + \frac{(\alpha D_0)^{n-1}}{(n-1)!} t^{-(n-1)(1-\beta)} \right). \quad (52) \end{aligned}$$

Wir beschränken uns auf den einfachsten Fall, der aber oft vorkommt, nämlich  $0 < \beta < 1$ . Es kann  $t \geq 1$  angenommen werden, ohne dabei an Allgemeinheit zu verlieren. Wenn  $\beta \sim 1$  gedacht wird, nehmen die Glieder  $\frac{(\alpha I t^\beta)^{m-1}}{(m-1)!}$  bzw.  $\frac{(\alpha D_0)^{m-1}}{(m-1)!} t^{-(m-1)(1-\beta)}$  in (52) ständig mit wachsendem  $m$  ab. Darum kann man erwarten, daß diese Reihe früher oder später an einer

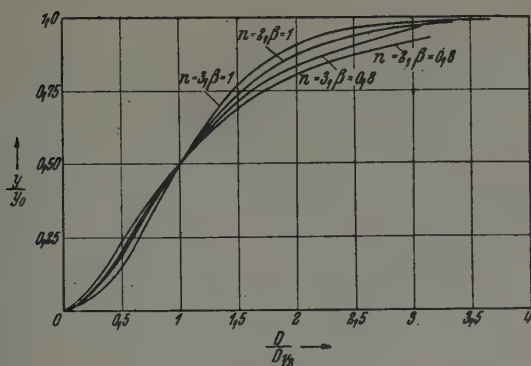


Fig. 5 a.

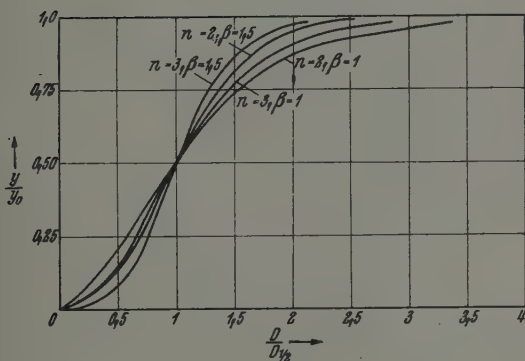


Fig. 5 b.

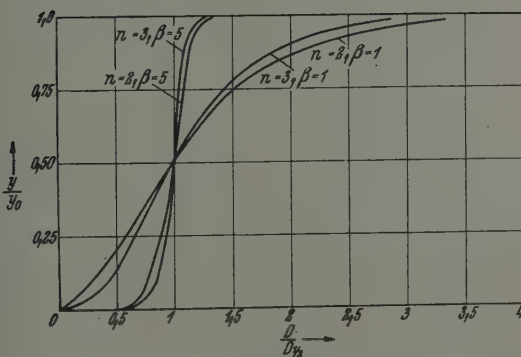


Fig. 5 c.

Fig. 5. Vergleich der gewöhnlichen Trefferformel (1) mit der erweiterten (3), die in a) für  $\beta = 0,8$ , in b) für  $\beta = 1,5$ , in c) für  $\beta = 5$  eingezeichnet ist.  $D/D_{1/2}$  als die Abzisse bedeutet eine Vielfachheit der Halbwertsdosis (vgl. Text).



Stelle abbricht, was auch die Identität mit einer Formel<sup>1)</sup>, die jedoch in anderer Weise abgeleitet worden ist, hinweist. Aus dieser erweiterten Formel (52) läßt sich eine Formel ableiten, die eine Approximation<sup>2)</sup> erster Ordnung darstellt, wenn  $\beta$  wie oben, sich genügend dem Wert 1 nähert:

$$\begin{aligned} \frac{y_\beta}{y_n} = & 1 - e^{-\alpha D_0 t^{(1-\beta)} \alpha D_0} \left( 1 + (\alpha D_0) (1 - (1 - \beta) \log t) + \right. \\ & + \frac{(\alpha D_0)^2}{2!} (1 - 2(1 - \beta) \log t) + \dots + \\ & \left. + \frac{(\alpha D_0)^{n-1}}{(n-1)!} (1 - (n-1)(1 - \beta) \log t) \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden<sup>3)</sup>, die Erholung der geschädigten Zellen als Funktion von  $t$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  auszudrücken. Sie geht übrigens in Gleichung (42) über, wenn  $\beta \gg 1$  wird.

Aus der Gleichung (51) ist die Halbwertsdosis, die mit der Trefferwahrscheinlichkeit  $\alpha$  verknüpft ist, durch folgende Formel gegeben:

$$\alpha D_{1/2} \cdot t_{1/2}^{-(1-\beta)} = n - 1/3, \quad (54, 1)$$

$$\alpha D_w \cdot t_w^{-(1-\beta)} = n - 1, \quad (54, 2)$$

wobei  $D_{1/2}$  = Halbwertsdosis,  $D_w$  = Wendepunktsdosis,  $n$  = Trefferzahl. Außerdem ist der folgende Satz für  $\alpha$  treffertheoretisch berechtigt:

$$\alpha = N_0 \lambda v \cdot \frac{R + a}{a} \quad (55)$$

wobei  $N_0$  = die durch 1 Röntgeneinheit ( $r$ ) in 1 cm<sup>3</sup> Gewebe erzeugte Elektronen- bzw. Ionenzahl,  $\lambda$  = Wellenlänge der Strahlung,  $v$  = das Treffervolumen,  $R$  = die Reichweite des Elektrons bzw. Ions,  $a$  = die freie Weglänge des Elektrons bzw. Ions. Wir haben daher eine Möglichkeit, den oben eingeführten Faktor  $\beta$  als Funktion von  $\lambda$  auszudrücken: Aus (54, 1) und (55) berechnet sich

$$N_0 \lambda v \cdot \frac{a + R}{a} \cdot D_{1/2} \cdot t_{1/2}^{-(1-\beta)} = n - \frac{1}{3} \quad (56)$$

oder

$$\beta = 1 - \frac{1}{\log t_{1/2}} \left( \log \left( n - \frac{1}{3} \right) - \log \left( N_0 \lambda v \cdot \frac{a + R}{a} \cdot D_{1/2} \right) \right).$$

Es ist hier besonders zu beachten, daß diese Formel (56) allgemein abgeleitet worden ist. Zunächst muß man  $\beta$  eher bestimmen als  $v$ . Dies ge-

<sup>1)</sup> B. Rajewsky u. H. Dänzer, ZS. f. Phys. 89, 412, 1934. — <sup>2)</sup> Wenn es sich um den Fall  $\beta \gg 1$  handelt, muß man zur Formel (53) weitere Glieder von höheren Ordnungen als I hinzufügen. — <sup>3)</sup> Davon wird an anderer Stelle die Rede sein. — <sup>4)</sup> R. Glocker, l. c.; N. Koyenuma, Phys. ZS. 42, 213, 1941.

schiebt so, daß man zuerst die Schädigungskurve aufstellt, aus der man, wie üblich,  $n$  und  $D_{1/2}$  bzw.  $t_{1/2}$  bei bestimmter Intensität bestimmt. Auf der anderen Seite müßte eine Kurve vorliegen, die die Beziehung zwischen Schädigung und Intensität wiedergibt. Wenn somit  $\beta$  bekannt ist, kann jetzt  $v$  aus (56) leicht berechnet werden.

Um diese Tatsache zu veranschaulichen, betrachten wir einige Beispiele: Bei Versuchen an Pollen von *Antirrhinum majus* L.<sup>1)</sup> mit Röntgenbestrahlung ergibt sich mit  $D_{1/2} = 190 \cdot 10^3 r$ ,  $\lambda = 0,123 \text{ \AA}$ ,  $n = 11$ ,  $t_{1/2} = 5700 \text{ sec}$ ,  $R = 0,022 \text{ cm}$ ,

$$\beta = 4,112 + 0,532 \log r + \frac{1}{3,763} \log \left( \frac{4}{3} r + 0,022 \right), \quad (57)$$

wobei als  $N_0$   $1,35 \cdot 10^{12}$  Ionenpaare/cm<sup>3</sup> pro  $r$  eingesetzt sind.

Für den Treffbereich gilt  $v = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$  und weiterhin  $a = \frac{4}{3} \cdot r$ , wobei  $r$  = Radius des empfindlichen Volumens.

Die Gleichung ist in Fig. 6b wiedergegeben.

Man erhält z. B. für  $\beta = 0,5$  eine Größe von  $10^{-6} \text{ cm}$ . Bei bekanntem  $\beta$  läßt sich also leicht  $r$  bzw.  $v$  berechnen. Als zweites Beispiel entnimmt man Versuchen mit UV-Bestrahlung von Hefe<sup>2)</sup> die Werte:  $D_{1/2} = 2 \cdot 10^5 \text{ erg/cm}^2$  (umgerechnet in  $r$ -Einheit  $235 \cdot 10^4 r$  im Gewebe),  $N_0 = 3,86 \cdot 10^{12}$  Ionenpaare cm<sup>3</sup>,  $\lambda = 230/10^7 \text{ cm}$ ,  $t_{1/2} = 2 \cdot 10^4 \text{ sec}$ ,  $n = 29$ , so ist

$$\beta = 4,018 + 0,465 \log r + 0,233 \log \left( \frac{4}{3} r + R \right), \quad (58)$$

die ebenfalls in Fig. 6a wiedergegeben ist. Abgesehen von den verschiedenen biologischen Objekten der beiden Versuche ist es noch überraschend, daß die Größe des Treffervolumens sehr verschieden ist, also augenscheinlich sie bei UV-Licht nicht kleiner ist als bei Röntgenstrahlen.

Von besonderem Interesse ist es aber, danach zu fragen, ob bei demselben Objekt der gleiche Schluß wie oben gezogen werden kann. Um diese Frage zu beantworten, muß man ausgehen von den Beziehungen

$$\alpha_r \cdot D_{wr} = n_r - 1, \quad (59)$$

$$\alpha_u \cdot D_{wu} = n_u - 1, \quad (60)$$

<sup>1)</sup> R. Kaplan, Biol. Zentralbl. 60, 298, 1940. — <sup>2)</sup> H. Schreiber, Strahlenther. 49, 541, 1934.

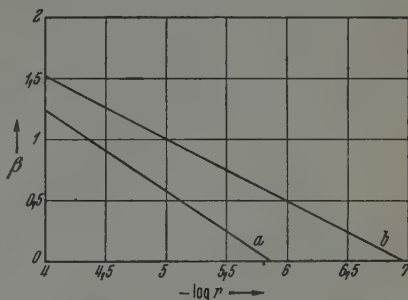


Fig. 6. Beziehung zwischen  $\beta$  und der Größe des Treffvolumens ( $r$ ). a) Versuch an Hefe, behandelt mit monochromatischem UV-Licht. b) Versuch an Pollen von *Antirrhinum majus* L., behandelt mit Röntgenstrahlen.

welche mit der Gleichung (54) identisch sind, wobei  $r$  bzw.  $u$  sich auf die Röntgenstrahlen bzw. UV bezieht. Da, streng genommen, die UV-Dosis nicht in zwei dimensional Koordinaten, sondern in drei dimensional, von denen die eine infinitesimale Länge besitzt, ausgemessen wird, darf man, ohne an Allgemeinheit zu verlieren,

$$k \cdot D_{wr} = D_{wu} \quad (61)$$

setzen.  $k$  bedeutet eine Konstante. Die Kombination von sämtlichen Formeln liefert

$$\alpha_r \left( \frac{n_u - 1}{n_r - 1} \cdot \frac{1}{k} \right) = \alpha_u, \quad (62)$$

aus welcher, falls  $k$ ,  $n_u$ ,  $n_r$  bekannt sind, das Verhältnis  $\alpha_u/\alpha_r$  berechnet werden kann.

Nun hat man die Gleichung (62) auszuwerten an Hand der praktischen Beispiele. Glocker<sup>1)</sup> und seine Mitarbeiter haben früher die Wellenlängenabhängigkeit der biologischen Strahlenwirkung der Röntgenstrahlen auf Hefe studiert und gefunden, daß sich bei der Bestrahlung mit verschiedenen Wellenlängen dieselbe Trefferzahl 5 ergab, z. B. bei  $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$  mit der Halbwertsdosis  $2,8 \cdot 10^4 r$  (vgl. Tabelle 9). Die Dosis ist in Luft gleich etwa  $8,09 \cdot 10^8 \text{ erg}$ .

Tabelle 2. Heferversuch.

$\lambda$ in $\text{\AA}$ .....	8,32 <sup>2)</sup>	1,93 <sup>2)</sup>	1,54 <sup>1)</sup>	0,56 <sup>1)</sup>
$D$ in $r$ .....	16 600	26 300	28 000	42 000

Das Beispiel für UV entnimmt man wieder den Heferversuchen Schreibers<sup>3)</sup>, wonach, wie oben,  $\lambda = 280/10^7 \text{ cm}$ ,  $D_{1/2} = 2 \cdot 10^5 \text{ erg}$ ,  $n = 29$ . Setzt man diese Zahlenwerte in (62) ein, so erhält man  $10^{-1} \alpha_r = \alpha_u$ . Dies besagt wohl, daß das Treffervolumen bei UV etwa zehnfach kleiner ist als das bei Röntgenstrahlen.

Wenn man beim Röntgenstrahlenversuch eine andere Wellenlänge wählt, gewinnt man ebenfalls  $\alpha_r > \alpha_u$ . Die gleiche Beziehung findet man beim UV-Versuch mit  $\lambda = 254 \text{ m}\mu$ , wo  $n = 6$ ,  $D = 5 \cdot 10^4 \text{ erg/cm}^2$ , d. h. alle möglichen Kombinationen der Resultate von Röntgenstrahlen

<sup>1)</sup> R. Glocker, l. c. — <sup>2)</sup> Die Ergebnisse für 8,32  $\text{\AA}$  und 1,93 sind entnommen aus F. Holweck u. A. Lacassagne, C. R. 186, 1316, 1318, 1928; 188, 192, 194, 1929; 190, 524, 527, 1930; C. R. Soc. biol. 100, 1101, 1929; 103, 60, 766, 1930; 104, 1221, 1930. — <sup>3)</sup> H. Schreiber, l. c.

mit den UV-Versuchen ergeben bei Hefe stets  $\alpha_r > \alpha_u$ . Ob die Beziehung  $\alpha_r > \alpha_u$ , die hier bei Hefe bewiesen worden ist, allgemeine Gültigkeit besitzt, muß noch dahingestellt bleiben, solange diesbezügliche Versuche nicht an anderen Objekten durchgeführt sind. Bei dieser Gelegenheit werden wir eine eindeutige Korrespondenz zwischen dem Schwarzschildschen Gesetz und der erweiterten Trefferformel (52) beweisen.

*7. Korrespondenz zwischen dem Schwarzschildschen Gesetz und der erweiterten Trefferformel (52).*

Das Schwarzschildsche Gesetz lautet:

$$I \cdot t^\beta = D_\beta, \quad (63)$$

wo  $1 \geq \beta > 0$ . Wenn in (63)  $\beta = 1$  ist, so erhält man die maximale Dosis  $D_1$  bzw. maximale Wirkung (Bunsen-Roscoescher Fall). Infolgedessen gilt im allgemeinen

$$D_1 > D_\beta. \quad (64)$$

Umgekehrt kann man sich denken, daß die Empfindlichkeit der bestrahlten Objekte  $\varepsilon_\beta$  dem reziproken Wert einer Dosis entspricht, für die die Schwelle einer Schädigung erreicht werden soll, also

$$\varepsilon_\beta = l/D_\beta, \quad (65)$$

wobei  $l$  = eine Konstante. Andererseits ist die volle Wirkung, die erzielt werden könnte,  $D_1$ . Daher darf die Erholung durch den Ansatz

$$D_1 - D_\beta = \text{Erholung} \quad (66)$$

definiert werden. Die so definierte Erholung kann mit Hilfe von (63) in der folgenden Form ausgedrückt werden

$$\text{Erholung} = I \cdot t (1 - t^{-(1-\beta)}). \quad (67)$$

Sie ist also proportional  $(1 - t^{-(1-\beta)})$ . Die Empfindlichkeit ist, wie oben definiert, durch

$$\varepsilon_\beta = I^\beta \beta^{-1} = D_1^{-1} t^{(1-\beta)} \quad (68)$$

gegeben, was genau der Formel (54, 1) entspricht. Somit ist der Beweis für die Korrespondenz zwischen dem Schwarzschildschen Gesetz und der Ableitung der gemäß demselben Gesetz erweiterten Trefferformel erbracht.

Wir wollen nun versuchen, auch die entsprechende Korrespondenz zwischen dem Schwarzschildschen Gesetz und der erweiterten Treffer-

formel aufzustellen. Hierfür müssen wir die erweiterte Trefferformel (53) bis zur ersten Ordnung nach Taylor entwickeln und sortieren:

$$\begin{aligned} & W(\alpha, 1, t, n, D_0) - W(\alpha, \beta, t, n, D_0) \\ &= (1 - \beta) \alpha D_0 \log t \cdot \left\{ 1 - W(\alpha, 1, t, n, D_0) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\alpha D_0} (1 + \alpha D_0 + ((1 - \beta) \alpha D_0 \log t)^2 \left( 1 + \alpha D_0 + \frac{(\alpha D_0)^2}{2!} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \frac{(\alpha D_0)^{n-2}}{(n-2)!} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

wobei

$$\begin{aligned} & W(\alpha, \beta, t, n, D_0) \\ &= \frac{y_\beta}{y_0} = 1 - e^{-\alpha I t^\beta} \left( 1 + \alpha I t^\beta + \frac{(\alpha I)^2}{2!} t^{2\beta} + \dots + \frac{(\alpha I)^{n-1} t^{(n-1)\beta}}{(n-1)!} \right), \\ & W(\alpha, 1, t, n, D_0) = [W(\alpha, \beta, t, n, D_0)]_{\beta=1}, \quad D_0 = I \cdot t. \end{aligned}$$

69) reduziert sich weiterhin auf

$$\begin{aligned} & W(\alpha, 1, t, n, D_0) - W(\alpha, \beta, t, n, D_0) = (1 - \beta) \alpha D_0 \log t \times \\ & \times \{ W(\alpha, 1, t, 2, D_0) - W(\alpha, 1, t, n, D_0) - ((1 - \beta) \alpha D_0 \log t)^2 \times \\ & \times W(\alpha, 1, t, n-1, D_0) \}. \end{aligned} \quad (70)$$

Diese Formel besagt, daß die aus der Trefferformel abgeleitete Erholung nicht nur eine lineare Funktion vom Typ  $W(\alpha, 1, t, n, D_0)$ , sondern auch dem Faktor  $(1 - \beta) \cdot \alpha D_0 \log t$  proportional ist, der auch beim Schwarzschildschen Gesetz bis erster Ordnung vorkommt [vgl. Formel (67)].

#### 8. Erweiterung der Trefferformel (1) für Vielzeller mit Variabilität der Zellempfindlichkeit.

Schließlich wird die Formel für die Vielzeller [z. B. Gleichung (23)] noch so erweitert, daß sie gleichzeitig für den Fall gültig ist, daß die biologischen Objekte eine Variabilität der Empfindlichkeit aufweisen. Die Formel lautet

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left( \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_\infty(n)} \right)^m}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n} \quad (71)$$

$\left( \frac{\Gamma_x(n)}{\Gamma_\infty(n)} \right)^m$  kann durch den Ausdruck für die scheinbare Trefferzahl, welche zu  $\sqrt[n]{n(n+m-1)}$  bestimmt worden ist, ersetzt werden. Diese scheinbare

Trefferzahl ist, wenn großes  $n$  und kleines  $m$  vorausgesetzt werden, annähernd  $n \sqrt{m} = n |p|$ , wobei  $|p|$  = ganze Zahl  $\geq \sqrt{m}$ . Dann schreibt sich (71) in

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{\Gamma_x(np)}{\Gamma_{\infty}(np)}}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n}, \quad (72)$$

welche Gleichung, wenn auch  $\varepsilon_n$  die Poissonsche Verteilung darstellt, liefert

$$\frac{y}{y_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1^n e^{-x_1}}{n!} \cdot \frac{\Gamma_x(np)}{\Gamma_{\infty}(np)}. \quad (73)$$

Durch die Gleichung (73) ist  $\frac{\Gamma_x(np)}{\Gamma_{\infty}(np)} = \frac{x^{np} e^{-x}}{(np)!}$  für großes  $n$  gerechtfertigt.

Man kann (73) in die Form bringen:

$$\frac{y}{y_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_1 e^{-x_1}}{n!} \frac{x^{np} e^{-x}}{(np)!}. \quad (74)$$

Es muß jetzt irgendwie die Schwierigkeit überwunden werden, den in (74) vorkommenden Faktor  $1/(np)!$  auszurechnen. Dafür steht der Multiplikationssatz der Fakultät zur Verfügung. Er lautet:

$$Z! \left(Z - \frac{1}{n}\right)! \left(Z - \frac{2}{n}\right)! \dots \left(Z - \frac{n-1}{n}\right)! = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}} \cdot \frac{(nZ)!}{nZ}. \quad (75)$$

Außerdem machen wir gleichzeitig von folgendem Reihenumsatz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^n b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \sum_{n=1}^n b_n \quad (76)$$

Gebrauch, der leicht zu beweisen ist. Mit diesen Vorbereitungen kann (74) nun in

$$\begin{aligned} \frac{y}{y_0} &= e^{-(x+x_1)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \frac{x^{np}}{n! \left(n - \frac{1}{p}\right)! \dots \left(n - \frac{p-1}{p}\right)!} \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} \cdot \frac{1}{p^{np}} \\ &= e^{-(x+x_1)} \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1 x^{p-1})^n}{n! \left(n - \frac{1}{p}\right)! \dots \left(n - \frac{p-1}{p}\right)!} \times \\ &\quad \times \left( \sum_{n=0}^n \frac{(x/p^p)^n}{n!} - \sum_{n=0}^n \frac{(x/p^p)^n}{(n+1)!} \right), \end{aligned} \quad (77)$$



übergeführt werden, die aber für genügend großes  $n$  zu

$$\frac{y}{y_0} = e^{-(x+x_1)} \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1 x^{p-1})^n}{n! \left(n - \frac{1}{p}\right)! \dots \left(n - \frac{p-1}{p}\right)!} \quad (78)$$

wird. Durch weitere Iteration nimmt (78) endlich folgende Form an

$$\frac{y}{y_0} = e^{-(x+x_1)} \sqrt{\frac{(2\pi)^{p-1}}{p}} \frac{(i\sqrt{x x_1})^{\frac{p-1}{p}}}{\left(-\frac{1}{p}\right)! \dots \left(-\frac{p-2}{p}\right)!} J_{-\frac{p-1}{p}}(2i\sqrt{x x_1}). \quad (79)$$

Dabei bedeutet  $J_{-\frac{p-1}{p}}(x) = (-1)^{\frac{p-1}{p}} J_{\frac{p-1}{p}}(x)$  wieder eine Bessel-Funktion. Hier möchten wir einen speziellen Fall von (79) behandeln. Wenn  $p = 2$ , so erhält man leicht

$$\frac{y}{y_0} = \sqrt{\pi} \cdot (i\sqrt{x x_1})^{0,5} J_{-0,5}(2i\sqrt{x x_1}) \cdot e^{-(x+x_1)}, \quad (80)$$

welche Beziehung weiter ausgearbeitet werden soll. (80) kann für großes  $x x_1 (\gg 1)$  folgendermaßen deformiert werden: Unter Berücksichtigung der Abschätzung

$$J_{-0,5}(ix) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} i^{-0,5} \quad (81)$$

für großes  $x$ , wird (80) einfach

$$\frac{y}{y_0} = \frac{1}{2} e^{-(x+x_1)+2\sqrt{x x_1}}. \quad (82)$$

Einsetzen von  $x = x_1$  in (82) ergibt  $(y/y_0)_{x=x_1} = \frac{1}{2}$ , was besagt, daß der Wendepunkt der Gleichung

$$\frac{y}{y_0} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \left(\frac{\Gamma_{\infty}(n)}{\Gamma_{\infty}(n)}\right)^4}{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n} \quad (83)$$

praktisch mit einem Punkt zusammenfällt, an dem gerade deren Halbwertsdosis liegt, d. h. die Schädigungskurve von Gleichung (80) verläuft viel steiler als bei (1) bzw. (40) zu erwarten ist. Um diese Tatsache anschaulich zu machen, werden die Verhältnisse der Gleichungen von (1), (40) und (82) bei ihrem Wendepunkt in Fig. 7 wiedergegeben.

Es ist noch die Frage zu erklären, ob die erweiterte Trefferformel in der Tat eine gute Übereinstimmung mit der experimentellen Schädigungskurve ergibt. Bevor wir uns damit beschäftigen, überzeugen wir uns, daß weder die klassische Theorie noch die verbesserte Theorie Meissners,

wie man leicht aus der Fig. 8 entnimmt, imstande gewesen sind, völlige Übereinstimmung mit dem Experiment zu erzielen. Die Frage zu beantworten, worauf dies zurückzuführen ist, ist gar nicht einfach. Wie bereits

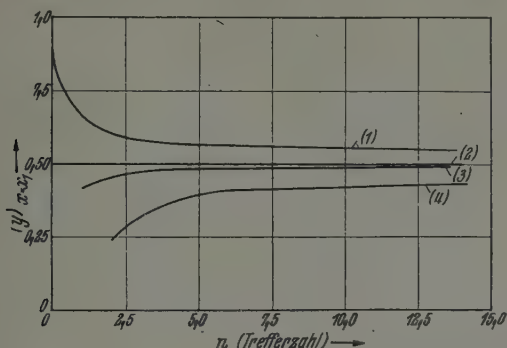


Fig. 7. Die Kurven (1), (2), (3) und (4) sind je der Gleichung (43), (70), (8') und (8) zu entsprechen, in der die Variable  $x$  einen Wert annimmt, der den Wendepunkt ergibt.

erwähnt, könnte es z. B. möglich sein, daß die Theorie Meissners nur für Einzeller gültig ist, während die Askariseier, die Zuppinger benutzte,

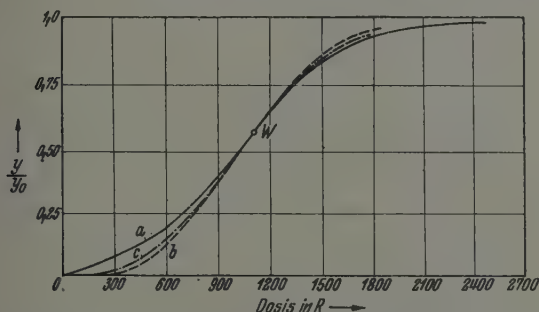


Fig. 8. Askarisversuch (aus der Arbeit Zuppingers).

- a) Experimentell. b) Die klassische Theorie (Blau und Altenburger, Crowther). c) Die erweiterte Theorie von Meissner.

Vielzeller darstellen. Diese Vermutung wird wirklich dadurch bewiesen, wenn die erweiterte Formel (80) folgendermaßen ausgewertet wird.

Wir betrachten hierbei nur den Askarisversuch Zuppingers. Um den Wert  $x_1$  der Gleichung (80), der als scheinbare Trefferzahl bezeichnet wird und große Ähnlichkeit besitzt mit dem von Meissner eingeführten Parameter  $h$ , zu gewinnen, kann man am bequemsten mit Meissner so verfahren, daß die Beziehung des Ausdrucks  $\left[ x \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{y_0} \right) \right]_{x=x_0}$  zu  $\left( \frac{y}{y_0} \right)_{x=x_0}$

graphisch dargestellt, mit dementsprechenden Kurven, die aus dem Experiment entnommen werden können, verglichen wird. Hierfür muß man die Lage des Wendepunktes der Gleichung (80) genau kennen, da früher

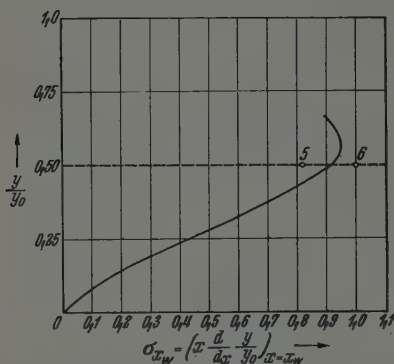


Fig. 9. Bestimmungsmethode des  $x_1$  von Gleichung (80). Ausgezogen: experimentell (Askarisversuch Zuppingers). Gestrichelt: theoretisch. Die Kreuzungen geben die Werte  $x_1$  an, mit denen das Abschneiden der experimentellen Kurve mit der theoretischen am besten übereinstimmt. Der Schnittpunkt ist praktisch bei  $x_1 = 5,6$ .

nur für großes  $x$  die Lage  $x = x_1$  als solcher ausgesprochen worden war. Differenziert man nun (80) in bezug auf  $x$ , so erhält man, unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\frac{dJ_{-0,5}(x)}{dx} = \frac{-0,5}{x} J_{-0,5}(x) - J_{0,5}(x) \quad (84)$$

und (81),

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y}{y_0} \right) = \frac{e^{-(x+x_1)+2\sqrt{x x_1}}}{2(x x_1)^{1/4}} (x_1 - \sqrt{x x_1}), \quad (85)$$

von welcher der Ausdruck

$$\left[ x \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{y_0} \right) \right]_{x=x_w} = \frac{e^{-(x_w+x_1)+2\sqrt{x_w x_1}}}{2(x_w x_1)^{1/4}} (x_1 - \sqrt{x_w x_1}) \cdot x_w \quad (86)$$

leicht gebildet werden kann, wobei  $x_w$  = Wendepunkt von (80).

Aus (85) ergibt sich durch nochmalige Differentiation in bezug auf  $x$  und Gleichsetzen der so entstandenen Beziehung zu Null,

$$x_1 - 2\sqrt{x x_1} - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{x_1}{x}} + x - \frac{1}{2} = 0. \quad (87)$$

Die Wurzel dieser Gleichung berechnet sich leicht zu

$$x_w = 1 + x_1 + \frac{1}{32 x_1} \pm \sqrt{\left( \frac{1}{32 x_1} + \frac{3}{2} \right) \left( \frac{1}{32 x_1} + \frac{1}{2} + 2 x_1 \right)}, \quad (88)$$

<sup>1)</sup> Damit der Ausdruck (86) bei  $x = x_w$  positiv bleibt, muß die Wurzel mit positivem Vorzeichen hierbei gewählt werden.

die für großes  $x_1$ , wie bereits früher bemerkt,  $x_w \cong x_1 \left(1 \pm \sqrt{\frac{3}{x_1}}\right) \approx x_1$  ist. Sind  $x_1$  groß angenommen, so kann aus (86) und (88) die folgende Beziehung abgeleitet werden:

$$\left[ x \frac{d}{dx} \left( \frac{y}{y_0} \right) \right]_{x=x_w} \cong 0,2 x_1 \left( 0,86 - 0,173 \times \frac{1}{x_1} \right), \quad (89)$$

woraus  $x_1 = 6$  sich ergibt, wenn die Beziehung von (89) zu  $(y/y_0)_{x=x_1} = 1/2$  für verschiedenes  $x_1$  graphisch dargestellt, mit dem Experiment verglichen wird, indem man den Schnittpunkt der beiden Kurven bestimmt, der sicher zwischen nacheinander folgenden Werten von  $x_1$  liegen muß (Fig. 9).

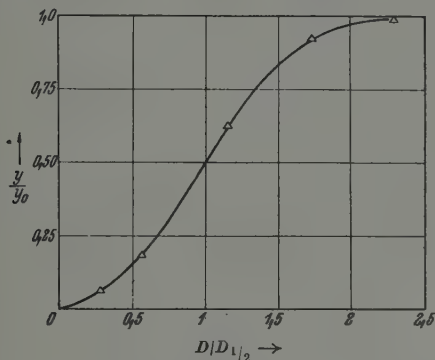


Fig. 10. Die völlige Übereinstimmung der theoretischen Kurve (ausgezogen) mit dem Experiment ( $\Delta$ ).

Setzt man nun in (80)  $x_1 = 6$  ein, so ergibt sich Fig. 10 für verschiedenes  $x$  (ausgezogen). Daneben sind die experimentellen Werte eingezeichnet ( $\Delta$ ). Man kann aus unserer Kurve sagen, die Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment ist ausgezeichnet.

Ich möchte den Herren Prof. W. Friedrich und H. Schreiber für die Diskussionen, sowie der Alexander v. Humboldt-Stiftung für die fort-dauernde Gewährung eines Stipendiums herzlich danken.

Berlin, Institut f. Strahlenforschung der Universität, im September 1942.

## Über eine neue Ionenquelle.

Von **Hans Heil** in Kiel (z. Z. im Felde \*).

Mit 12 Textabbildungen. (Eingegangen am 17. Juli 1942.)

Es wird eine Ionenquelle beschrieben, bei der die Ionen durch Beschießen eines Molekularstrahles bzw. eines Gasstromes bei niedrigem Druck mit Elektronen erzeugt werden. Dabei ist das Bestreben, einen möglichst großen Teil der Elektronen zu ionisierenden Stößen zu führen. Zu diesem Zweck wird jedes Elektron vielfach durch den Molekularstrahl hin- und hergeführt, wobei zum Zusammenhalten der Elektronen ein Magnetfeld entlang der Elektronenbahnen verwendet wird. Auf diese Weise läßt sich in einem nahezu feldfreien Raum eine hohe Elektronendichte aufrechterhalten, ohne daß größere Ströme zur Anode abfließen. — Es werden Überlegungen über die zweckmäßige Dimensionierung und Anordnung der Elektroden angestellt und der Aufbau und die Herstellung der zu den Messungen verwendeten Röhre eingehend beschrieben. — Die Messungen an Quecksilber- und Wasserstoffionen ergeben Stromstärken von 1 bis 2 mA mit Strahlquerschnitten von weniger als 1 cm<sup>2</sup>. Die dazu erforderlichen Elektronenströme betragen 1 bis 5 mA. Die Elektronenausnutzung geht bis zu 80 %. Um den Einfluß von Magnetfeldstärke und Elektronengeschwindigkeit zu untersuchen, werden Oszillogramme der beiden Ströme über der Elektronenspannung bei verschiedenen Magnetfeldern aufgenommen.

### I. Einleitung.

Für verschiedene Zwecke der kernphysikalischen Forschung braucht man starke Ionenquellen, insbesondere für Hochspannungsanlagen zur künstlichen Atomumwandlung. Hierzu ist die gebräuchlichste Ionenquelle das *Kanalstrahlröhr*, wie es in neuzeitlicher Ausführung beispielsweise von C. Hailer<sup>1)</sup> für hohe Ionenausbeuten beschrieben worden ist. Daneben haben zahlreiche Autoren<sup>2)</sup> in jüngerer Zeit versucht, aus dem *Niedervoltbogen* stärkere Ionenströme herauszuziehen. Da bei solchen Hochspannungsanlagen das mit Ionen zu beschießende Objekt sich am geeignetsten auf Erdpotential und folglich die Ionenquelle auf hohem positiven Potential befindet, ist es, abgesehen von der Frage nach großer Intensität, erstrebenswert, mit geringem elektrischen und apparativen Aufwand auszukommen.

Nun brauchen die beiden genannten Arten von Ionenquellen, gemessen an den erzielten Ionenströmen, eine recht erhebliche elektrische Leistung.

\*) D 11.

<sup>1)</sup> C. Hailer, Veröff. a. d. Siemens-Konzern 17, H. 3, 115, 1938. — <sup>2)</sup> E. S. Lamar u. O. Luhr, Phys. Rev. 46, 87, 1934; M. A. Tuve, O. Dahl u. L. R. Hafstad, ebenda 48, 241, 1935; W. H. Zinn, ebenda 52, 655, 1937; E. S. Lamar, W. W. Buechner u. H. T. Compton, ebenda 51, 936, 1937; I. S. Allan, Rev. Sc. Instr. 9, 160, 1938; G. Timoshenko, ebenda 9, 187, 1938; I. A. Gettings, I. B. Fisk u. H. G. Vogt, Phys. Rev. 56, 1098, 1939.

So sind in der Kanalstrahlentladung von Hailer bei 510 Watt Leistung 1000  $\mu\text{A}$  Ionenstromstärke und im Niedervoltbogen von Getting, Fisk und Vogt bei 25 bis 170 Watt im Bogen 250  $\mu\text{A}$  Ionenstromstärke gemessen worden.

Bei der Versorgung des Cyclotrons mit Ionen besteht die übliche Ionenquelle aus einem durch einen geheizten Wolframfaden erzeugten Elektronenstrahl, der im Mittelpunkt zwischen den beiden Duanten hindurchläuft und dabei in dem die Cyclotronkammer füllenden Gas Ionen erzeugt<sup>1)</sup>. Der Gasdruck beträgt  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  mm Hg. Gewöhnlich werden Ionenströme von 1 bis 10  $\mu\text{A}$  erhalten. Mit dem großen Cyclotron in Berkeley sind Ionenströme von etwa 100  $\mu\text{A}$  durch Steigerung der Größe und Emission des Glühfadens erreicht worden bei einer Heizleistung bis zu 1000 Watt<sup>2)</sup>. Livingston, Holloway und Baker<sup>3)</sup> verwenden auch hier eine Kapillarbogen-Ionenquelle mit 300 Watt Leistung und 480  $\mu\text{A}$  Totalionenstrom.

In der lichtstarken Massenspektroskopie, wo man getrennte Isotope in wägbaren Mengen gewinnen möchte, wurden bisher Alkaliglühkathoden als Ionenquelle verwendet<sup>4)</sup>, die aber nur auf eine beschränkte Zahl von Elementen angewendet werden können.

Im folgenden wird eine Ionenquelle beschrieben, die fast universell anwendbar ist und bei günstigster Ausbeute an ionisierenden Stößen mit 1 Watt Leistung bis zu 1000  $\mu\text{A}$  Ionenstrom ohne großen apparativen Aufwand zu liefern imstande ist.

## II. Planung der Arbeit.

Im Gegensatz zu den bisher genannten beruht die nachfolgend beschriebene Ionenquelle auf dem Prinzip, einen Elektronenstrahl mit einem getrennt davon erzeugten Molekularstrahl zu kreuzen und die entstehenden Ionen mittels eines elektrischen Feldes aus dem Ionisationsraum herauszuziehen. Eine solche Anordnung wird man vernünftigerweise so wählen, daß Elektronen- und Molekularstrahl entweder parallel oder senkrecht zueinander laufen. Obwohl im ersten Falle der Gasstrom sicherlich besser ausgenutzt wird, so zeigte sich, wie Vorversuche ergeben haben, daß schon bei relativ niedrigen Molekularstrahldichten Entladungen zünden, wenn man, wie das in der endgültigen Anordnung gemacht wird, ein elektronenbündelndes Magnetfeld benutzt. Deshalb erschien der zweite Fall, bei dem

<sup>1)</sup> M. C. Henderson u. M. G. White, Rev. Sc. Instr. 9, 25, 1938. —

<sup>2)</sup> J. R. Dunning u. H. L. Anderson, Rev. Sc. Instr. 8, 158, 1937. — <sup>3)</sup> M. St. Livingston, M. G. Holloway u. C. P. Baker, Rev. Sc. Instr. 10, 63, 1939.

— <sup>4)</sup> W. Walcher, ZS. f. Phys. 108, 376, 1938.



Elektronen- und Molekularstrahl sich senkrecht durchsetzen, als der günstigere.

Die Ionen zieht man entweder in Molekularstrahlrichtung oder senkrecht zu ihr und der Elektronenstrahlrichtung heraus, je nachdem, ob es wichtig erscheint oder nicht, Molekular- und Ionenstrahl zu trennen. Um Geschwindigkeitsstreuungen in der Fortpflanzungsrichtung der Moleküle klein zu halten, muß man den Ionisierungsraum möglichst feldfrei machen. Indem man so das energieliefernde Feld vermeidet, tritt man gleichzeitig der Bildung eines Gasentladungsplasmas, das sich bei höheren Stromdichten einstellen muß, entgegen.

Aus diesen Überlegungen heraus wurde eine Anordnung gewählt, wie sie in Fig. 1 skizziert ist, d. h. Elektronen- und Molekularstrahl durchkreuzen sich senkrecht; die Ionen werden in der Flugrichtung herausgezogen.

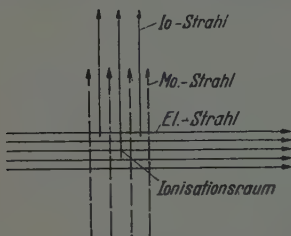


Fig. 1. Schematische Skizze der Anordnung von Elektronen-, Molekular- und Ionenstrom.

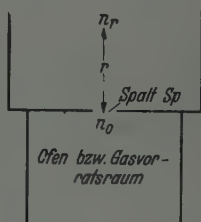


Fig. 2. Zur Berechnung der Teilchendichte im Molekularstrom.

Um zu sehen, welche Gesichtspunkte bei der Anordnung von Molekular- und Elektronenstrahl zweckmäßigerweise zu beachten sind, soll zuerst überschlagen werden, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß einerseits ein Elektron ein Ion erzeugt und andererseits ein Molekül auf seinem Weg durch den Elektronenstrahl ionisiert wird. Dafür sind die beiden Verhältnisse maßgeblich: Ionenstromstärke zu Elektronenstromstärke und Ionenstromstärke zu Gasstromstärke. Wenn man den Ionen- und den Elektronenstrom bzw. mit  $I_J$  und  $I_E$  (gemessen im Ampere) und den Molekülstrom mit  $I_M$  (ebenfalls in Ampere gemessen, so als ob jedes Molekül eine elektrische Elementarladung trüge) bezeichnet, so lassen sich die folgenden Wirkungsgrade definieren:

$$\alpha_E = \frac{I_J}{I_E} = \text{Wirkungsgrad bezüglich Elektronen,} \quad (1)$$

$$\alpha_M = \frac{I_J}{I_M} = \text{Wirkungsgrad bezüglich Molekülen.} \quad (2)$$

Will man Aussagen über diese Wirkungsgrade machen, so muß man die Teilchendichte im Molekularstrahl abschätzen. Bezeichnet man mit  $n_0$  die Zahl der Moleküle/cm<sup>3</sup> im „Ofen“, der durch den Spalt  $Sp$  vom Ionisationsraum abgetrennt ist (Fig. 2), so beträgt die Zahl  $n_r$  der Moleküle/cm<sup>3</sup> im Abstände  $r$  über der Mitte des Spaltes:

$$n_r \approx \frac{n_0 b}{4 \pi r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} [\text{Teilchen/cm}^3], \quad (3)$$

wenn  $b$  und  $l$  Breite und Länge des Spaltes bedeuten und  $b \ll l$  gewählt wird<sup>1)</sup>. Für den Fall, daß auch noch  $r \ll l$  ist, was bei der verwendeten Ionenquelle recht gut verwirklicht wird, gilt dann:

$$n_r \approx \frac{n_0 b}{2 \pi r} [\text{Teilchen/cm}^3]. \quad (4)$$

Die Teilchendichte im Molekularstrahl ist also nach (3) und (4) unabhängig von der mittleren Molekularstrahlgeschwindigkeit  $\bar{v} \sim \sqrt{\frac{T}{M}}$ , was auch verständlich erscheint, da in demselben Maße, in dem die Gesamtströmung größer wird, die Dichte infolge der größeren Geschwindigkeit abnimmt.

Um einen sauberen Molekularstrahl zu erhalten, wird im allgemeinen gefordert, daß die freie Weglänge  $\lambda$  im Ofen nicht wesentlich kleiner werden darf als die Breite  $b$  des Ofenspaltes. Das bedeutet, da dann  $b \leq \lambda \sim \frac{5 \cdot 10^{13}}{n_0}$  wird, daß Teilchendichte im Ofen und Spaltbreite so zueinander abgestimmt werden müssen, daß

$$n_0 b \leq 5 \cdot 10^{13} \quad (5)$$

bleibt.

Mit Hilfe der Teilchendichte (4) läßt sich der Wirkungsgrad  $\alpha_E$  angeben. Bezeichnet man die differentiale Ionisation, d. i. die Zahl der von einem Elektron in einem Gas vom Druck von 1 mm Hg und 0° C auf 1 cm Weg erzeugten Ionen, mit  $s$ , so gilt

$$I_J = I_E s \frac{n}{n^*} l [\text{Amp.}], \quad (6)$$

( $l$  = wirksamer Weg der Elektronen,  $n^* = 3,6 \cdot 10^{16}$  = Teilchendichte bei 0° C und 1 mm Hg.)

Kreuzt also der Elektronenstrahl den Molekularstrahl im Abstand  $r$  vom Spalt, so ist unter Zuhilfenahme von (4):

$$I_J \approx I_E s \frac{n_0 b l}{n^* 2 \pi r} [\text{Amp.}] \quad (7)$$

<sup>1)</sup> Die Formel (3), die sich gaskinetisch leicht ableiten läßt, gilt natürlich nicht mehr bei  $r = 0$ . Die Teilchendichte  $n_r$  variiert sehr wenig, wenn der Aufpunkt unter Beibehaltung des Abstandes  $r$  über den Spalt wandert.

und es wird:

$$\alpha_E = \frac{I_I}{I_E} \approx s \frac{n_0}{n^*} \frac{bl}{2\pi r}. \quad (8)$$

Bei Berücksichtigung von (5) erhält man im besonderen:

$$\alpha_E \leq 2 \cdot 10^{-4} s \frac{l}{r}. \quad (8a)$$

Aus (8) liest man ab, daß der Wirkungsgrad der Elektronen  $\alpha_E$  groß wird, wenn man  $l$  groß und  $r$  klein macht. Die gewünschte Anordnung ist daher so zu gestalten, daß man einen *langen* Ofenspalt wählt und *unmittelbar* über ihn den *engebündelten* Elektronenstrahl in der Längsrichtung des Spaltes führt (s. Fig. 3).

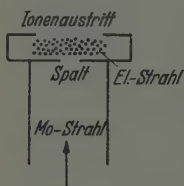


Fig. 3. Die Anode (schematisch) mit Gaszuleitungsrohr, Spalt und Ionisationsraum. Der Elektronenstrom verläuft senkrecht zur Zeichenebene.

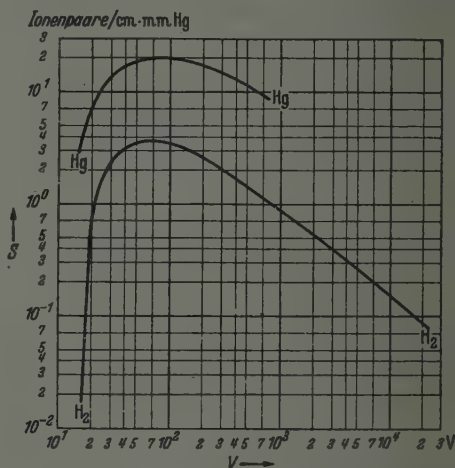


Fig. 4. Differentiale Ionisierung  $s$  von Hg und  $H_2$  nach A. v. Engel und M. Steenbeck, Elektrische Gasentladungen I (Berlin 1932), S. 35.

Die differentiale Ionisation  $s$ , die von der Elektronengeschwindigkeit und von der Art der Molekeln abhängt, hat, wie man aus Fig. 4 ersieht, in der als Beispiel für kleines  $s$  Wasserstoff, für großes  $s$  Quecksilber gewählt ist, selbst bei günstigsten Elektronengeschwindigkeiten einen Wert, der die Zahl 10 kaum überschreitet. Da  $l$ , der wirksame Elektronenweg im Molekularstrahl, bei normaler Anordnung zweckmäßigerweise nicht mehr als 1 bis 2 cm lang gemacht werden kann und  $r$ , der Abstand des Elektronenstrahles vom Spalt, gemäß (8) mindestens die Größe der Spaltbreite  $b$  haben muß, so darf man im besten Falle mit einem  $\alpha_E$  von einigen Promille rechnen. Dabei ist zu beachten, daß der so abgeschätzte Wirkungsgrad nur für Elektronen gilt, die dicht über den Spalt laufen, d. h. daß dem tatsächlich wirkenden Elektronenstrom nur ein verhältnismäßig kleiner Querschnitt zur Verfügung steht. Um beispielsweise einen Ionenstrom von 100  $\mu A$  zu

erhalten, wäre ein Elektronenstrom  $J_E$  von 50 mA (entsprechend  $\alpha_E = 20\%$ ) erforderlich. Diesem Strom stünde in einer praktischen Anordnung ein Querschnitt von etwa  $2 \times 6 \text{ mm}^2$  zur Verfügung, so daß eine Elektronenstromdichte von rund  $420 \text{ mA/cm}^2$  zu erzeugen wäre.

Um die *Ausnutzung des Molekularstromes*  $\alpha_M$  zu diskutieren, muß man den Teilchenstrom durch den Spalt berechnen. Die Zahl  $Z$  der Teilchen, die pro sec durch den Spalt treten, ist:

$$Z = n_0 b l \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} \text{ [Teilchen/sec]} \quad (R = \text{Gaskonstante}) \quad (9)$$

und es wird:

$$I_M = Ze \approx 6 \cdot 10^{-16} n_0 b l \sqrt{\frac{T}{M}} \text{ [Amp.]} \quad (10)$$

( $e$  = Elementarladung, gemessen in Coulomb).

$\alpha_M$  wird dann unter Berücksichtigung von (7):

$$\alpha_M = \frac{I_M}{I_E} \approx 7 \cdot 10^{-3} I_E \frac{s}{r} \sqrt{\frac{M}{T}}. \quad (11)$$

$\alpha_M$  ist umgekehrt proportional zur mittleren Molekulargeschwindigkeit  $\bar{v} \sim \sqrt{\frac{T}{M}}$ , was auch verständlich erscheint, wenn man bedenkt, daß der Gasstrom mit sinkendem  $v$  kleiner wird, während die für die Ionisation maßgebende Dichte die gleiche bleibt. Aus diesem Grunde ist die Ausnutzung eines Wasserstoffstrahles etwa zehnmal kleiner als die eines entsprechenden Hg-Strahles.

Die experimentell verfügbare Größe zur Verbesserung der Gasausnutzung  $\alpha_M$  ist der Strom  $I_E$ . Dabei kommt es, wie bereits bei der Diskussion von  $\alpha_E$  erwähnt, wieder darauf an, hohe Elektronenstromdichten zu erzielen, da der für den Strom verfügbare günstige Querschnitt gering ist. Bei den üblichen Emissionsdichten von Glühkathoden im Betrage von etwa  $500 \text{ mA/cm}^2$  und einem Strahlquerschnitt von  $2 \times 6 \text{ mm}^2$ , wie er nachfolgend verwendet wird, erhält man für einen Hg-Atomstrahl größenordnungsmäßig ein  $\alpha_M$  von 1%.

Die beiden entscheidenden Forderungen zum Bau einer intensiven Ionenquelle dieser Art sind also:

1. langer ionisierender Weg  $l$  des Einzelelektrons zur besseren Ausnutzung des *Elektronenstromes* ( $\alpha_E$ );
2. hohe *Elektronenstromdichte* zur besseren Ausnutzung des *Molekularstromes* ( $\alpha_M$ ).

Beide Forderungen können dadurch sehr gut erfüllt werden, daß man die Elektronen durch den Molekularstrahl hin- und herpendeln läßt und sie

durch ein magnetisches Führungsfeld zusammenhält. Auf diese Weise wurden mit der nachfolgend beschriebenen Anordnung mittlere Weglängen  $l$  eines Elektrons bis zu 5 m und Stromdichten bis zu 5 Amp./cm<sup>2</sup> erreicht.

### III. Die magnetische Führung und die Pendelung der Elektronen.

Auf ein Elektron, das entlang einer magnetischen Kraftlinie fliegt, übt das Magnetfeld keine Kraft aus. Hat das Elektron zusätzlich eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld, so führt es im ganzen eine Spiralbewegung aus, die in Richtung des Magnetfeldes fortschreitet. Der Radius der Kreisbewegung senkrecht zur Fortbewegung in Abhängigkeit von der Größe der seitlichen Komponente und der Magnetfeldstärke ist in Tabelle 1 wiedergegeben. Man sieht aus den Radien, die in Millimetern angegeben sind, daß sich Elektronenstrahlen mit Querschnittdimensionen von einigen Millimetern, wie sie für die geplante Anordnung verlangt werden müssen, mit Magnetfeldern  $H$  von 500 bis 2000 Gauß bequem führen lassen.

Tabelle 1. Radien der Kreisbahnen von Elektronen verschiedener Voltgeschwindigkeit im Magnetfeld, in mm angegeben.

$H$ (Gauß)	20	40	60	80	100 Volt
500	0,30	0,43	0,53	0,61	0,68
1000	0,15	0,22	0,26	0,30	0,34
1500	0,10	0,14	0,18	0,20	0,23
2000	0,08	0,11	0,13	0,15	0,17

Das Pendeln der Elektronen wird durch eine Elektronenanordnung erreicht, wie sie in Fig. 5 skizziert ist: Zwei Glühkathoden, je mit einem Kathodenschirm versehen, stehen symmetrisch zu beiden Seiten eines Anodenkästchens, bei welchem die den Kathoden zugekehrten Seiten offen sind. Durch Anlegen einer Beschleunigungsspannung zwischen Kathoden und Anodenkasten entsteht längs des Elektronenstrahles ein Potential, das den in Fig. 5 (ausgezeichnet) angegebenen Verlauf hat.

Das magnetische Führungsfeld  $H$  verläuft so, wie es in Fig. 5 eingezeichnet ist.

Die Elektronen treten von den Kathoden aus in die Potentialmulde, durchlaufen (vom Magnetfeld  $H$  auf Spiralbahnen gezwungen) den — wenn man von der Elektronenraumladung absieht — elektrisch feldfreien Raum im Anodenkasten und kehren bei der gegenüberliegenden Kathode wieder um usw. Diese pendelnden Elektronen werden nun so lange von den beiden



Kathoden nachgeliefert, bis die vor der Kathode umkehrenden Elektronen eine so hohe Raumladung bilden, daß an der Kathodenoberfläche kein elektrisches Feld mehr herrscht (Potentialverlauf in der Fig. 5 gestrichelt eingezeichnet). Die in dem Anodenraum herrschende Elektronenstromdichte

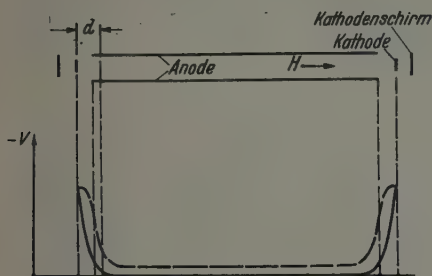


Fig. 5. Anode (Ionisationsraum) und Kathode mit dem zur Pendelung der Elektronen verwendeten Potentialverlauf entlang einer Mittellinie. Der durch die Elektronenraumladung veränderte Potentialverlauf ist gestrichelt eingezeichnet.  $d$  gibt den für die Berechnung der Stromdichte anzunehmenden Anoden-Kathodenabstand an [Gleichung (12)].

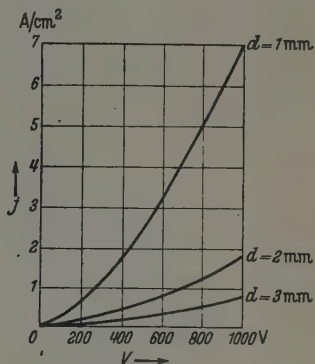


Fig. 6. Raumladebegrenzte Elektronenstromdichte in Abhängigkeit von der Anodenspannung für die Anodenabstände 1, 2 und 3 mm. Gleichung (12).

(dem absoluten Betrage nach, wie sie für die Ionisation maßgebend ist) entspricht also der raumladebegrenzten Stromdichte  $j$  in einer Diode mit ebenen Elektroden:

$$j = 2,8 \cdot 10^{-6} V^{3/2} : d^2 [\text{Amp./cm}^2] \quad (12)$$

( $V$  = Anodenspannung in Volt,  $d$  = Anodenabstand von der Kathode in cm).

In Fig. 5 ist die zur Berechnung von  $j$  einzusetzende Größe  $d$  eingezeichnet. Fig. 6 gibt nach (12) für verschiedene Abstände  $d$  einen Begriff von der Größe der Stromdichten  $j$  als Funktion der Anodenspannung  $V$ .

Die wirkliche Stromdichte ist noch größer, da erstens die Elektronen, welche eine seitliche Komponente besitzen, nicht mehr ganz zur bis Kathode kommen und zur Raumladebegrenzung nicht unmittelbar beitragen, und da zweitens die begrenzende Raumladung durch die gebildeten Ionen teilweise kompensiert wird. Die Elektronen, die nach zahlreichen<sup>1)</sup> Hin- und

<sup>1)</sup> Die mittlere Zahl der Hin- und Hergänge kann aus dem erreichten Ionisationseffekt abgeschätzt werden und ergibt sich unter den üblichen Versuchsbedingungen (200 Volt El.-Spannung, 2000 Gauß) zu 120; die Stromdichte beträgt dann 5,0 Amp./cm<sup>2</sup>. Der einfache Elektronenstrom durch den Querschnitt von  $2 \times 6$  mm<sup>2</sup> müßte, um die gleiche Stromdichte zu haben, 600 mA betragen. Der Weg, den ein Elektron im Mittel zurücklegt, bis es an die Anode gelangt, mißt bei der benutzten Ionenquelle unter diesen Bedingungen etwa 5 m.



Hergängen auf die positive Elektrode gelangen, können von relativ kleinen Kathoden nachgeliefert werden. Dieser so entstehende Strom wird durch Steigerung des Magnetfeldes stark heruntergedrückt (s. Fig. 12, rechte Hälfte).

Einen störenden Einfluß auf die Elektronenführung hat jedoch das zum Herausziehen der Ionen erforderliche Feld, weil dadurch in dem Anodenraum die Elektronen auf Rollkurven seitlich abwandern und so diesen Strom erhöhen.

#### *IV. Das Ziehfeld für die Ionen.*

Die Gasmoleküle bewegen sich mit thermischen Geschwindigkeiten, d. h. bei Zimmertemperatur mit mittleren Energien von  $\sim 0,03$  e-Volt, durch den Elektronenstrom. Die von den ionisierenden Elektronen maximal übertragenen kinetischen Energien sind bei Elektronen mit einigen hundert Volt Geschwindigkeit von derselben Größenordnung. Die so gebildeten, praktisch im ruhenden Zustand erzeugten Ionen<sup>1)</sup> müssen aus dem Ionisationsraum durch ein Feld herausgezogen werden.

Um über die erforderliche Größe dieses Ziehfeldes etwas sagen zu können, ist es nötig, sich zu überlegen, wie weit man mit der Ionenstromdichte gehen kann. Hierzu ist zu berücksichtigen, daß in einem Ionenstrahl bei derselben Voltgeschwindigkeit und Stromdichte wesentlich größere Raumladung herrscht als in dem entsprechenden Elektronenstrahl, da die Ionen infolge ihrer größeren Masse langsamer fliegen. So besteht in einem Protonenstrahl von kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius 1 cm (Fig. 7), einer Stromdichte 1 mA/cm<sup>2</sup> und einer Geschwindigkeit von 1000 e-Volt entsprechend, zwischen Rand und Mitte infolge der Raumladung bereits ein Potentialunterschied von 65 Volt<sup>2)</sup>, der sich mit  $\sqrt{M}$  vergrößert, wenn man zu größeren Atomgewichten übergeht. Bei höheren Stromdichten werden die Schwierigkeiten, den Strahl zu fokussieren bzw. zusammenzuhalten, wohl zu erheblich. — Zweitens muß man sich die Frage stellen, wie weit man im Falle der Verwendung der Ionen in Hochspannungsanlagen die Stromdichte auf das zu bestrahlende Objekt steigern kann, ohne zu hohe Leistungsdichten zu bekommen. Bei einer relativ kleinen Nachbeschleunigung von 100 kV und bei 1 mA/cm<sup>2</sup> gehen bereits 100 Watt/cm<sup>2</sup> auf das Objekt, eine Leistungsdichte, die in der Röhrentechnik als höchstmögliche

<sup>1)</sup> Die abstoßenden Kräfte der Raumladung werden anschließend diskutiert.

— <sup>2)</sup> Die dem Auseinandertreiben durch die Raumladung entgegenwirkende Anziehung paralleler Stromfäden infolge ihrer Magnetfelder ist in diesem Falle ein wesentlich kleinerer Effekt.

gilt<sup>1)</sup>. Aus diesen Gründen wird man Ionendichten von 1 mA/cm<sup>2</sup> nicht wesentlich überschreiten können.

Es sei nun angenommen, das Ziehfeld werde durch ein Gitter im Abstand  $d$  über der Ionenaustrittsöffnung erzeugt, und es sei keine Elektronenraumladung vorhanden. Dann sind die erforderlichen Spannungen durch

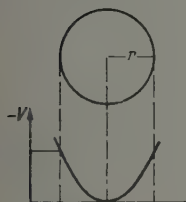


Fig. 7. Potentialverlauf in einer Raumladungsröhre, wie sie ein Protonenstrahl ( $M = 1$ ) der Stromdichte 1 mA/cm<sup>2</sup> ( $j$ ) und der Geschwindigkeit 1000 e-Volt ( $V'$ ) darstellt.

$$V = 2 \cdot 10^4 \cdot r^2 \cdot j. \quad \sqrt{M/V'} [\text{Volt}].$$

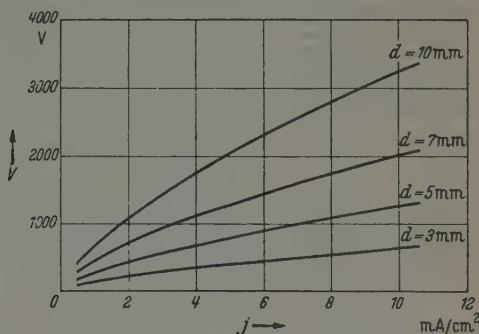


Fig. 8. Ionenziehspannungen für den Fall raumladebegrenzter Protonenströme in Abhängigkeit von der Stromdichte  $j$  und dem Gitterabstand  $d$ . Gleichung (13).

folgende, in Fig. 8 dargestellte Beziehung zwischen der raumladebegrenzten Stromdichte  $j$  in Amp./cm<sup>2</sup>, dem Gitterabstand  $d$  in cm und dem Molekulargewicht  $M$  gegeben:

$$V = 7 \cdot 10^4 j^{2/3} d^{4/3} M^{1/3} [\text{Volt}]. \quad (13)$$

Infolge der Elektronenraumladung sind diese Spannungen niedriger. Wenn man Energiestreuungen der Ionen in der Strahlrichtung vermeiden will, ist es wichtig, daß man diese Spannungen so niedrig macht, daß der Ionenstrom tatsächlich raumladebegrenzt bleibt, was die Gewähr gibt, daß die Feldstärke im Ionisationsraum minimal ist.

Schließlich bleibt der Einfluß des Magnetfeldes auf die Ionenbahnen zu überlegen, der wegen der großen Massen wesentlich kleiner ist als bei Elektronen. Die Ionen durchlaufen einen Raum, in dem elektrisches und magnetisches Feld gekreuzt sind und bekommen dabei eine Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu beiden Feldern. Diese Komponente hängt von

<sup>1)</sup> Die Kühlung geschieht in solchen Fällen durch eine Kupferelektrode, die mit eingedrehten Rillen versehen ist und von Wasser unter hohem Druck durchflossen wird (vgl. W. Espe und M. Knoll, Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik, S. 73). Eine strahlungsgekühlte Wolframelektrode würde bei der angegebenen Leistungsdichte bereits eine Temperatur dicht bei der normalen Emissionstemperatur annehmen, nämlich 2000° C.

dem Verhältnis von  $H/E$  ab und ergibt bei der vorliegenden Dimensionierung der Felder (2 cm Polschuhradius, bis 3000 Volt/cm und 1000 Gauß) eine Ablenkung des besonders leicht ablenkbaren Protonenstrahles von  $30^\circ$ . Sie läßt sich klein halten, indem man die räumliche Ausdehnung des Magnetfeldes auf das Notwendigste beschränkt und indem man die elektrische Feldstärke groß macht. Diese Ablenkung ist nicht für alle Ionen gleich, da ihr Weg durch das Magnetfeld etwas verschieden lang ist; jedoch wird die dadurch verursachte Geschwindigkeitsstreuung innerhalb der Größenordnung der durch die anderen Effekte verursachten bleiben.

### V. Aufbau der Ionenquelle.

Als zweckmäßig und einfach ergab sich nach verschiedenen Versuchen ein Aufbau, der aus Fig. 9 ersichtlich ist. Zur Montage der Elektroden und

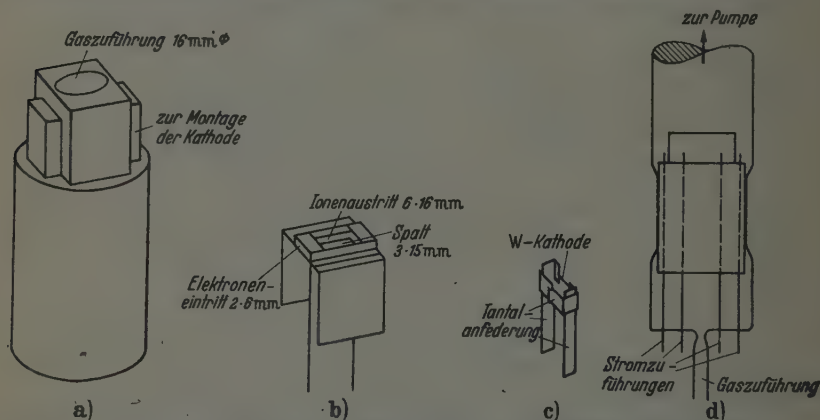


Fig. 9. Konstruktion und Herstellung der Versuchsrohre für Wasserstoff. a) Keramikstück aus Ergon; b) Anodenblech mit Gaszuführungszylinder, Spalt und Ionisationsraum aus Molybdänblech; c) Kathode; d) das in Glas eingeschmolzene System.

zur Zufuhr des Gases wird aus Ergon der Körper a) gedreht und gefräst. Er nimmt die aus Molybdänblech gebogene Elektrode b), die aufgesteckt wird, und über den beiden seitlich stehengebliebenen Klötzen je eine der Kathoden c) auf. Als Material werden pro Kathode je vier Wolframeinkristalldrähte verwendet, die wegen der bei der Heizung im Magnetfeld auftretenden Kräfte kräftig mit Tantalblech angefedert sind. Die Zuführungen zu den Elektroden laufen durch die Keramik nach unten zu einem Glasfuß, der zugleich einen Ansatz für die Gaszuleitung trägt. An diesen Glasfuß wird ein eng über den Erganzylinder passendes Glasrohr angeschmolzen und auf die Keramik eingesaugt (Fig. 9d). Der bei beiden Ver-

suchen verwendete Elektromagnet hatte Polschuhdurchmesser von 40 mm und gab bei 45 mm Polabstand pro 10 Watt Leistung in der Spule etwa 1000 Gauß (Sättigung über 6000 Gauß). Bei Verwendung mit Dauermagnetstählen lassen sich bei denselben Abmessungen des Feldes Stärken von 1200 Gauß ohne Schwierigkeit erreichen.

### VI. Messungen an einem Hg-Atomstrahl.

Die ersten Messungen mit einem solchen Aufbau sind an einem Quecksilberatomstrahl gemacht. Zu diesem Zweck wurde das Rohr oberhalb der Keramik mit einem kleinen Gefäß zur Aufnahme flüssiger Luft versehen, sorgfältig ausgepumpt, ausgeheizt, mit etwas Quecksilber gefüllt und der Pumpstutzen abgezogen. Durch Bäder geeigneter Temperaturen um den unteren Teil der abgeschmolzenen Röhre konnte ein Hg-Atomstrahl der jeweils gewünschten Dichte durch den Spalt erzeugt werden, während die flüssige Luft in dem oberen Teil für gutes Vakuum sorgte. Zum Wegziehen der Ionen befand sich oberhalb der Anode in 5 mm Abstand ein Gitter und darüber in größerem Abstand eine Elektrode zur Neutralisierung der Ionen.

Das Hg-Rohr hatte einen Spalt von  $2 \times 10 \text{ mm}^2$  und Kathoden, die maximal 1,5 mA Strom gaben. Damit wurden Ionenströme bis zu 1 mA gemessen, wobei der höchste Elektronenwirkungsgrad, der gemessen wurde,  $\alpha_E = 80\%$  betrug. Bei 0,2 mA Elektronenstrom und 2000 Gauß Magnetfeldstärke wurde der Ionenstrom in Abhängigkeit von der Badtemperatur aufgenommen (Fig. 10). Der Anstieg des Ionenstromes ist zunächst annähernd linear und wird dann flacher. Der Grund dafür ist wohl der, daß entweder die gebildeten Ionen nicht alle weggezogen werden oder daß bei zu hohen Ziehspannungen die Pendelung der Elektronen zu stark gestört wird. Mit anwachsender Ziehspannung geht der Ionenstrom über ein flaches Maximum, das wieder so zu verstehen ist, daß bei höheren Spannungen das Ziehfeld tiefer in den Ionisationsraum eingreift und die wirksame Elektronenstromdichte erniedrigt. Die in Fig. 10 eingetragenen Meßpunkte beziehen sich jeweils auf dieses Maximum, das zwischen 30 und 400 Volt je nach der Größe des Ionenstromes lag.

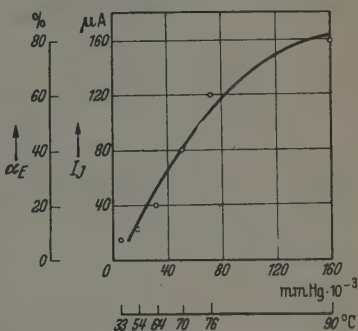


Fig. 10. Hg-Ionenstrom in Abhängigkeit von dem Hg-Dampfdruck bzw. der Badtemperatur gemessen bei 0,2 mA Elektronenstrom und 2000 Gauß Magnetfeldstärke.

### VII. Messungen an einer Protonenquelle.

Bei Verwendungen eines Gases, das unter den gewählten Versuchsbedingungen nicht kondensierbar ist, wie etwa Wasserstoff, läßt sich bei der für die notwendige Strahlintensität erforderlichen Ofenspaltfläche ( $\sim 0,5 \text{ mm}^2$ ) ein Molekularstrahl ohne extreme Pumpbedingungen nicht erzeugen. Die Sauggeschwindigkeit der verwendeten Leybold-Pumpe

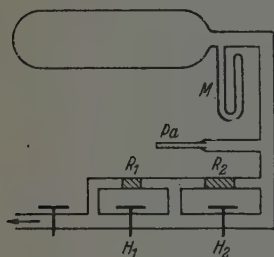


Fig. 11. Vorrichtung zur Versorgung der Röhre mit konstantem meßbarem Wasserstoffstrom. *M* Manometer, *Pa* Palladiumröhrchen, *R*<sub>1</sub> und *R*<sub>2</sub> Strömungswiderstände, *H* Hähne.

Modell E (20 Liter pro sec) reicht nämlich bei der betriebenen Anordnung nicht aus, um auch nur einen Druckunterschied zu beiden Seiten des Spaltes (s. Fig. 2) von einer halben Zehnerpotenz aufrechtzuerhalten<sup>1)</sup>, während man für das Zustandekommen eines Molekularstrahles verlangen muß, daß die Gasdichte außerhalb des Strahles klein gegen die Dichte im Strahl ist. Man kann unter diesen Umständen also nicht mehr von einem Molekularstrahl, sondern nur von einer Gasströmung sprechen. Trotzdem sind, wie die

Versuche gezeigt haben, mit einer solchen Ionenquelle alle Vorteile verbunden, die am Hg-Atomstrahl beschrieben wurden, wenn man nur den Gasdruck niedrig genug hält ( $\sim 10^{-4} \text{ mm Hg}$ ).

Bei den Messungen an *Wasserstoff* wurde am oberen Ende des Rohres mit einer Leybold-Pumpe Modell E gepumpt, während durch den Stutzen am Glasfuß der Wasserstoff einströmte (Fig. 9d). Die Wasserstoffversorgung ist in Fig. 11 dargestellt. Der durch das Palladiumrohr *Pa* eingeführte reine Wasserstoff füllt den darüberliegenden Vorratsbehälter. Aus diesem strömt er über die Strömungswiderstände *R*<sub>1</sub> und *R*<sub>2</sub> zur Apparatur. Die Strömungswiderstände können einzeln oder beide gleichzeitig durch die Hähne *H*<sub>1</sub> und *H*<sub>2</sub> kurzgeschlossen werden. Der Gesamtwasserstoffstrom wurde aus der Abnahme des Druckes im Ballon und aus dessen Volumen gemessen, so daß der Gasstrom durch eine Ablesung am Manometer *M* festgestellt und mit dem Ionenstrom verglichen werden konnte. Der Druck bei *M* nahm sehr langsam ab, so daß man über längere Zeit konstante Strömung erhielt.

Zunächst wurde, um den Einfluß des Magnetfeldes zu studieren, bei konstantem Gasstrom von 100 mA entsprechend einem Wasserstoffdruck an der Spaltöffnung von  $2 \cdot 10^{-4} \text{ mm Hg}$  der Elektronenstrom und der

<sup>1)</sup> Siehe auch W. Walcher, ZS. f. Phys., im Druck.



Ionenstrom bei verschiedenen Spannungen der Kathode gegenüber der Anode aufgenommen (s. Fig. 12). Dies geschah oszillographisch bei einer

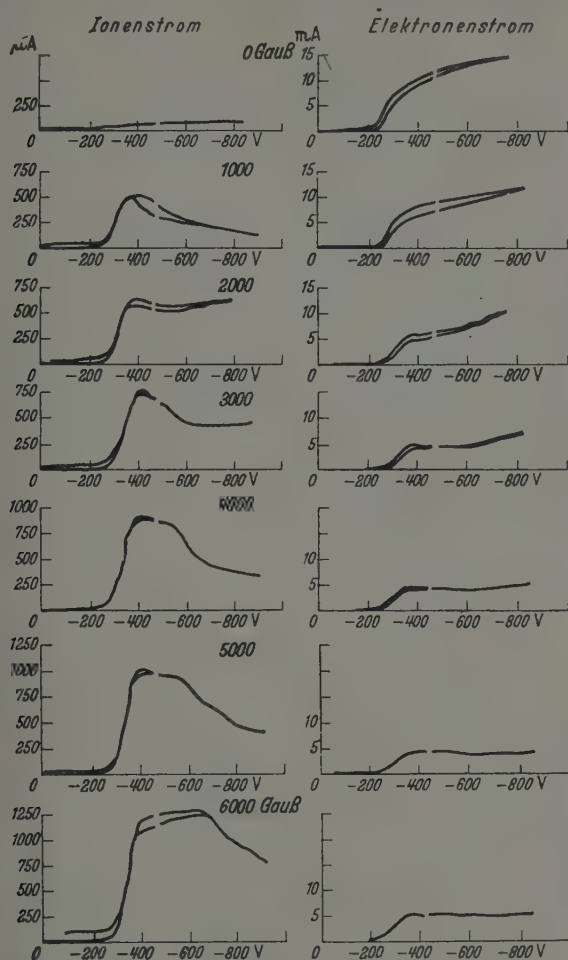


Fig. 12. Oszillogramme: Auf der Abszisse ist bei allen Kurven die Spannung der Anode (Ionisationsraum) gegen die Kathode aufgetragen. Die Ordinate gibt auf der linken Seite den zugehörigen Ionenstrom, auf der rechten Seite den zugehörigen Elektronenstrom. Die Magnetfeldstärke wird von oben nach unten von Kurvenpaar zu Kurvenpaar um 1000 Gauß gesteigert.

Frequenz von etwa 1000 Hertz, wobei sich die Kathodenspannung von + 100 bis - 600 Volt änderte<sup>1)</sup>. Man sieht, wie erst von 1000 Gauß an der Ionenstrom größere Werte annimmt, die sich dann bis 6000 Gauß noch etwa

<sup>1)</sup> Durch kleine Phasenverschiebungen in den Kopplungsgliedern des Wechselstromverstärkers für die Ströme sind die Kurven etwas aufgespalten.



verdoppeln; gleichzeitig geht der Elektronenstrom immer mehr herunter bis auf 4 mA, da das stärker werdende Magnetfeld immer weniger Elektronen zur Anode abfließen läßt. Die Heizung der Kathoden blieb dabei konstant. Unter den besten Bedingungen ergab sich für  $\alpha_E = 30\%$ ,  $\alpha_M$  ist von der Größenordnung 1%. Die Kurven für den Ionenstrom zeigen auch deutlich das Ionisationsmaximum, das durch die gleichzeitig anwachsende Elektronenstromdichte stark zu höheren Spannungen verschoben ist. Die größten gemessenen Ionenströme betrugen 2 mA.

Für den Fall der Verwendung einer solchen Ionenquelle in *Hochspannungsanlagen*, die im allgemeinen mit Protonen bzw. mit Deuteronen zu versorgen sind, ist es von Interesse zu wissen, wie groß die Protonenanteile im Ionenstrom sind. Massenspektroskopische Untersuchungen der Ionen, welche den Prozentsatz der erzeugten Protonen im Vergleich zu den Molekülonen feststellen sollten, konnten aus äußeren Gründen nicht mehr gemacht werden. Man besitzt aber aus Messungen von Scott<sup>1)</sup> einen recht guten Anhalt über diese Anteile. Da bei der hier beschriebenen Anordnung Zusammenstöße von Wasserstoffmolekülen untereinander oder mit Ionen außerhalb des Spaltes infolge der niedrigen Moleküldichten sehr selten sind, entsprechen die Ionisationsbedingungen denen bei Scott für niedrige Drucke weitgehend. Danach ist ein Protonenanteil zu erwarten, der bei 50% liegt und mit der Elektronengeschwindigkeit anwächst.

Nach Abschluß der Untersuchungen wurde ein Bericht<sup>2)</sup> über eine Arbeit von Finkelstein bekannt, die auf ganz ähnlichem Prinzip zu entsprechenden Ergebnissen führt. Es wird jedoch im Gegensatz zur vorliegenden Arbeit mit wesentlich größerem elektrischen Aufwand und dementsprechend geringerem Wirkungsgrad gearbeitet.

Die Untersuchungen wurden im Herbst 1939 begonnen und im Juni 1940 infolge Einberufung des Verfassers vorzeitig abgeschlossen.

Die kürzlich erschienene Arbeit „Über ein Ionenquellensystem mit Massenmonochromator für Neutronengeneratoren“ von M. v. Ardenne<sup>3)</sup> in diesem Zusammenhang zu diskutieren, erübrigt sich, da sie ihrem wesentlichen Inhalt nach eine Beschreibung meiner Anordnung darstellt, nachdem ihrem Verfasser der Inhalt meiner Arbeit im Frühjahr 1941 mitgeteilt und das Manuskript meiner Arbeit Ende 1941 zur Verfügung gestellt wurde.

Für die Anregung zu dieser Arbeit und stetes Interesse bin ich Herrn Prof. Kopfermann und Herrn Dr. Walcher zu Dank verpflichtet.

<sup>1)</sup> G. W. Scott, Phys. Rev. **55**, 958, Tabelle 1, 1939. — <sup>2)</sup> H. Korsching, Phys. ZS. **42**, 78, 1941. — <sup>3)</sup> M. v. Ardenne, ebenda **43**, 91, 1942.

## Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von H. Heil.

Von Manfred von Ardenne.

Mit der publizistischen Technik hinreichend vertraut, habe ich dafür gesorgt, daß meine Veröffentlichung (Phys. ZS. 43, 91, 1942) erst erfolgte, nachdem H. Heil seine Ionenquelle selbst am 22. Februar 1942 bekanntgegeben hatte (vgl. Anmerkung 3 meiner Arbeit). Im übrigen ist der wesentliche Inhalt meiner Arbeit nicht eine Beschreibung der (ausgiebig von mir zitierten) Heilschen Anordnung, sondern die Besprechung der Einzelheiten eines hier in einjähriger Entwicklungsarbeit gebauten Neutronengeneratorkopfes mit *Massenmonochromator*.

Der Austausch der Manuskripte wurde erst vorgenommen, als abweichende Meßergebnisse an von mir gebauten Systemen in Einklang gebracht werden sollten mit früheren mündlichen Angaben von Herrn Heil.

## Die Berechnung der Lichtbogentemperatur und das Stabilitätsproblem der Lichtbogensäule.

Von R. Mannkopff in Göttingen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Oktober 1942.)

Es wird ein Näherungsverfahren angegeben, das es erlaubt, den radialen Temperaturverlauf in der Lichtbogensäule zu berechnen. Die Anwendung des Verfahrens wird an einem Beispiel vorgeführt und die sich für die Rechenarbeit ergebenden Regeln werden besprochen. Der berechnete Temperaturverlauf wird mit dem tatsächlichen verglichen und die Gründe für die bestehenden Abweichungen werden erörtert. Endlich werden einige allgemeine Aussagen über die Lichtbogensäule gewonnen.

### 1. Die Wärmeleitungsgleichung der Lichtbogensäule und ihre Lösung.

Die dem Entladungskanal eines Lichtbogens zugeführte elektrische Leistung wird durch Wärmeleitung, Strahlung und Konvektion nach außen abgegeben. Von diesen drei Anteilen des Energiestromes spielt die Strahlung vielfach keine erhebliche Rolle — für einen Kohlelichtbogen in Luft beträgt nach Ornstein und Brinkman<sup>1)</sup> die Säulenstrahlung bei 5 Amp. nur 0,8%, bei 14 Amp. nur 3% des gesamten Energieflusses —, die Konvektion kann durch Wahl der äußeren Bedingungen weitgehend vermieden werden, nur die Wärmeleitung läßt sich nicht ausschalten. Ein stabil brennender Lichtbogen ist also ohne Strahlung und Konvektion, dagegen nicht ohne Wärmeleitung denkbar; man wird darum vermuten, daß für die Entstehung des Gleichgewichtszustandes die Wärmeleitung wesentlich ist.

Wir lassen daher zunächst den Einfluß der Strahlung und der Konvektion unberücksichtigt und betrachten folgendes Modell: Die Temperatur der Lichtbogensäule falle von der Achse bis zum Abstände  $r = R$  auf die Umgebungstemperatur  $T_R$  ab. Wegen der Zylindersymmetrie der Lichtbogensäule ist die Wärmeströmung  $q$  radial gerichtet, also nur von der einen Koordinate  $r$  abhängig. Für jeden Zylindermantel vom Umfange  $2r\pi$  und der Länge 1 muß dann die gesamte Wärmeströmung  $2r\pi q$  gleich der gesamten in seinem Innern durch den elektrischen Strom erzeugten Wärmemenge  $L_r$  sein. Wenn wir mit  $\mathcal{E}$  die Längsfeldstärke in der Säule, mit  $i(r)$  die Stromdichte bezeichnen, wird  $L_r = \mathcal{E} \cdot \int_0^r 2r\pi i(r) dr$ , worin das Integral die Stärke des innerhalb des Zylindermantels fließenden Stromes angibt.

<sup>1)</sup> L. S. Ornstein u. H. Brinkman, Physica 1, 821, 1934.

Analogist die Gesamtleistung  $L = \mathfrak{E} \cdot i = \mathfrak{E} \cdot \int_0^R 2 r \pi i(r) dr$ . Die Gleichung für die radiale Wärmeleitung in einem zylindrischen Körper

$$q = -\kappa \frac{dT}{dr}, \quad (1)$$

worin  $\kappa$  das Wärmeleitvermögen, nimmt also im vorliegenden Falle die Form an

$$-2 r \pi \kappa \frac{dT}{dr} = \mathfrak{E} \int_0^r 2 r \pi i(r) dr \quad (2)$$

oder, wie Elenbaas<sup>1)</sup> schreibt,

$$-d\left(2 r \pi \kappa \frac{dT}{dr}\right) = 2 r \pi \mathfrak{E} i(r) dr.$$

Da  $i(r)$  und  $\mathfrak{E} = L/i$  durch  $T$  bestimmt sind,  $T$  wiederum von  $r$  abhängt, erhalten wir eine Differentialgleichung für  $T$  als Funktion von  $r$ . Der Temperaturverlauf längs des Radius, damit  $i(r)$  und die Längsfeldstärke  $\mathfrak{E}$ , sind so bei gegebenem  $L$  als Funktionen von  $r$  eindeutig bestimmt. Der Verlauf von  $T$  selbst, die Lösung der Differentialgleichung, kann jedoch wegen der Kompliziertheit der Zusammenhänge in geschlossener Form nicht angegeben werden, wie auch bereits von Elenbaas<sup>1)</sup> u. a.<sup>2)</sup> hervorgehoben wird. Hiervon überzeugt eine nähere Betrachtung der Ausdrücke für  $i(r)$  und  $\kappa$ . Nach der Stromtransportgleichung ist

$$i(r) = \mathfrak{E} \cdot e N x^{-b-}, \quad (3)$$

worin  $N$  die Zahl der Moleküle in  $\text{cm}^3$ ,  $e$  die Elementarladung in Coulomb,  $x^-$  der Ionisationsgrad des Gases.  $N$  ist von  $T$  und damit auch von  $r$  abhängig,  $x^-$  erhält man aus der Sahaschen Gleichung

$$\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{(\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{p h^3} e^{-E_i/kT}, \quad (4)$$

in der  $p$  den Gasdruck,  $h$  die Plancksche,  $k$  die Boltzmannsche Konstante bedeuten.  $E_i$  ist die Ionisierungsarbeit des Gases. Die Elektronenbeweglichkeit wird nach einem der wesentlich gleichwertigen gaskinetischen Ausdrücke<sup>3)</sup> gegeben durch

$$b^- = \alpha \frac{e \lambda_{el}}{\sqrt{3 k m_{el}} \sqrt{T}}, \quad (5)$$

worin  $m_{el}$ ,  $\lambda_{el}$  Masse und freie Weglänge des Elektrons,  $\alpha$  einen „Unsicherheitsfaktor“ von der Größenordnung 1 bedeutet.

<sup>1)</sup> W. Elenbaas, Physica 1, 676, 1934. — <sup>2)</sup> B. Kirschstein u. Fl. Koppelman, Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemenskonzern XVI, S. 56, 1937. — <sup>3)</sup> R. Rompe u. M. Steenbeck, Ergebn. d. exakt. Naturw. 18, 286, 1939.

Das Wärmeleitvermögen  $\kappa$  ist ebenfalls von  $T$  und damit von  $r$  abhängig. Nach der elementaren kinetischen Gastheorie wird

$$\kappa = \frac{k^{3/2} \cdot f \sqrt{T}}{3 \pi^{3/2} \delta^2 \sqrt{m}} = K \frac{f \sqrt{T}}{\delta^2 \sqrt{m}}. \quad (6)$$

Hier bedeutet  $\delta$  den Durchmesser,  $m$  die Masse des Moleküls,  $f$  die Zahl der Freiheitsgrade. Sowohl  $\delta$  wie  $f$  sind wiederum Temperaturfunktionen. Die Temperaturabhängigkeit des Moleküldurchmessers  $\delta$  ist durch die Sutherlandsche Theorie annähernd gegeben. Zur Zahl der Freiheitsgrade tragen nicht nur Translation, Rotation und Schwingung der Moleküle bei, sowie die Anregung von Quantensprüngen der Elektronen, sondern auch die Dissoziations- und Ionisationsvorgänge. Man kann ihren Einfluß berücksichtigen<sup>1)</sup>, indem man die gaskinetischen Freiheitsgrade  $f$  ersetzt durch „Quasifreiheitsgrade“, die bei der Berechnung der spezifischen Wärme  $c$  an Stelle der  $f$  in der klassischen Formel  $c = f \frac{k}{2}$  treten. Der Verlauf von  $f$  ist durch  $p$  und die Dissoziations- und Ionisierungsspannungen des Gases bestimmt, von den Werten 3 bis 6 kann  $f$  mit  $T$  auf einige hundert ansteigen.

Daß wegen des verwickelten Zusammenhanges von  $i(r)$  und  $\kappa$  mit  $T$  ein analytischer Ausdruck für  $T$  als Funktion von  $r$  aus (1) kaum gewonnen werden kann, wird besonders deutlich, wenn wir in (1) beide Seiten durch  $2 r \pi \kappa$  dividieren und durch Integration von  $dT/dr$  auf  $T$  übergehen. Wir erhalten folgende Integralgleichung

$$T_r = \int \frac{1}{2 r \pi \kappa} \int_0^r 2 r \pi \mathfrak{E} \cdot i(r) dr dr + \text{const.}$$

Wird die Integration vom Rande  $R$  bis  $r$  durchgeführt, so nimmt die Konstante den Wert  $T_R$  an. Für  $i(r)$  und  $\kappa$  sind die Ausdrücke (3) und (6) einzusetzen. Da  $i(r) = \mathfrak{E} \cdot \sigma(r)$ , wo  $\sigma(r) = e N x b^-$  die spezifische elektrische Leitfähigkeit des Bogengases bedeutet, tritt in dem Integral der Faktor  $\mathfrak{E}^2$  auf, der, da von  $r$  unabhängig, vor das Integralzeichen gezogen werden kann.  $\mathfrak{E}^2$  ist bei vorgegebener Leistung  $L$  noch vom Temperaturverlauf abhängig und läßt sich, da  $L = \mathfrak{E}^2 \cdot \sigma$ , worin  $\sigma$ , die Gesamtleitfähigkeit des Entladungskanals  $= \int_0^R 2 r \pi \sigma(r) dr$  ist, in die Form

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{L}{2 \pi \int_0^R r \sigma(T) dr} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> F. Möglichen, K. H. Rieße u. R. Rompe, Ann. d. Phys. (5) 35, 735, 1939.

bringen. Für  $T$  ergibt sich daher schließlich die Funktionalgleichung

$$T_r = \frac{L}{2\pi \int_0^R r \sigma(T_r) dr} \int_0^r \frac{1}{r \kappa(T_r)} \int_0^r r \cdot \sigma(T_r) dr dr + T_R. \quad (8)$$

Es ist offenbar ausgeschlossen, diese Gleichung nach  $T$  aufzulösen. Jedoch zeigt sich noch ein anderer Weg. In Gleichung (8) steht links die Temperatur für den Radius  $r$ , die sich als Folge der rechts stehenden Verteilung der Wärmequellen  $\mathcal{E} \cdot i(r)$  und des Wärmeleitvermögens  $\kappa(T)$  ergibt, wobei noch eine Anzahl von Konstanten, z. B.  $L$  und  $E_i$ , als Parameter eingehen. Nur im Gleichgewichtszustande genügt  $T_r$  dieser Gleichung. Gehen wir von einer anderen Temperaturverteilung aus, wie sie etwa bei Zündung eines Lichtbogens durch Funkendurchschlag für eine kurze Zeit auftritt, so liefert uns die rechte Seite auf Grund der Ausgangstemperatur  $T_0$  einen Temperaturverlauf  $T_1$ , der, da nicht mit  $T_0$  identisch, noch keineswegs die Gleichgewichtstemperatur darstellt. Doch sollte der neue Temperaturverlauf dem Gleichgewichtszustand näherliegen als  $T_0$ .

Falls diese Vermutung sich für beliebige Ausgangstemperaturen bestätigt, ergibt sich daraus ein Verfahren zur Berechnung des Temperaturverlaufs. Wir ermitteln die rechte Seite von (7) für eine fingierte Lösung  $T_0$  und erhalten links eine andere Funktion  $T_1$ . Liegt  $T_1$  der wahren Lösung näher und ist dies für jedes  $T_n$  eine Eigenschaft unserer Funktionalgleichung, so läßt sich durch hinreichend häufige Wiederholung des Vorgangs eine beliebige Annäherung an den wahren Temperaturverlauf erreichen. Wir haben damit ein konvergierendes Verfahren erhalten, das uns durch Iteration die Lichtbogentemperatur mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen gestattet.

## 2. Bedingungen für die Konvergenz des Lösungsverfahrens.

Die Durchrechnung eines stark vereinfachten Beispiels, wobei  $\kappa$  als konstant angenommen und für  $T$  bequeme Zahlenwerte eingesetzt wurden, zeigte, daß unter diesen Umständen die Näherungen  $T_1, T_2, T_3, \dots$  sich in der Tat gegen eine Grenze häufen. Später ergab sich auf folgendem Wege ein Kriterium für die Anwendbarkeit des Verfahrens. Unser Ausdruck (8) hat die Form:

$$T(r) = F(r, T(r)).$$

Setzen wir statt der Lösung  $T(r)$  eine Näherung  $T_n$  ein, so wird hieraus, für jede Stelle  $r$  zwischen 0 und  $R$  gültig,

$$T_{n+1} = F(r, T_n).$$



Wir setzen ferner

$$\begin{aligned} T_{n-1} + \Delta_{n-1} &= T_n, & \Delta_{n-1} &= T_n - T_{n-1}, \\ T_n + \Delta_n &= T_{n+1}, & \Delta_n &= T_{n+1} - T_n, \end{aligned}$$

und führen, um die Taylorsche Entwicklung anwenden zu können,  $T_n$  in  $F(r, T_n)$  ein. Die Taylorsche Reihe lassen wir nach dem ersten Gliede mit dem Restglied enden. Es wird

$$T_{n+1} = F(r, T_n) = F(r, T_{n-1} + \Delta_{n-1}) = F(r, T_{n-1}) + F'(r, T_{n-1} + \vartheta \Delta_{n-1}) \Delta_{n-1},$$

worin  $\vartheta$  eine Zahl zwischen 0 und 1. Es ist  $F(r, T_{n-1}) = T_n$ , dies setzen wir in die vorhergegangene Gleichung ein. Da  $T_{n+1} - T_n = \Delta_n$ , wird

$$T_{n+1} - T_n = \Delta_n = F'(r, T_{n-1} + \vartheta \Delta_{n-1}) \Delta_{n-1},$$

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = F'(r, T_{n-1} + \vartheta \Delta_{n-1}).$$

Die hinreichende Bedingung der Konvergenz ist nun, daß die Differenz  $\Delta_n$  aufeinanderfolgender Näherungen immer mehr abnimmt, oder daß  $\Delta_n/\Delta_{n-1} < 1$ . Falls  $F'(r, T)$  im betrachteten Intervall sein Vorzeichen nicht ändert, also  $F(r, T)$  monoton verläuft, wird

$$\begin{aligned} F'(r, T_{n-1} + \vartheta \Delta_{n-1}) &\leq F'(r, T_{n-1} + \Delta_{n-1}) = F'(r, T_n), \\ \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} &\leq F'(r, T_n). \end{aligned}$$

Konvergenz des Verfahrens tritt also stets dann ein, wenn entweder

$$F'(r, T_n) < 1 \quad (9)$$

oder

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} < 1 \quad (10)$$

und zugleich  $F'(r, T)$  eine differenzierbare Funktion von  $T$  ist.

Die erste Bedingung wird man oft nicht nachprüfen können, wie bei unserer Integralgleichung (8), wo  $F(r, T)$  nicht als analytischer Ausdruck bekannt ist. Dagegen wird man in der Regel übersehen, ob  $F(r, T)$  nach  $T$  differenzierbar ist, wenn ja, dann genügt es, wenn zwei aufeinanderfolgende Näherungen die Bedingung  $\Delta_n < \Delta_{n-1}$  erfüllen.

### 3. Durchrechnen eines Beispiels für die Anwendung des Verfahrens.

Um den Gang der Rechnung übersichtlicher zu gestalten, befreien wir den Integrausdruck (8) von allen Konstanten, die sich kürzen oder ausklammern lassen.

Zunächst ist nach (6)  $\kappa = K \frac{f \sqrt{T}}{\delta^2 \sqrt{m}}$ , wo  $K = k^{3/2}/3\pi^{3/2}$  eine Konstante ist, die vor das Integralzeichen tritt. Dagegen sind  $f$ ,  $\delta$  und die mittlere Masse  $m$  eines der Teilchen des Gases, der Atome, Moleküle oder Elektronen Funktionen der Temperatur. Sie müssen für die numerische Berechnung bekannt sein. Sofern ihr Zusammenhang mit  $T$  nicht sehr einfacher Art ist, empfiehlt es sich, sie zu tabellieren und in dieser Form bei der Berechnung des Integralsausdrucks zu verwenden.

Nach der Stromtransportgleichung (3) ist die elektrische Leitfähigkeit  $\sigma(T) = eN x^- b^-$ . Der analoge Ausdruck für die positiven Ladungsträger wird wegen der Kleinheit von  $b^+$  gegen  $b^-$  vernachlässigt. Wir setzen ferner  $x^- = \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{a}{1+a}}$ , wo  $a$  den Ausdruck aus der Saha-Gleichung (4)  $a = x^2/1 - x^2$  bedeutet. Dann ist unter Berücksichtigung der Beweglichkeitsgleichung (5)

$$\sigma(T) = \frac{e^2 x^- N \lambda_{el}}{\sqrt{3 k m_{el}} \sqrt{T}} = \frac{e^2 N \lambda_{el}}{\sqrt{3 k m_{el}}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{T}}.$$

Da für Elektronen  $N \lambda_{el} = N_0 \cdot \lambda_{0el}$ , wobei der Index 0 sich auf ein bestimmtes Wertepaar von Druck  $p$  und Temperatur  $T$  bezieht, z. B. 1 Atm. und 2730 abs., ist der Quotient

$$\frac{e^2 N \lambda_{el}}{\sqrt{3 k m_{el}} \sqrt{p}} = \frac{C}{\sqrt{p}} \quad (11)$$

für jeden durchzurechnenden Fall konstant und

$$\sigma(T) = \frac{C}{\sqrt{p}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{T}}.$$

In (8) hebt sich dann  $C/\sqrt{p}$  im Zähler und Nenner der rechten Seite fort, tritt jedoch bei der Berechnung von  $\mathfrak{E}$  nach (7) auf. Unsere Gleichungen (7) und (8) nehmen also mit den Konstanten  $K$  und  $C$  und den Parametern  $E_i$ ,  $L$ ,  $R$ ,  $p$  und  $T_R$  die Form an

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{L \sqrt{p}}{2\pi C \int_0^R \frac{r \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{T}} dr}, \quad (7a)$$

$$T_r = \frac{L}{2\pi K} \cdot \frac{1}{\int_0^R \frac{r \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{T}} dr} \int_R^r \left( \frac{\delta^2 \sqrt{m}}{r \cdot f \cdot \sqrt{T}} \int_0^r \frac{r \sqrt{\frac{a}{1+a}}}{\sqrt{T}} dr \right) dr + T_R. \quad (8a)$$

Um das Ergebnis unserer Rechnung mit bekannten Temperaturwerten vergleichen zu können, wählen wir als Beispiel die in Luft freibrennende senkrechte Bogensäule. Für diese ist bereits von Hörmann<sup>1)</sup> der Temperaturverlauf aus der von ihm gemessenen spezifischen Strahlungsintensität der Borlinien 2497/2498 Å bestimmt worden. Wir behandeln dieses Beispiel, da infolge der Hörmannschen Untersuchung ein Vergleich mit den Tatsachen hier am besten möglich ist. Bei der so viel untersuchten Hg-Bogensäule stört der hohe Anteil der Strahlung an der Energiebilanz, der nur schwer zu berücksichtigen ist. Auch eignen sich gerade die verwickelten Dissoziations- und Reaktionsvorgänge, die das Wärmeleitvermögen eines  $N_2$ - $O_2$ -Gemisches bestimmen, besonders gut dazu, dessen Einfluß auf den Temperaturverlauf zu zeigen.

Wir legen zunächst die Parameterwerte  $L$ ,  $E_i$ ,  $p$ ,  $T_R$  und  $R$  fest.  $L$  war bei Hörmann = 150 Watt auf den cm Säulenlänge, entsprechend der von ihm gemessenen Längsfeldstärke von 15,0 Volt/cm bei einer Stromstärke von 10 Amp. Der Druck  $p$  ist = 1 Atm. Für die Ionisierungsspannung  $E_i$  setzen wir zunächst 9 e-Volt im Anschluß an Hörmann, der mit diesem Wert bei einer Achsentemperatur von 6500° K die von ihm gemessene elektrische Leitfähigkeit erhielt. Die Randtemperatur  $T_R$  sei = 300° K.

Der Wert  $R$  des Radius  $r$ , bei dem die Umgebungstemperatur erreicht wird, muß für unsere Rechnung durch Extrapolation des von Hörmann gemessenen Temperaturverlaufs gewonnen werden, da die Hörmannschen Bestimmungen nur bis etwa 4000° K hinabreichen. Außerhalb der Zylinderfläche mit dieser Temperatur liegen keinerlei Wärmequellen mehr, da hier wegen der verschwindenden Leitfähigkeit die Stromdichte gegen die im inneren Teil der Säule zu vernachlässigen ist. Der radiale Gesamtwärme-  
strom ist also außerhalb dieser Fläche =  $L$ , die Wärmeströmung  $q = \frac{L}{2r\pi}$ .  
Durch  $q$  ist nach der Wärmeleitungsgleichung (1), da

$$- \kappa \frac{dT}{dr} = \frac{L}{2r\pi},$$

der Verlauf der Temperatur in den Außenzonen der Bogensäule bestimmt. Mit Hilfe des für 273° K bekannten Wertes  $\kappa = 5,77 \cdot 10^{-5}$  cal/g cm sec können wir  $dT/dr$  bei dieser Temperatur berechnen. Mit  $L = 150$  Watt wird

$$\frac{dT}{dr} = \frac{1}{R} \frac{5,60}{5,77 \cdot 10^{-5}} = 9,72 \cdot 10^4 \frac{1}{R}.$$

<sup>1)</sup> H. Hörmann, ZS. f. Phys. 97, 539, 1935.

Wir berechnen und konstruieren mit Hilfe dieser Gleichung die Tangente für  $R = 0,20$  cm,  $0,21$  cm und  $0,22$  cm. Es wird für  $dr = 0,01$  cm und

$$\begin{aligned} R^* &= 0,20 & dT &= 4,86 \cdot 10^3 \\ &= 0,21 & &= 4,62 \cdot 10^3 \\ &= 0,22 & &= 4,31 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Setzen wir den Hörmannschen Temperaturverlauf stetig gekrümmt bis  $T = 3000$  weiter fort, so erreichen wir diese Temperatur mit dem richtigen Gefälle etwa bei dem Wert  $r = 0,20$  cm. Wir rechnen also so, als ob der Bogen in einem Rohr mit dem Radius  $R = 0,20$  brenne. Die Kühlung durch die von außen zuströmende Luft lassen wir zunächst außer acht.

Zur Berechnung von  $T$  bedürfen wir weiterhin noch der Zahlenwerte für  $K$ ,  $\delta$ ,  $f$ ,  $m$  und  $a$ , ferner zur Bestimmung von  $\mathfrak{C}$  aus (7) des Wertes von  $C$ . Mit  $k = 1,371$  erg/grad wird  $K = 9,62 \cdot 10^{-26}$  erg<sup>3/2</sup>/grad<sup>3/2</sup>.

Aus (6) bestimmen wir  $\delta$  für  $2730$  mit Hilfe des bekannten Wertes von  $\kappa$  für Luft, der  $5,8 \cdot 10^{-5}$  cal/cm grad sec beträgt. Die Zahl der Freiheitsgrade  $f$  ist  $= 5$ , das mittlere Gewicht eines Moleküls der Luft bei  $2730$  K ist  $47,1 \cdot 10^{-24}$  g. Damit erhalten wir

$$\delta_{273}^2 = \frac{9,62 \cdot 10^{-26} \cdot 5 \cdot \sqrt{273}}{5,8 \cdot 10^{-5} \cdot 2,17 \cdot 10^{-12}} = 4,77 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2.$$

Nun ist der in (6) eingehende Wert von  $\delta$  selbst eine Funktion der Temperatur. Seine Abhängigkeit von  $T$  wird durch die Sutherlandsche Gleichung (1) gegeben. Ihre Genauigkeit dürfte hier ausreichen, weil auch  $f$  nicht mit größerer Zuverlässigkeit als auf  $\pm 5\%$  angegeben werden kann. Zudem tritt bei höherem  $T$  neben der starken Änderung von  $f$  die Änderung von  $\delta$  und auch von  $m$  zurück. Wir setzen daher

$$\delta^2 = \delta_{273}^2 \frac{1 + \frac{1}{C_s} \cdot T}{1 + \frac{1}{C_s} \cdot 273}$$

Die Sutherlandsche Konstante nimmt darin für Luft den Wert  $8,85 \cdot 10^{-3}$  an<sup>1)</sup>. Für die Rechnung wird  $\delta$  in Tabellenform gebracht. Tabelle 1 gibt einen Auszug.

Die Zahl der Freiheitsgrade eines Moleküls bestimmen wir aus der für ideale Gase geltenden Beziehung  $\kappa = A \eta c_v = A \eta c_p \frac{f}{f+2}$ , worin  $\eta$  der Koeffizient der inneren Reibung.  $A$  ist ein Zahlenfaktor, der nach Eucken<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> J. H. Jeans, Dynamische Theorie der Gase, S. 421. Braunschweig 1926.

— <sup>2)</sup> A. Eucken, Phys. ZS. 14, 324, 1913.

für einatomige Gase den Wert 2,50, für zweiatomige etwa den Wert 1,90 annimmt. Es ist also  $\kappa$  proportional zu  $c_p$ , und es gilt für  $\kappa$  die gleiche Zahl der Freiheitsgrade, die auch in die spezifische Wärme eingeht. Der Verlauf der spezifischen Wärme  $c_p$  ist, wie schon oben erwähnt, von Möglich, Rieve und Rompe (l. c.) unter Berücksichtigung der Ionisations- und Dissoziationsvorgänge untersucht und für verschiedene Elemente genauer berechnet worden. In diesen Untersuchungen wird gezeigt, daß die spezifische Wärme außerordentlich hohe Werte annehmen kann.  $c_p$  erreicht seinen Maximalwert jeweils für den Dissoziations- oder Ionisierungsgrad 0,577. Entsprechend der für ideale Gase gültigen Darstellung  $c_p = (f + 2)k/2$  läßt sich stets schreiben  $c_p = a k/2$ , wo  $a$  nun nicht mehr die Zahl der Freiheitsgrade im einfachen gaskinetischen Sinne bedeutet, sondern die Vergrößerung der spezifischen Wärme durch den zur Dissoziation oder

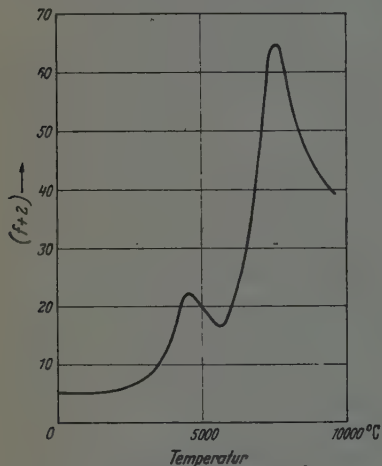


Fig. 1. Quasifreiheitsgrade  $(f + 2)$  für atm. Luft.

Ionisation erforderlichen Energieaufwand einschließt. In der erwähnten Arbeit wird  $a$  als Zahl der „Quasifreiheitsgrade“ bezeichnet und ihr Wert für die Dissoziation und Ionisation von  $H_2$  und  $Hg$  berechnet. Für  $H_2$  steigt  $a$  bei einem Druck von 1 Atm. auf etwa 90 an. Im übrigen ist der Verlauf von  $a$  bzw.  $(f + 2)$  für die verschiedenen Elemente und auch für Dissoziation und Ionisation sehr ähnlich. Für die Dissoziation von  $O_2$  sowohl wie  $N_2$  berechnen wir aus den Formeln (17) und (28) der erwähnten Arbeit das Maximum von  $(f + 2)$  zu  $65 \pm 5\%$ , ein Wert, der bei einer Temperatur von 4600° in  $O_2$  und

von 7500° in  $N_2$  angenommen wird. Für atmosphärische Luft folgt daraus unter Berücksichtigung der Partialdrucke durch Addition der in Fig. 1 dargestellte Verlauf, der für die numerische Rechnung wiederum in Form einer Tabelle verwendet wird.

Infolge der mit  $T$  zunehmenden Dissoziation und Ionisation ist auch  $m$ , die durchschnittliche Masse eines Moleküls, nicht konstant. An Stelle des Wertes  $m_0$  bei 273° tritt der Mittelwert  $m_T$  der Masse der vorhandenen Moleküle, Atome und Elektronen. Da Luft sich aus 4 Teilen  $N_2$  und 1 Teil  $O_2$  zusammensetzt, wird, wenn wir zunächst nur die Dissoziation

des  $O_2$  betrachten, also für  $T$  5000°, wenn  $d_1$  den Dissoziationsgrad des  $O_2$  bezeichnet,

$$\bar{m}_1 = \frac{4 m_{N_2} + (1 - d_1) m_{O_2} + 2 d_1 m_{O_1}}{5 + d_1}.$$

Analog gilt infolge der Dissoziation von  $N_2$  für  $T$  6000°, bei welcher Temperatur  $O_2$  bereits bis auf wenige Prozent dissoziiert ist, der Ausdruck

$$\bar{m}_2 = \frac{(4 - 4 d_2) m_{N_2} + 2 m_{O_1} + 8 d_2 m_N}{5 + d_1 + 4 d_2},$$

in dem  $d_2$  den Dissoziationsgrad des Stickstoffs bezeichnet.  $d_1$  kann oberhalb 7000° mit hinreichender Genauigkeit = 1 gesetzt werden. Für eine Anzahl von Werten im Temperaturbereich von 273 bis 10 500° ist in Tabelle 2 das Verhältnis  $m_T/m_0$  wiedergegeben.

Tabelle 1. Verhältnis  $s$  des Wirkungsquerschnitts  $\delta_T^2$  zu  $\delta_{273}^2$  für Luft, berechnet nach der Sutherland'schen Gleichung.

$T$	$s$	$T$	$s$
300	0,970	2000	0,747
500	0,868	3000	0,733
750	0,816	4000	0,727
1000	0,787	6000	0,720
1500	0,760	8000	0,717

Tabelle 2. Verhältnis  $m_T/m_0$  der mittleren Masse eines Moleküls der Luft bei den Temperaturen  $T$  und 273° K.

$T$	$m_T/m_0$	$T$	$m_T/m_0$
3300	0,987	6000	0,775
3500	0,976	7000	0,667
4000	0,945	8000	0,552
4500	0,897	10000	0,500
5000	0,865		

Der nach der Sahaschen Formel (4) zu berechnende Ionisationsgrad  $x^-$  wird entweder aus einer Kurve in halblogarithmischer Darstellung entnommen, zu der  $x^-$  logarithmisch gegen  $T$  als Abszisse aufzutragen ist, oder als Tabelle verwendet, wobei  $T$  von 100 zu 100° fort schreitet und Zwischenwerte linear interpoliert werden. Die Ionisierungsarbeit  $E_i$  ist für das die atmosphärische Luft bildende Gasgemisch unbekannt, es scheint, daß sie in Lichtbogensäulen erheblich unter den für das Sauerstoffatom und das Stickstoffatom gültigen Werten von 13,55 und 14,48 e-Volt, wie unterhalb der Werte 12,2 und 15,6 e-Volt für die Moleküle der beiden Gase liegt. Dies ist zum Teil wohl eine Folge des Vorhandenseins erheblicher Mengen von NO mit einer Ionisierungsspannung von 9,4 e-Volt<sup>1)</sup>, vielleicht ist es auch bedingt durch die hohen Mikrofeldstärken der Ionenfelder und die dadurch herbeigeführte Verwaschenheit der Seriengrenzen<sup>2)</sup>. Beide Ursachen, sowohl die Konzentration des NO, wie die Ionendichte

<sup>1)</sup> Ionisierungsspannungen nach Landolt-Börnstein. Phys.-chem. Tabellen, II. und III. Erg.-Bd. — <sup>2)</sup> Siehe z. B. R. Rompe u. M. Steenbeck. Ergebn. d. exakt. Naturw. 18, 257, 1939.



hängen wiederum von  $T$  ab, so daß auch die effektive Ionisierungsspannung  $E_i$  von der Temperatur abhängig wird. Da diese Zusammenhänge noch ganz ungeklärt sind, wird für die Rechnung eine mittlere Ionisierungsarbeit von 9 e-Volt eingesetzt. Wir geben in Tabelle 3 einige für die Rechnung benutzte Werte von  $\pi$  für verschiedene  $E_i$ .

Tabelle 3. Ionisierungsgrad  $\pi$  für 1 Atm. und verschiedene Ionisierungsspannungen.

$T$	$E_i$			
	8 e-Volt	9 e-Volt	10 e-Volt	11 e-Volt
3500	$2,70 \cdot 10^{-5}$	$7,2 \cdot 10^{-6}$	$1,04 \cdot 10^{-6}$	$< 10^{-6}$
4000	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$4,35 \cdot 10^{-5}$	$9,63 \cdot 10^{-6}$	$2,073 \cdot 10^{-6}$
4500	$6,87 \cdot 10^{-4}$	$2,03 \cdot 10^{-4}$	$5,56 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-5}$
5000	$2,25 \cdot 10^{-3}$	$7,20 \cdot 10^{-4}$	$2,32 \cdot 10^{-4}$	$6,89 \cdot 10^{-5}$
5500	$5,79 \cdot 10^{-3}$	$2,06 \cdot 10^{-3}$	$7,56 \cdot 10^{-4}$	$2,43 \cdot 10^{-4}$
6000	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$5,20 \cdot 10^{-3}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$7,12 \cdot 10^{-4}$
6500	$2,62 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-2}$	$4,55 \cdot 10^{-3}$	$1,78 \cdot 10^{-3}$
7000	$4,79 \cdot 10^{-2}$	$2,23 \cdot 10^{-2}$	$9,46 \cdot 10^{-3}$	$4,00 \cdot 10^{-3}$
7500	$8,11 \cdot 10^{-2}$	$2,82 \cdot 10^{-2}$	$1,78 \cdot 10^{-2}$	$7,90 \cdot 10^{-3}$
8000	$1,282 \cdot 10^{-1}$	$6,21 \cdot 10^{-2}$	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$
8500	$1,93 \cdot 10^{-1}$	$1,00 \cdot 10^{-1}$	$5,18 \cdot 10^{-2}$	$2,52 \cdot 10^{-2}$
9000	$2,74 \cdot 10^{-1}$	$1,55 \cdot 10^{-1}$	$8,09 \cdot 10^{-2}$	$4,11 \cdot 10^{-2}$
9500	$3,73 \cdot 10^{-1}$	$2,22 \cdot 10^{-1}$	$1,22 \cdot 10^{-1}$	$6,54 \cdot 10^{-2}$
10000	$5,8 \cdot 10^{-1}$	$2,96 \cdot 10^{-1}$	$1,70 \cdot 10^{-1}$	$9,5 \cdot 10^{-2}$

In die Berechnung von  $\mathfrak{E}$  geht noch die Konstante  $C$  ein. Sie wird nach (11)

$$C = \frac{e^2 N_0 \lambda_{0el}}{\sqrt{3} k m_{el}} = 3,79 \cdot 10^{-2} \frac{\text{g grad}^{1/2}}{\text{cm sec}}$$

Hierin ist  $e$  in Coulomb gerechnet, die freie Elektronenweglänge aus  $\lambda_{0\text{Gas}}$  durch Multiplikation mit  $4\sqrt{2}$  gewonnen. Wegen der Temperaturabhängigkeit von  $\lambda_{0el}$  ist dieser Wert nur als Annäherung zu betrachten. Die Temperaturbestimmung wird hiervon jedoch nicht berührt, da, wie aus (8) hervorgeht,  $C$  aus dem Ausdruck für  $T$  herausfällt. Damit sind alle in die Rechnung eingehenden Parameter, Konstanten und von  $T$  abhängigen Funktionen bereit.

Um nun die Lösung der Gleichung (8), nämlich  $T$  als Funktion von  $r$  zu finden, haben wir zuerst für einen von  $r = 0$  bis  $R$  beliebig angenommenen Temperaturverlauf  $T_0$  den Wert der rechten Seite zu berechnen. Das Ergebnis ist die erste Näherung  $T_1$  (Fig. 2).  $T_1$  wird wiederum rechts eingesetzt und ergibt  $T_2$  und so fort. Die Rechnung ist beendet, wenn zwei aufeinanderfolgende Näherungen innerhalb der Rechengenauigkeit zusammenfallen. Das tritt in Fig. 2 für  $T_6$  und  $T_7$  ein.

In Tabelle 4 ist als Schema für den Arbeitsgang die Berechnung von  $T_7$  aus  $T_6$  wiedergegeben. Zuerst ist aus Spalte 2, 3 und 4 in 5 der Integrand des Leitfähigkeitsausdrucks zusammenzusetzen (Kurve I in Fig. 3). In Spalte 6 folgt dann das Integral selbst, das zusammen mit den folgenden Spalten 7 und 8 in 9 den Integranden zu dem zweiten Integral ergibt (Kurve II in Fig. 3). Spalte 10 enthält dieses Integral. Damit sind die

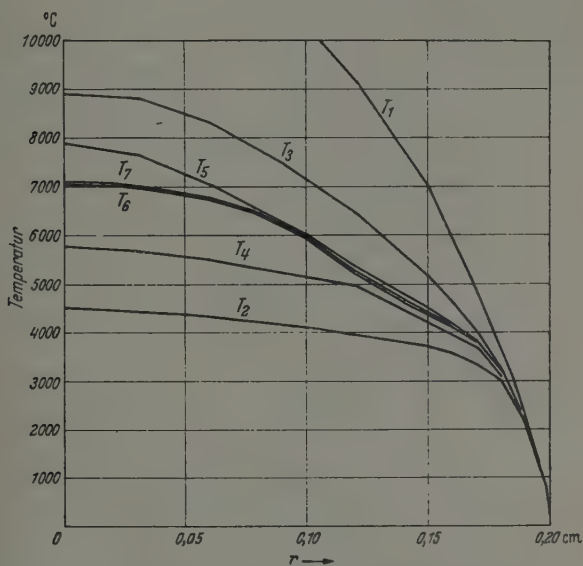


Fig. 2. Näherungen  $T_1$  bis  $T_7$  zum Temperaturverlauf  $T_7$  der Bogensäule in Luft. Leistung 150 Watt/cm.

wesentlichen Schritte durchgeführt, denn Spalte 10 liefert durch Multiplikation mit  $L/2\pi K \int_0^R \frac{r x}{\sqrt{T}} dr$  und Addition von  $T_R = 2200^\circ \text{K}$  bereits die neue Näherung  $T_7$ . Wie man sieht, ist  $T_7$  mit  $T_6$  identisch, also die gesuchte Lösung. Die Ausführung der beiden Integrationen erfolgt schnell und bequem durch Aufteilung in Streifen und Multiplikation mit dem Mittelwert der Ordinaten.

Wir berechnen nun die Längsfeldstärke  $\mathcal{E}$ . Es ist

$$\mathcal{E}^2 = \frac{L}{2\pi C} \frac{1}{R} = \frac{150}{6,283 \cdot 3,79 \cdot 10^5 \cdot 0,913 \cdot 10^{-6}} = 69,2,$$

$$\int_0^R r \frac{x}{\sqrt{T}} dr$$

$$\mathcal{E} = 8,31 \text{ Volt/cm.}$$

Tabelle 4.  
Schema für die Berechnung einer Näherung  $T_7$  aus dem Temperaturverlauf  $T_6$ .

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
$r$	$T_6$	$\sqrt{T}$	$x = \sqrt{\frac{a}{1+a}}$	$\frac{r \cdot x}{\sqrt{T}}$	$\int_0^r \frac{r \cdot x}{\sqrt{T}} dr$	$\frac{f}{s}$	$\frac{f}{s} \cdot r \cdot \sqrt{T}$	$\frac{s}{r \cdot f \cdot \sqrt{T}} \int_0^r \frac{r \cdot x}{\sqrt{T}} dr$	$\int_R^r \frac{s}{r \cdot f \sqrt{T}} \int_0^r \frac{r \cdot x}{\sqrt{T}} dr dr$	$\frac{(10) \cdot L}{\frac{1}{4} \pi K \int_0^R \frac{r \cdot x}{\sqrt{T}} dr}$ $= T_7 - 22000$	$T_7$
0	7050	—	—	—	—	—	—	—	$55,0 \cdot 10^{-11}$	4900	7100
0,02	7000	83,7	$2,23 \cdot 10^{-2}$	$5,34 \cdot 10^{-6}$	$5,4 \cdot 10^{-8}$	82	137	$0,394 \cdot 10^{-9}$	54,6	4860	7060
0,04	6910	83,1	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$9,63 \cdot 10^{-6}$	20,1	76	252	0,798	53,4	4760	6960
0,06	6740	82,1	$1,62 \cdot 10^{-2}$	11,84	42,0	64,9	319	1,31	51,4	4580	6780
0,08	6440	80,3	$1,06 \cdot 10^{-2}$	10,58	64,7	46,7	299	2,15	47,9	4260	6460
0,10	5910	76,9	$4,4 \cdot 10^{-3}$	5,73	81,0	28,3	218	3,74	42,0	3740	5940
0,12	5220	72,3	$1,17 \cdot 10^{-3}$	1,94	88,5	27,1	235	3,76	34,4	3060	5260
0,14	4620	68,0	$2,82 \cdot 10^{-4}$	0,581	90,8	35,2	335	2,71	27,9	2480	4680
0,15	4380	66,2	$1,44 \cdot 10^{-4}$	0,327	91,2	31,8	315	2,89	25,1	2310	4410
0,16	4130	64,3	$6,7 \cdot 10^{-5}$	0,167	91,3	25,7	264	3,46	21,9	1950	4150
0,17	3800	61,7	$2,2 \cdot 10^{-5}$	0,061	91,3	18,7	196	4,66	17,9	1595	3795
0,18	3214	56,7	$2,05 \cdot 10^{-6}$	—	91,3	10,4	105	8,69	$11,2 \cdot 10^{-11}$	996	3196
0,185	2760	52,5	—	—	91,3	8,2	79,5	11,42	$6,2 \cdot 10^{-11}$	562	2772
0,190	2200	51,9	—	—	91,3	7,0	69,0	13,20	—	0	2200

Die Rechenarbeit kann durch verschiedene Maßnahmen verringert werden. Zunächst ist die Wahl der Ausgangsnäherung  $T_0$  von Bedeutung. In unserem Beispiel sind wir, um die Konvergenz deutlich werden zu lassen, von einem weitab von der Endlösung liegenden Temperaturverlauf ausgegangen. In der Regel wird man jedoch schon Anhaltspunkte für die ungefähre Höhe der Maximaltemperatur haben. Man kann dann als Ausgangsnäherung eine stetig gekrümmte Kurve wählen, die für  $r = 0$  bei  $T_{max}$  mit horizontaler Tangente beginnt und, allmählich steiler werdend, bei  $R$  die Umgebungstemperatur erreicht. Hätten wir etwa einen Verlauf

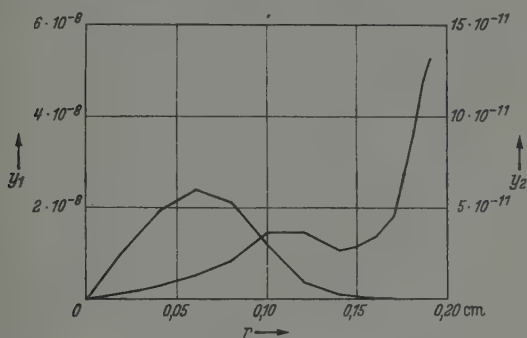


Fig. 3. Die Integranden  $y_1 = \frac{r x'}{\sqrt{T}}$  (Kurve I, deren Maximum bei 0,06 cm liegt,

entspricht dem Zuwachs an Leistung mit  $r$ ) und  $y_2 = \frac{s}{r \cdot f \cdot \sqrt{T}} \int_0^r \frac{r x'}{\sqrt{T}} dr$

(Kurve II, entspricht dem Zuwachs der Temperatur mit  $-r$ ).

ähnlich  $T_4$  als Ausgangsnäherung gewählt, so wäre die Rechnung schon nach 3 bis 4 Schritten beendet worden. Die Annäherung an die Endlösung tritt ferner, wie Fig. 2 zeigt, für die niedrigen Temperaturen und größeren  $r$  zuerst ein. Die Näherungen schmiegen sich, bei  $R$  anfangend, der Endlösung immer mehr an. Man hat daher, sobald die Konvergenz bis zu einem Werte  $r'$  fortgeschritten ist, nicht nötig, die Rechnung noch bis  $R$  durchzuführen, sondern kann  $r'$  als neue Grenze  $R$  mit der zugehörigen Temperatur  $T_R$  betrachten. In Tabelle 4 ist davon Gebrauch gemacht. Die Rechnung ist nur bis  $r = 0,19$  cm statt bis 0,20 cm durchgeführt. An Stelle des bei Beginn der Rechnung für  $r = 0,20$  cm benutzten Wertes  $T_R = 3000$  ist der durch die Konvergenz der vorhergehenden Näherungen bereits gesicherte Wert  $T_R = 22000$  K eingesetzt.

Schließlich kann zur Verringerung der Rechenarbeit die Wahl der Intervalle des Radius  $r$  beitragen. Dort, wo  $T$  steil verläuft, also für größere  $r$ ,

sind die Schritte klein zu nehmen, dagegen können in der Nähe der Kanalachse, wo  $T$  flach verläuft, namentlich bei den ersten Näherungen die Schritte zwischen den einzelnen Abszissenwerten unbedenklich groß gewählt werden. In Tabelle 4 ist dies zu erkennen. Die kleinen  $r$ -Werte folgen sich mit 0,02 cm Abstand, in der Nähe der Grenze nimmt dieser auf 0,005 ab.

Mit 7100° K in der Säulenachse ergibt unsere Rechnung trotz der Vernachlässigung der Konvektion in der Tat die von verschiedenen Seiten gemessenen hohen Temperaturen. Die Bestimmungen von Ornstein<sup>1)</sup> ergaben aus der Intensitätsverteilung auf die Rotationslinien der CN-Banden für die Bogensäule in Luft zwischen Kohleelektroden Werte zwischen 6000 und 7000° K. Wiederholung der Messungen durch Lochte-Holtgreven und Maecker<sup>2)</sup> unter sorgfältiger Berücksichtigung der Selbstabsorption

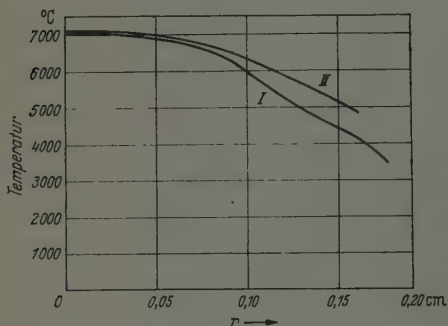


Fig. 4. Vergleich des berechneten Temperaturverlaufs (Kurve I) mit dem gemessenen (Kurve II).

und Temperaturinhomogenität lieferte Werte von 6900 bis 7800° K für verschiedene Stromstärken und verschiedene Stellen des Bogens. Die Übereinstimmung ist gut, zumal die gemessene Temperatur nach Lochte-Holtgreven und Maecker offenbar mit dem Abstand von den Elektroden variiert, was für einen Bogen zwischen Kupferelektroden auch aus einer Beobachtung von Schnautz folgt<sup>3)</sup>. Bei der von Ort zu Ort wechselnden Zusammensetzung des Gases und der Einschnürung der Entladung in Elektrodennähe, die eine Abweichung von der Zylindersymmetrie herbeiführt, kann dies nicht überraschen.

Mit zunehmender Annäherung an die Achse wird der berechnete Temperaturverlauf allmählich flacher. Bedingt ist dies vorwiegend durch das Verhalten von  $\alpha$ , das mit  $T$  vom Rande zur Mitte des Bogens auf etwa den 100fachen Wert ansteigt. Der Verlauf von  $T$  wird um so flacher, je größer  $\alpha$  ist, das durch die Dissoziation des  $O_2$ -Moleküls bedingte Maximum bei 4700° prägt sich im Temperaturanstieg durch eine Abflachung, das Absinken

<sup>1)</sup> L. S. Ornstein u. W. R. van Wijk, Proc. Amsterdam **33**, 44, 1930.

— <sup>2)</sup> W. Lochte-Holtgreven u. H. Maecker, ZS. f. Phys. **105**, 1, 1937.

— <sup>3)</sup> H. Schnautz, Spektrochimica acta **1**, 173, 1939.

zwischen den beiden Maxima durch ein Steilerwerden des Temperaturverlaufs deutlich aus. Hörmann hat  $T$  in Bruchteilen der Achsentemperatur  $T_{max}$  als Funktion des Radius für  $r = 0$  bis  $r = 0,17$  cm bestimmt, in Fig. 4 sind für eine Maximaltemperatur von  $7100^\circ$  die Hörmannschen Werte dem Ergebnis der Rechnung gegenübergestellt. Die Übereinstimmung ist bis  $0,05$  cm gut, dann tritt eine Abweichung auf, die gemessene liegt um bis zu  $10\%$  über der berechneten Temperatur. Ergänzt man die Hörmannschen Aufnahmen durch eine angenäherte Bestimmung des weiteren Temperaturabfalls unterhalb  $4000^\circ$  K, so kommt man mit Sicherheit zu einem wesentlich flacheren Verlauf, als unsere Extrapolation von S. 235 ergab, und erhält für den Säulenradius  $R$  anstatt  $0,20$  cm einen Betrag von mehr als  $0,50$  cm. Die Extrapolation hat also ein zweifellos zu kleines  $r$  ergeben. Der tatsächliche Säulendurchmesser übertrifft den extrapolierten um wenigstens das Doppelte. Dies ist nur zu verstehen, wenn vor allem zwischen  $1500$  und  $5000^\circ$  K das Wärmeleitvermögen noch größer ist als die von uns angesetzten Werte. Auf eine Fehlerquelle sei hier schon hingewiesen. Wir haben bei unserer Ermittlung der Zahl der Freiheitsgrade die Reaktion zwischen  $N_2$  und  $O_2$  außer acht gelassen, die zur Bildung gewisser Mengen von NO führt. Es ist also im Verlauf der  $f$  statt des Maximums, das der Dissoziation des  $O_2$  entspricht, ein wesentlich größeres zu erwarten, entsprechend sollte die Abflachung im Temperaturverlauf, die in Fig. 2 sich andeutet, sich soweit ausdehnen daß  $T$  erst für etwa  $r = 0,50$  cm auf  $300^\circ$  abgenommen hat. Ein genauerer Vergleich ist erst möglich, wenn weitere Messungen über den Temperaturverlauf in den äußeren Bogenzonen vorliegen und die Rechnung unter Berücksichtigung des Reaktionsgleichgewichts  $N_2-O_2$  durchgeführt ist<sup>1)</sup>.

Die Längsfeldstärke bei  $10$  Amp. beträgt nach Hörmann  $15,02$  Volt/cm statt der  $8,31$ , die unsere Rechnung ergab. Das von uns berechnete Leitvermögen ist also offenbar zu groß. Ein kleineres Leitvermögen erhalten wir mit einem höheren Wert der Ionisierungsarbeit  $E_i$ . Die Rechnung liefert

$$\begin{aligned} \text{für } E_i = 9 \text{ e-Volt die Feldstärke} &= 8,31 \text{ Volt/cm,} \\ &= 10 \text{ e-Volt } ,, \quad ,, \quad = 13,2 \text{ Volt/cm,} \\ &= 11 \text{ e-Volt } ,, \quad ,, \quad = 20,9 \text{ Volt/cm.} \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Nach E. Briner u. B. Susz, Helv. Chim. acta. 18, 1468, 1935, die die Konzentration von NO bei höheren Temperaturen berechneten, wird für  $O_2$  der Dissoziationsgrad  $0,577$ , bei dem die Zahl der Quasifreiheitsgrade ihr erstes Maximum erreicht, nicht bei  $4600^\circ$ , sondern bei  $3500^\circ$  K angenommen. Die von uns berechnete Kurve des Temperaturverlaufs wird dadurch gerade in der Nähe des Randes abgeflacht.



Interpolation ergibt als die zu einer Feldstärke von 15,0 Volt/cm gehörige Ionisierungsspannung des Bogengases 10,3 e-Volt, während Hörmann für 7000° K den Wert 10,5 e-Volt angibt. Anscheinend sind wenigstens für den inneren stromleitenden Teil des Bogens die Voraussetzungen unserer Rechnung annähernd dieselben wie für den frei brennenden Bogen. Um durch den „Unsicherheitsfaktor“  $\alpha$  die gleiche Abweichung zwischen der berechneten und der gemessenen Längsfeldstärke auszugleichen, müßte man diesen anstatt 1 den Wert  $(8,3/15,0)^2 = 0,304$  annehmen lassen.

#### 4. Zur Abschnürung der Bogensäule durch Konvektion.

Zur Abweichung des berechneten vom tatsächlichen Temperaturverlauf in den Randzonen der Bogensäule trägt außer dem zusätzlichen Wärmeleitvermögen des NO auch die Vernachlässigung der Konvektion bei. Daß die Strömung des aufsteigenden heißen Gases von großem Einfluß ist, geht aus dem Unterschied hervor, der zwischen den Durchmessern der frei brennenden Bogensäule auf der einen Seite und dem Durchmesser des Bogens bei Vermeidung der Konvektion besteht. Während bei Stromstärken von einigen Amp. der Durchmesser der frei brennenden Bogensäule 5 bis 10 mm beträgt, treten Durchmesser von mehreren cm bei den Lichtbögen auf, bei denen der Auftrieb der heißen Gasmasse ausgeschaltet ist, was durch Verlegen der Bogensäule in die Achse eines Luftwirbels, wie beim Wälzbogen, oder noch wirksamer durch Anordnen des Lichtbogens im schwerefreien Raum nach dem von Steenbeck <sup>1)</sup> durchgeführten Verfahren geschehen kann.

Obwohl eine befriedigende Lösung des vorliegenden Strömungsproblems mit einfachen Mitteln nicht möglich ist, läßt sich doch zeigen, wie an Stelle eines unbegrenzt anwachsenden Säulenradius eine Abschnürung des Entladungskanals durch das zuströmende Gas herbeigeführt werden kann.

Es besitzt das von außen zuströmende Gas eine radial nach innen gerichtete Geschwindigkeitskomponente  $v_r$ . Entgegen dieser radialen Strömung breitet sich die von innen vordringende Wärme aus, wobei an einer Stelle dann ein Gleichgewichtszustand entsteht, wenn der Temperaturanstieg durch die Wärmezufuhr der Temperatursenkung durch das von außen zuströmende kühlere Gas gleich ist.

<sup>1)</sup> M. Steenbeck. ZS. f. Phys. 18, 593, 1937.

Zu einer quantitativen Fassung dieser Überlegung bedürfen wir der zeitabhängigen Form der Wärmeleitungsgleichung. Sie lautet für das vorliegende zylindersymmetrische Problem<sup>1)</sup>:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\varepsilon c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (12)$$

worin  $t$  die Zeit,  $\varepsilon$  die Dichte,  $c$  die spezifische Wärme des Gases bedeuten. Andererseits ändert sich in einem Gase, in dem das Temperaturgefälle  $dT/dr$  herrscht, infolge einer radial gerichteten Strömung  $v_r$  die Temperatur im Zeitraum  $dt$  um den Betrag

$$-dT_v = \frac{\partial T}{\partial r} v_r dt, \quad \text{also} \quad -\frac{\partial T}{\partial t} v = \frac{\partial T}{\partial r} v_r.$$

Die Bedingung für eine stationäre Temperaturverteilung ist offenbar, daß an der Stelle  $r$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dT_v}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dT}{dr} v_r = \frac{\kappa}{\varepsilon c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (13)$$

Für linearen Abfall von  $T$  mit  $r$  ist  $\partial^2 T / \partial r^2 = 0$ . Sehen wir also von der Krümmung des Temperaturverlaufs zunächst ab und approximieren  $T$  durch eine Gerade, so nimmt die Gleichgewichtsbedingung (13) die einfache Form an:

$$v_r = \frac{\kappa}{\varepsilon c} \frac{1}{r}. \quad (14)$$

Wird  $v_r < \frac{\kappa}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{R}$ , so steigt  $T$  an der Stelle  $R$ . Damit die Bogensäule sich nicht weiter ausdehnt, muß also  $v_r \geq \frac{\kappa}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{R}$  sein. Wie ist diese Bedingung zu erfüllen? Tragen wir  $\frac{\kappa}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{R}$  in Fig. 5 gegen  $r$  auf, so darf  $v_r$  nicht unter der Kurve  $y_1$  liegen. Wegen der Kontinuitätsbedingung gilt zunächst  $v_r \sim 1/r$ . Damit würde  $v_r$  sich proportional der Kurve  $y_1 = \frac{\kappa}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{r}$  ändern, und wenn für irgendein  $r$  kleiner, sie nie erreichen können. Jedoch wird zweifellos bei festem  $L$  infolge der bei einem größeren Querschnitt analog dem Hagen-Poiseuilleschen Gesetz steigenden Strömungsgeschwindigkeit im Entladungskanal die abströmende Gasmenge zunehmen. Damit tritt in  $v_r$  noch als Faktor irgendeine Potenz  $r^n$  auf, wo  $n > 0$ . Die Radialgeschwindigkeit  $v_r$  ändert sich also mit  $r$  derart, daß ihre Steigung stets

<sup>1)</sup> Enzyklopädie d. math. Wissensch. Bd. V. Leipzig 1903–1921, S. 199. Art. 4: Wärmeleitung von E. W. Hobson u. H. Diesselhorst, S. 199.

größer als die der Grenzkurve ist. Daher kann durch Zunahme von  $r$  stets die Grenzkurve erreicht und damit der Gleichgewichtszustand hergestellt werden. Es wird also stets ein  $r$  geben, für das die Bedingung (14) erfüllt

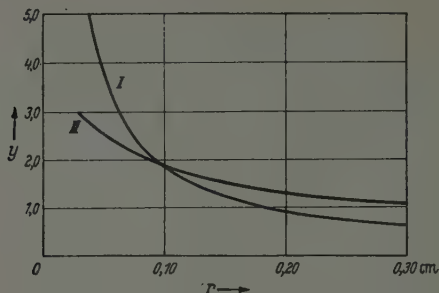


Fig. 5. Kurven  $y = \frac{x}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{r}$  (Kurve I)  
und  $\frac{x}{\varepsilon c} \cdot \frac{1}{r} \cdot r^n$  für  $n = \frac{1}{2}$  (Kurve II).  
II ist für  $R = 0,10$  cm berechnet, so  
daß sie I bei diesem  $r$ -Wert schneidet.

ist. Es muß so eine Abgrenzung der Bogensäule entstehen, die ähnlich wirkt wie eine Wand gegebener Temperatur  $T_R$ . Das Verhalten von  $T$  für  $r < R$  wird allerdings nicht allein durch die Wärmeleitungsgleichung bestimmt, sondern hängt außerdem vom Strömungsverlauf in der aufsteigenden heißen Luftsäule ab.

Eine zweite Bedingung ergibt sich für die Beziehung zwischen  $v_r$  und der Leistung  $L$ . Trotz der diffusen Begrenzung der Bogensäule läßt sich  $R$  für verschiedene  $L$  messen, dabei ergibt sich, wie Fig. 6 zeigt, das Verhältnis  $L/R$  als wesentlich konstant. Damit folgt, da für die Wärmeströmung gilt

$$\frac{L}{2\pi R} = -x \frac{dT}{dr} \quad (15)$$

aus der Konstanz von  $L/R$ , daß für den Rand des Bogens auch  $dT/dr$  konstant. Nun befördert das mit der Radialgeschwindigkeit  $v_r$  nach innen strömende Gas in der Zeiteinheit eine Wärmemenge  $W_r$

$$W_r = v_r 2\pi R \cdot \varepsilon c \frac{dT}{dr} v_r = v_r^2 2\pi R \varepsilon c \frac{dT}{dr}$$

entsprechend einer Stromdichte

$$\frac{L}{2\pi R} = v_r^2 \frac{dT}{dr} \varepsilon c \quad (16)$$

Da, wie wir sahen, für den Wert  $R$  des Säulenrandes  $dT/dr$  konstant, d. h. unabhängig von  $L$  ist, muß nach (16) auch  $v_r$  für alle  $L$  dasselbe sein. Es scheint also der Strömungsverlauf am Rande der Säule ein solcher zu sein,

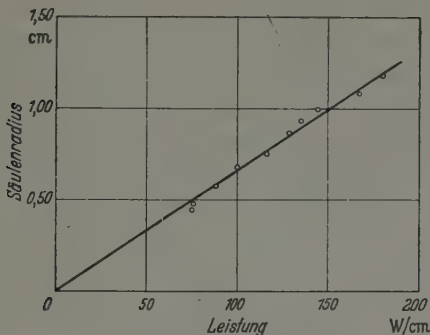


Fig. 6. Säulenradius  $R$  als Funktion der Leistung  $L$ .

daß in einem bestimmten Gas für alle Leistungen sich stets ein und dieselbe Radialgeschwindigkeit einstellt.

Unsere Bedingung (14) sei für die Randtemperatur  $T_R$  und das zugehörige  $\kappa/\varepsilon c$  erfüllt. Dann wird  $v_r$  für kleinere  $r$  stark ansteigen müssen, sobald mit zunehmender Temperatur der Anstieg von  $\kappa$  sich bemerkbar macht. Es ist also (14) um so schwerer zu erfüllen, je mehr man sich der Säulenachse nähert. Das führt zu der Vermutung, daß die Wirkung der Strömungserscheinungen sich auf eine verhältnismäßig dünne Randzone beschränken wird, während im Bogeninnern der Temperaturverlauf auch bei den Bögen mit unbehinderter Gasströmung wesentlich durch die Wärmeleitungsgleichung (8) bestimmt sein wird.

### 5. Die Messung des Säulendurchmessers.

Die Bestimmungen von  $L$  und  $R$ , aus denen die empirische Beziehung  $L/R = \text{const}$  abgeleitet wurde, erheben keinen Anspruch auf große Genauigkeit, trotzdem sind sie verwendbar, weil beide Größen in weiteren Grenzen variiert werden konnten.

Zur Bestimmung von  $L$  wurde bei den Stromstärken von 1,2 bis 12 Amp die Brennspannung des Bogens für eine Reihe von Bogenlängen zwischen 0,5 und 2,5 cm gemessen. Als Bogenlänge wurde der Elektrodenabstand gewählt, so daß Fehler durch die nie ganz fehlende seitliche Ausbiegung der Bogensäule in die Rechnung eingehen konnten, anders als bei Hörmann,

der diesen Einfluß berücksichtigte. Die Säulenfeldstärke wurde als Zuwachs der Brennspannung bei Zunahme der Säulenlänge um 1 cm berechnet.

Besondere Schwierigkeiten traten bei Messung des völlig diffus begrenzten Säulendurchmessers auf. Es wäre eine genaue Bestimmung nach dem von Hörmann angegebenen Verfahren möglich gewesen. Für die hier erforderliche Genauigkeit reichte eine andere mehr orientierende Methode aus. Infolge der aus den Kohleelektroden verdampfenden geringen Mengen Na ist der bläuliche Kern der Bogensäule von einem gelben Lenardschen Hohlmantel umgeben, der dadurch entsteht, daß im Bogeninnern durch

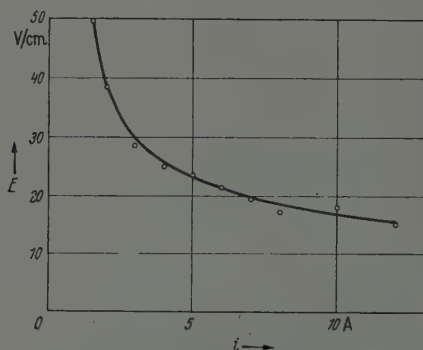


Fig. 7. Stromspannungscharakteristik der Lichtbogensäule in atm. Luft.

das elektrische Feld die hier vorwiegend als Ionen vorhandenen Na-Atome fortgeführt werden. Zwischen bläulichem Bogenkern und gelbem Mantel befindet sich eine farblose Zone, deren Durchmesser im Projektionsbild gut zu messen ist. Man erhält so den Durchmesser für eine Zone definierter Temperatur, von wohl etwa 1500 bis 2000° K. Fig. 7 zeigt  $E$  als Funktion der Stromstärke  $i$ , in Fig. 6 ist der Säulendurchmesser  $R$  gegen  $L$  aufgetragen.  $L/R$  ist nahezu konstant, wovon schon oben bei Bestimmung der radialen Strömungsgeschwindigkeit  $v_r$  Gebrauch gemacht wurde.

Auch Aufnahmen des Spektrums quer zur Säule des Bogens ergeben Säulendurchmesser der gleichen Größenordnung.

#### 6. Der Temperaturverlauf bei Änderung von Druck und Stromstärke und die Stabilität der Bogensäule.

Die Änderung von  $T$  mit  $p$  kann an Hand der Formel (8) leicht übersehen werden. Für gegebenes  $L$  ist  $T$  in erster Näherung von  $p$  unabhängig, da  $p$  in  $\pi$  im Zähler und Nenner als Faktor auftritt und sich forthebt. Erst

durch die Änderung von  $\kappa$  mit  $p$ , die beim Vorliegen von Dissoziations- und Ionisationsvorgängen durch Vermehrung der Quasifreiheitsgrade erfolgt, entsteht wieder ein Einfluß des Druckes auf die Temperatur. Er macht sich bei höheren  $T$  bemerkbar und läßt sich in jedem einzelnen Falle berechnen. Im allgemeinen bewirkt er eine Zunahme von  $T$  mit  $p$ . Daß  $T$  in erster Näherung vom Druck  $p$  unabhängig ist, wurde bereits von Ornstein<sup>1)</sup> für den Druckbereich von  $1/10$  bis 1 Atm. aus seinen Bestimmungen der Rotationstemperatur der CN-Banden erkannt. Elenbaas<sup>2)</sup> schloß zuerst aus (2), daß die Beziehung eine Folge der Saha-Gleichung sei. Ein Eingehen auf die zahlreichen anderen am Lichtbogen gefundenen empirischen oder halbempirischen Zusammenhänge, z. B. die Elenbaasschen Ähnlichkeitsgesetze<sup>2)</sup>, ist ohne weitere numerische Rechnungen nicht möglich.

Auffallend ist bei Berechnung von  $T$  für verschiedene  $E_i$ , daß der Temperaturverlauf sich mit  $E_i$  kaum ändert, während  $\mathfrak{E}$  nach (7) mit  $E_i$  stark zunimmt. Hier ist der Grund nicht so leicht wie beim Druck aus der Gleichung abzulesen. Er liegt darin, daß für eine bestimmte Temperaturverteilung zwar die Gesamtleitfähigkeit sich mit  $E_i$  stark ändert, aber nicht das in Gleichung (8) eingehende Verhältnis der bis zum Radius  $r$  gerechneten Leitfähigkeit zur Gesamtleitfähigkeit.

Sowohl für den Druck wie für die Ionisierungsspannung erhält man dann einen übersichtlichen Zusammenhang mit der Lichtbogentemperatur, wenn  $L$  als Parameter gewählt wird. Es ist jedoch auch möglich, statt  $L$  die Stromstärke  $i$  einzuführen, die bei einer großen Zahl bisher veröffentlichter Untersuchungen über den Lichtbogen als unabhängige Variable gewählt wurde. Es werden dann aus (8) und (7) die Gleichungen

$$T_r = \frac{i^2}{4\pi C \left( \int_0^R \frac{r x^-}{\sqrt{T}} dr \right)^2} \int_R^r \frac{1}{r \kappa} \int_0^r \frac{r x^-}{\sqrt{T}} dr dr + T_R \quad (17)$$

und

$$\mathfrak{E} = \frac{i}{C \int_0^R \frac{r x^-}{\sqrt{T}} dr}$$

Man sieht zunächst, daß  $T$  mit  $i$  schneller als mit  $L$  ansteigt, ferner ist  $T$  nicht mehr in erster Näherung unabhängig von  $p$  und  $E_i$ , da  $\sigma$  im Nenner

<sup>1)</sup> L. S. Ornstein, H. Brinkman u. A. Beunes, ZS. f. Phys. 77, 72, 1932.

— <sup>2)</sup> W. Elenbaas, Physica 2, 169, 1935.



in der zweiten Potenz auftritt. Es zeigt sich hier, daß nicht  $i$ , sondern die zuerst von Elenbaas<sup>1)</sup> eingeführte Leistung  $L$  diejenige unabhängige Variable ist, bei der die Gesetzmäßigkeiten der Bogensäule am einfachsten hervortreten.

Der Gleichgewichtszustand der Bogensäule ist dadurch gekennzeichnet, daß  $T$  der Wärmeleitungsgleichung (8) genügt. Die Längsfeldstärke ist damit nach (7) gleichfalls gegeben. Bereits Elenbaas<sup>1)</sup> hatte klar ausgesprochen, daß durch die Differentialgleichung des Problems die Temperaturverteilung und damit bei vorgegebenem  $L$  auch Strom und Spannung eindeutig festgelegt sind. Demgegenüber ist auch neuerdings wieder die Brauchbarkeit des Minimumprinzips der Brennspannung, das Steenbeck seinerzeit formuliert hatte<sup>2)</sup>, von Steenbeck<sup>3)</sup> selbst und anderen experimentell und theoretisch untersucht worden. Da  $T$  und  $\mathfrak{E}$  durch (7) und (8) bzw. (17) eindeutig bestimmt sind, ist für ein Minimumprinzip der Brennspannung als zusätzliche Bedingung kein Raum, es wäre anderenfalls das Problem überbestimmt. Das ist leicht für konstantes  $L$  einzusehen. Aber auch für konstante Stromstärke  $i$  wird  $T$  durch die Integralgleichung (17) bestimmt, und da mit  $T$  auch hier die Gesamtleitfähigkeit des Entladungskanals gegeben ist, ist die Längsfeldstärke  $\mathfrak{E}$  ebenfalls eindeutig festgelegt.

### *Zusammenfassung.*

Der radiale Temperaturverlauf in der Lichtbogensäule kann nach einem Iterationsverfahren berechnet und so die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung gewonnen werden. Hierbei gehen die Leistung pro cm Säulenlänge, Ionisierungsspannung des Gases, Säulendurchmesser, Gasdruck und Randtemperatur als Parameter ein. Ferner muß das Wärmeleitvermögen des Gases und die Zahl der Ladungsträger als Funktion der Temperatur bekannt sein.

Die Genauigkeit des Ergebnisses hängt von der Genauigkeit ab, mit der die in die Rechnung eingehenden Konstanten oder Variablen, wie das Wärmeleitvermögen, bekannt sind. Nach einer Anzahl von Näherungen ist die Lösung soweit bestimmt, wie die Rechengenauigkeit zuläßt. Die Zahl der erforderlichen Näherungen und damit die Rechenarbeit ist um so kleiner, je näher die erste Näherung dem wahren Verlauf kommt.

---

<sup>1)</sup> W. Elenbaas, *Physica* 1, 676, 1934. — <sup>2)</sup> M. Steenbeck, *Phys. ZS.* 33, 809, 1932. — <sup>3)</sup> M. Steenbeck, *Wissenschaftl. Veröffentl. a. d. Siemenskonzern*, XIX, S. 59, 1940; R. Foitzik, ebenda, S. 22; B. Kirschstein u. Fl. Koppelman, ebenda XVI, S. 56, 1937; R. Seeliger, *ZS. f. Phys.* 116, 207, 1940.

Als Beispiel wird für die Bogensäule in atmosphärischer Luft die Anwendung des Verfahrens durchgeführt und für den Gang der Rechnung ein Schema angegeben, das je nach der Art des Problems zu modifizieren ist.

Die Rechnung ergibt für die Achse der Bogensäule in Luft die von Ornstein und anderen gemessenen Temperaturen von etwa 70000 K, sowie für den inneren Teil der stromleitenden Zone Übereinstimmung mit einer Messung des Temperaturverlaufs von Hörmann. Für die äußeren Zonen war eine Übereinstimmung nicht zu erwarten, da bei der Rechnung die Reaktion zwischen  $N_2$  und  $O_2$  unberücksichtigt blieb und auch die unter Vernachlässigung der Konvektion gemachte Annahme einer festen Randtemperatur beim gemessenen Bogen nicht erfüllt war. Einige für die Abschnürung der Lichtbogensäule durch Konvektion aus der zeitabhängigen Wärmeleitungsgleichung und aus vorläufigen Messungen des Säulendurchmessers folgende Beziehungen werden kurz besprochen.

Die Zusammenhänge zwischen den eingehenden Größen werden am einfachsten, wenn die Leistung als Parameter gewählt wird. Daraus, daß die Längsfeldstärke aus  $T$  eindeutig berechenbar ist, folgt, daß durch ein zusätzliches Minimumprinzip der Brennspannung die Bogensäule überbestimmt wäre.

---

## Über die Vorgänge an der Anode eines zischenden Homogenkohlebogens.

Von W. Weizel, Bonn, und J. Fassbender\*), im Felde.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Oktober 1942.)

Der Ansatz eines ruhig brennenden Kohlebogens liegt auf der Anode fest. In ihm wandert ein viel kleinerer Brennfleck herum. Im Zischbogen bewegt sich auch der Ansatz auf der Anode. In den Brennflecken werden Stromdichten von mehreren tausend Amp/cm<sup>2</sup> erreicht. Die Spannung gegen die Zeit aufgetragen, zeigt beim Zischbogen eine Sägezahnkurve. Die Ursachen dieser Erscheinungen werden erklärt.

Noch vor kurzer Zeit hat sich das Interesse bei den Lichtbögen vorwiegend auf die Quecksilberbögen, insbesondere bei höheren Drucken, konzentriert. Seit einigen Jahren jedoch erfreuen sich auch die Kohlebögen wieder größerer Beachtung. Insbesondere Finkelnburg hat in mehreren Arbeiten<sup>1)</sup> die hochbelasteten Kohlebogen, die sogenannten Hochstrombögen, untersucht. Bei höherem Strom machen sich zwei Erscheinungen,

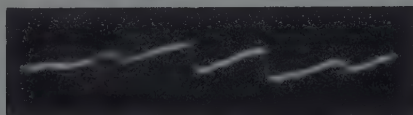


Fig. 1. Spannungszillogramm des zischenden Bogens;  
nach oben Spannung, nach rechts Zeit.

die von der Anode herrühren, am Bogen immer wesentlicher bemerkbar: Das Zischen des Homogenkohlebogens und die Ausbildung des anormalen Anodenfalles, der mit einer großen aus der Anode hervorbrechenden anodischen Flamme verbunden ist. In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, etwas zur Klärung der Vorgänge an der Anode beizutragen, insbesondere das Zischen genauer zu verfolgen.

Nimmt man mit einem Kathodenstrahloszillographen die Spannung eines zischenden Bogens gegen die Zeit auf, so erhält man ein Diagramm

\*) Die Arbeit ist ein Teil der Dissertation von J. Fassbender, Bonn 1942.

<sup>1)</sup> Handb. d. Lichttechn., S. 137ff., Berlin 1938; W. Finkelnburg, ZS. f. Phys. **112**, 305, 1939; **113**, 562, 1939; **116**, 214, 1940; ZS. f. techn. Phys. **21**, 311, 1940; Naturwissensch. **28**, 576, 1940.

nach der Art der Fig. 1. Es finden also Spannungsschwankungen statt, die einen einigermaßen periodischen Verlauf zeigen. Es liegt nun nahe zu vermuten, daß an der Anode sich Vorgänge abspielen, die sich mit der Zeit sehr schnell ändern. Um sie direkt zu beobachten, wurde die Anode gefilmt.

*Filmaufnahmen der Anode eines Zischbogens.* Lichtbögen sind der direkten visuellen Beobachtung wie auch der Photographie wegen ihrer außerordentlichen Helligkeit, wegen der großen Helligkeitskontraste nur schwer zugänglich, wenn rasch ablaufende Veränderungen untersucht werden sollen. Aufnahmen mit gewöhnlichen Kinokameras lieferten kein interessantes Ergebnis, sondern zeigten nur einfach das Bild der glühenden Anode. Dasselbe war bei einer Leicaaufnahme der Fall, die mit  $\frac{1}{500}$  Sek. Belichtungszeit gemacht wurde. Dies rührt offenbar daher, daß die Belichtungsdauer noch zu groß ist und deshalb, da die Leica mit Schlitzverschluß arbeitet, von den Einzelvorgängen noch nichts zu sehen ist. Es mußte also versucht werden, mit einfachen Mitteln eine Kamera hoher Bildzahl zu bauen und mit ihr die Anode zu filmen.

In eine lichtdichte Kiste wurde ein Motor mit einer Riemenscheibe eingebaut, auf der der Film befestigt wurde. In die Stirnseite der Kiste war ein Objektiv eingebaut, das die Anode auf den Film abbildete. Dicht vor ihm saß ein feiner fester Schlitz, vor dem eine Pappscheibe mit 40 Schlitzen rotierte, so daß der Film nur belichtet wurde, wenn der feste Schlitz von einem der Schlitze in der Scheibe überdeckt wurde. Die Umdrehungszahl und Schlitzbreite der Pappscheibe wurden so eingerichtet, daß die Belichtungszeit etwa  $\frac{1}{150000}$  Sekunden betrug. Die Drehzahl des Filmträgers wurde so einreguliert, daß sich während der Belichtungszeit der Film um nicht mehr als  $\frac{1}{10}$  mm fortbewegte. Der Abstand der einzelnen Schlitze auf der rotierenden Scheibe war dabei so groß, daß die einzelnen Bildchen einen Abstand von etwa 10 mm hatten. Die Kamera lieferte etwa 1500 Bilder in der Sekunde. In das Objektiv war noch ein Zentralverschluß eingebaut, mit dem man die Filmaufnahme während  $\frac{1}{50}$  Sekunde laufen lassen konnte, wobei man ungefähr 30 Bilder auf dem Film erhielt. Eine Skizze der Kamera gibt die Fig. 2.

Mit dieser Anordnung wurde zunächst ein Homogenkohlebogen verhältnismäßig geringer Stromstärke untersucht. Hierfür, wie auch für die folgenden Versuche wurden die Azur-S-Kohlen der Ringsdorff-Werke Mehlem von 12 cm Durchmesser verwendet. Die Stromstärke betrug etwa 30 Amp. und wurde natürlich einer Batterie entnommen. Der Bogen setzt, wie schon bisher bekannt, an einem kleinen Gebiet der Anodenstirnseite an,

dessen Fläche etwa  $15 \text{ mm}^2$  beträgt. Dies entspricht einer Stromdichte von etwa  $200 \text{ Amp./cm}^2$ . Der Bogen brennt völlig geräuschlos und die Ansatzstelle des Bogens liegt auf der Kohle fest bzw. bewegt sich nur ganz langsam. Die Filmaufnahme der Fig. 3 läßt jetzt interessante Einzelheiten erkennen. Da diese auf der Reproduktion weit weniger gut als auf dem Originalfilm selbst sichtbar sind, ist in Fig. 3a noch einmal eine Zeichnung des Filmstreifens wiedergegeben. Die Reihe der schwachen hellen Punkte auf der linken Seite sind die Bilder des Bogenansatzpunktes an der Kathode,

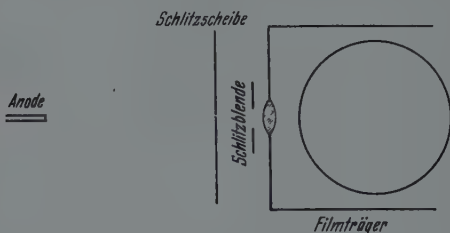


Fig. 2.

die helleren Flecke rechts die Bilder des Ansatzes an der Anode. Die gegenseitige Lage der Ansatzstellen an den Elektroden ist immer dieselbe, woraus hervorgeht, daß der Bogen immer an derselben Stelle der Anode ansetzt. Innerhalb des anodischen Ansatzes zeichnet sich aber ein Brennfleck von höchstens  $1 \text{ mm}^2$  Fläche durch bedeutend höhere Helligkeit deutlich ab, der sich mit ziemlich großer Geschwindigkeit ohne erkennbare Regelmäßigkeit in dem hochoerhitzten Ansatzgebiet herumbewegt. Daß dieser Brennfleck nicht einzelne Stellen bevorzugt, sondern im ganzen Ansatzgebiet umherläuft, läßt darauf schließen, daß es sich hierbei nicht um zufällige stärkere lokale Erhitzungen handelt, sondern um die eigentliche momentane Ansatzstelle der Entladung also um das, was man als Brennfleck zu bezeichnen hat. In ihm haben wir dann Stromdichten von mindestens  $3000 \text{ Amp./cm}^2$ .

Der wirkliche Brennfleck entsteht vermutlich durch Kontraktion der Entladung vor der Elektrode nach dem von Weizel, Rompe und Schön <sup>1)</sup> entwickelten Mechanismus, während das größere hochoerhitzte Gebiet derjenige Teil der Anode ist, auf welchem der Brennfleck sich bewegt, und der deshalb auf eine höhere Temperatur kommt als die übrige Stirnfläche der Anode.

<sup>1)</sup> W. Weizel, R. Rompe u. M. Schön, ZS. f. Phys. **115**, 179, 1940.

Nimmt man von diesem Bogen ein Spannungs-Zeit-Oszillogramm auf, so findet man keine Spannungsschwankungen.

Erhöht man die Stromstärke, so schlägt der ruhig brennende Bogen in eine geräuscherzeugende Form über. Unter den mannigfaltigen Geräuschen die man an Lichtbögen beobachten kann, können drei Typen leicht herausgearbeitet werden.

Ein Bogen mit ziemlich großem Elektrodenabstand neigt zum Knattern. Dieses Geräusch ist von dem eigentlichen Zischen leicht zu unterscheiden und rührt daher, daß die aus den Kohlen hervorbrechenden Flammen durch Konvektion und magnetische Kräfte nach Art des Hörnerblitzableiters abgetrieben werden. Einen knatternden Bogen erhält man leicht, wenn beide Elektroden schräg nach oben geneigt sind und einen Winkel von etwa  $90^\circ$  bilden. Eine Filmaufnahme eines solchen knatternden Bogens wurde früher<sup>1)</sup> gezeigt und diskutiert.

Von dieser Form des Knatterns scharf zu unterscheiden ist ein Knattern, das man an Kohlen erhalten kann, die zwar ohne Docht sind und deshalb homogen, aber ganz aus Effektmaterial bestehen. Der Vorgang des Knatterns hat bei diesen besonderen Kohlen dieselbe Ursache wie das Zischen an der gewöhnlichen Homogenkohle, das wir sogleich genauer analysieren. Alle Erscheinungen spielen sich nur langsamer ab, weshalb statt des Zischens ein Knattern hörbar wird.

Bei großer Stromstärke geht der ruhig brennende Bogen an Homogenkohlen in den Zischbogen über. Der Umschlag findet nach Finkelburg nicht bei einem ganz bestimmten Punkte statt, sondern es gibt ein Gebiet, wo man beide Formen beobachten kann. Das Spannung-Zeitoszillogramm eines Zischbogens, das in Fig. 1 abgebildet ist, zeigt Spannungsschwankungen in nicht ganz regelmäßiger Folge. Die Spannung steigt allmählich an, bis es zu einem plötzlichen Spannungszusammenbruch, der am einfachsten als eine Neuzündung des Bogens gedeutet werden kann. Danach wiederholt sich das Spiel, so daß eine ausgeprägte Sägezahnkurve entsteht.

Das äußere Erscheinungsbild ist gegen den ruhig brennenden Bogen wesentlich verändert. Die Entladung setzt nicht mehr an einer kleinen Stelle der Anodenstirnfläche an, sondern scheint sie gleichmäßig aber unruhig zu umhüllen. Die wirklichen Vorgänge an der Anode kann man auf der Filmaufnahme der Fig. 4 erkennen. Von einem Zischbogen, der mit 80 Amp. an 12 cm Kohlen brennt, sind hier etwa 1500 Bilder pro Sekunde

<sup>1)</sup> W. Weizel u. J. Fassbender, ZS. f. techn. Phys. **21**, 391, 1940.



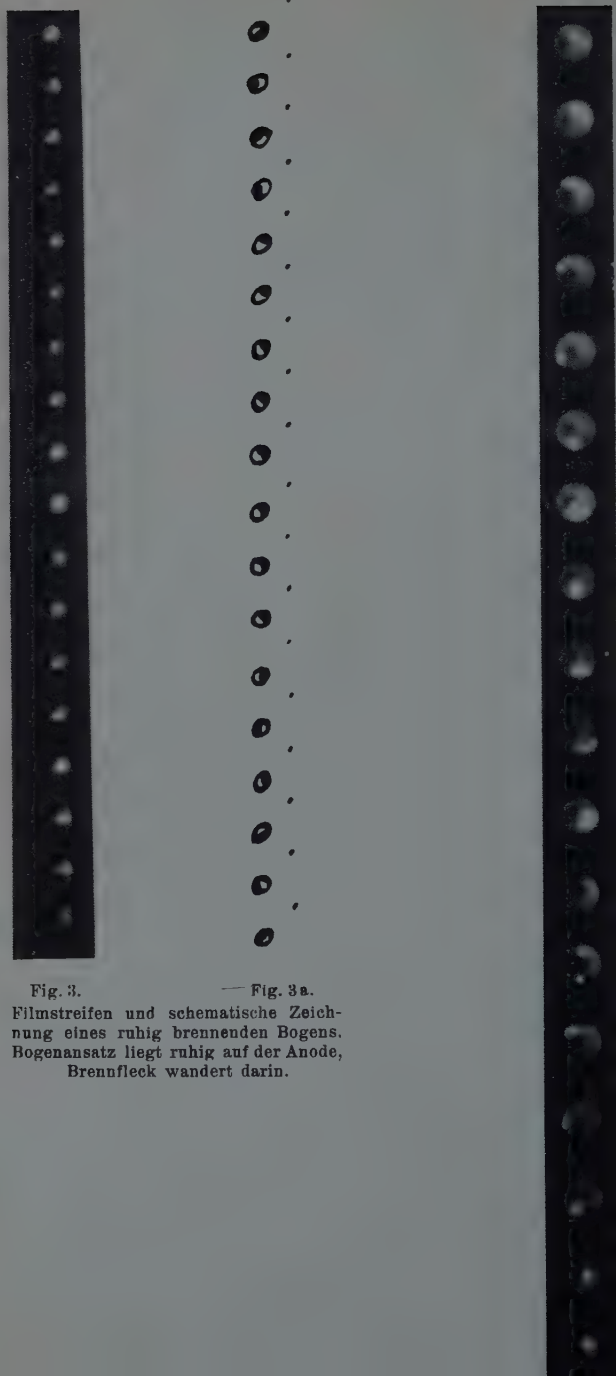


Fig. 3.

— Fig. 3a.

Filmstreifen und schematische Zeichnung eines ruhig brennenden Bogens.  
 Bogenansatz liegt ruhig auf der Anode,  
 Brennfleck wandert darin.

zu sehen. Auch hier ist in jedem Augenblick ein hoherhitztes und heller leuchtendes Gebiet von 10 bis 15 mm<sup>2</sup> vorhanden, nur bewegt es sich im Gegensatz zum ruhig brennenden Bogen mit großer Geschwindigkeit auf der Anodenoberfläche herum. Bezieht man die Stromdichte auf dieses Gebiet, so erhält man einen Mittelwert von 500 bis 800 Amp./cm<sup>2</sup>. Irgendeine Regelmäßigkeit kann man in dem Herumirren des Bogenansatzes auf der Anode nicht erkennen. Es scheint sich auch nicht um ein Umlaufen in einem bestimmten Drehsinn zu handeln, das von einem Magnetfeld verursacht sein könnte.

Die Fig. 5 zeigt eine Teilvergrößerung eines einzelnen Bildchens der Fig. 4, auf der man deutlich eine bemerkenswerte Feinstruktur des Bogenansatzes erkennen kann. Wie beim ruhig brennenden Bogen bildet sich innerhalb der Ansatzstelle an der Elektrode offenbar ein Brennfleck aus.



Fig. 5. Bogenansatz mit Feinstruktur.  
vier Brennflecke enthaltend.

Auf der Abbildung sind mehrere solche Brennflecke zu sehen. Es ist aber möglich, daß dies dadurch vorgetäuscht wird, daß sich während der Belichtungsdauer nacheinander an verschiedenen Stellen innerhalb der Ansatzfläche ein Brennfleck bildet. Da die Einzelbrennflecke ziemlich scharf sind, müßten sie sich sprunghaft und nicht stetig bewegen, da sie sonst eine thermische Spur hinterlassen müßten, wie man sie von dem ganzen Bogenansatz in Fig. 4 schön sieht. Auf der anderen Seite ist es aber auch möglich, daß die Aufteilung des Brennfleckes reell ist. Ähnliches ist auch bei Quecksilberbögen schon bemerkt worden.

Die Größe der Einzelbrennflecke liegt wieder unter 1 mm<sup>2</sup>. Rechnet man die Stromdichte auf einen einzigen Brennfleck um, so kommt man auf über 8000 Amp./cm<sup>2</sup>.

*Versuch der Erklärung der beobachteten Erscheinungen.* Von den Filmstreifen können folgende Tatsachen abgelesen werden. An der Anode eines Homogenkohlebogens bildet sich ein Brennfleck (vielleicht auch gleich-

zeitig einige solche), der nicht größer als  $1 \text{ mm}^2$  ist. In ihm herrschen Stromdichten von mehreren Tausend  $\text{Amp./cm}^2$ . Auch beim Kohlebogen kontrahiert sich also die Entladung, wie dies die Theorie erwartet. Sowohl beim ruhigen wie auch beim Zischbogen wandert der Brennfleck umher. Beim ruhigen Bogen bestreicht er dabei jedoch nur ein verhältnismäßig kleines Gebiet von etwa  $15 \text{ mm}^2$ , an dem der Bogenansatz festzuliegen scheint. Beim zischenden Bogen irrt der Brennfleck auch in einem solchen Gebiet herum, dieses aber bewegt sich selbst mit ziemlich großer Geschwindigkeit auf der ganzen Anodenstirnfläche ohne erkennbare Regelmäßigkeit herum. Der Bogenansatz wandert also beim Zischbogen auf der Anode.

Die Erklärung, die im folgenden für diesen Sachverhalt versucht wird, soll nicht als eine beweisbare Behauptung angesehen werden, sondern nur als eine Meinung, die man sich über die mutmaßlichen Vorgänge bilden kann und die ziemlich viel für sich zu haben scheint. Um ganz sicher zu gehen, müßten noch viele Untersuchungen unter anderen Bedingungen ausgeführt werden, da es leicht möglich ist, daß bei anderen Betriebsbedingungen andere Ergebnisse gefunden werden. Da dies aber während des Krieges infolge vordringlicherer Arbeiten und infolge Einziehung zum Heeresdienst unmöglich ist, müssen die Ergebnisse in dem vorliegenden unvollkommenen Zustand bekannt gegeben werden, damit eine Fortsetzung der Arbeiten von anderer Seite möglich wird.

Über das Zischen sind in den letzten 20 Jahren viele Arbeiten erschienen. Ayrton<sup>1)</sup> gibt Charakteristiken des zischenden Bogens und stellt fest, daß der Umschlag vom ruhigen in den Zischbogen die Brennspannung um etwa 10 Volt senkt. An Hand der Ayrtonschen Messungen versucht Bräuer<sup>2)</sup> eine Theorie des Zischens zu entwickeln. In einem Strom-Spannungsdiagramm soll der Bogen eine Kurve durchlaufen, die die statische Charakteristik wie eine Hysteresisschleife umschlingt. Hierbei schwankt die Länge und Intensität der Anodenflamme, was das Zischen hervorrufen soll.

Gegen die Bräuersche Auffassung spricht das Spannungszeit-Oszillogramm, das eine ausgesprochene Sägezahnkurve liefert. Offenbar steigt die Spannung zuerst allmählich an, bis bei einer Neuzündung ein Zusammenbruch eintritt. Auch ist es fast selbstverständlich, das Geräusch des Zischens in Zusammenhang mit dem Umherwandern des Bogenansatzes auf der Anode zu bringen.

<sup>1)</sup> Frau Ayrton, Inst. El. Eng. 28, 400, 1898. — <sup>2)</sup> E. Bräuer, Phys. ZS. 20, 409, 1919.

Den Schlüssel zu allen Erscheinungen sehen wir in Feststellungen Finkelnburgs, daß bei hochbelasteten Bögen das Material der Anode sehr stark verdampft, wodurch sich eine starke Anodenflamme ergibt. In den elektrodennahen Teilen der Flamme muß das Gas von etwa 4000° auf die Säulentemperatur von rund 6000° erhitzt werden und die dazu nötige Energie muß durch den sich gleichzeitig entwickelnden anormalen Anodenfall aufgebracht werden.

Von den Vorgängen an der Anode des Kohlelichtbogens gewinnt man jetzt leicht folgendes Bild, das schon vor einiger Zeit<sup>1)</sup> von uns skizziert wurde, jetzt aber mit mehr Einzelheiten ausgestaltet werden kann. An der Anode setzt der Bogen mit einer Säule oder Flamme an, die einen Querschnitt von 15 bis 20 mm<sup>2</sup> besitzt. Dies konnte auch auf zahlreichen Photographien festgestellt werden. Unmittelbar vor der Elektrode kontrahiert sich die Säule auf einen Brennfleck von unter 1 mm<sup>2</sup> Fläche, vielleicht auf einige solcher Flecke. Im Brennfleck wird wohl in jedem Fall die Kohle auf ihren Siedepunkt erhitzt. Das Leuchten des Fleckes rührt aber vermutlich nicht von der festen Kohle her, sondern entsteht in der Gasschicht unmittelbar davor. Dafür spricht die ziemlich scharfe Kontur der Flecke, die man bei einer lokalen Erhitzung der Kohle kaum erwarten kann. Durch die Verdampfung der Kohle entsteht ein feiner Gasstrahl, der den Brennfleck vertreibt und ihn zum Umherwandern zwingt. Dies führt aber noch nicht zum Zischen. Das Gebiet, in welchem sich der Brennfleck bewegen kann, ist durch den Querschnitt der Säule (Flamme) bestimmt und seine Bewegung ändert weder die Brennspannung nennenswert, noch gibt sie Anlaß zu einer zeitlichen Änderung der Temperatur und Dichteverteilung im Gas vor der Anode. Die Bewegung des Brennfleckes ist also nur optisch, nicht aber elektrisch oder akustisch wahrnehmbar, solange der Ansatz der Säule als Ganzes noch an derselben Stelle der Anode bleiben kann.

Bei größerem Strom tritt eine Änderung dieses Sachverhalts ein, wenn durch den oder die Brennflecke ein größeres Gebiet der festen Kohle, das ungefähr dem Säulenquerschnitt entspricht, auf die Siedetemperatur erhitzt wird. Dann bildet sich ein Gasstrahl von diesem Querschnitt aus, die Spannung steigt an, und schließlich wird die Entladung außerhalb des Dampfstrahls neu zünden. Damit verlagert sich auch die Säule an eine andere Stelle und vor der Elektrode bildet sich eine andere örtliche Temperatur und Dichteverteilung aus. Die Dichteschwankung des Gases wird als Zischen hörbar.

1) W. Weizel u. J. Fassbender, ZS. f. techn. Phys. 21, 391, 1940.

Für das Umherwandern der Brennflecke und des ganzen Bogenansatzes könnte man auch noch folgende Erklärung versuchen: Auch die sogenannten Homogenkohlen bestehen nicht aus reinem Kohlenstoff, sondern werden mit einem Bindemittel hergestellt. Wie Schmitz feststellte<sup>1)</sup>, verursachen fast alle Beimengungen zur Kohle eine Herabsetzung des Anodenfalles. Setzt der Bogen an einer Stelle der Anode an, so wird dort zunächst das Bindemittel verdampfen und reinere Kohle übrig bleiben. Diese erfordert jetzt einen höheren Anodenfall als die Nachbarstellen, wo das Bindemittel noch vorhanden ist. Der Bogen wird also dahin abwandern. Um diese Erklärungsmöglichkeit auszuschalten, hat Schlüter die hier geschilderten Versuche mit Ruhstrat-Spektralkohlen, die keine Verunreinigungen mehr enthalten, wiederholt und genau dieselben Ergebnisse gefunden.

---

<sup>1)</sup> G. Schmitz, Diss. Bonn 1941.

## Zur Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bei der Feldemission\*).

Von Erwin W. Müller.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Oktober 1942.)

Die Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen wird nach der Vorstellung des Tunneleffektes berechnet und für eine Wolframkathode zahlenmäßig bestimmt. Die experimentelle Prüfung unter Anwendung der Gegenspannungsmethode ergibt volle Übereinstimmung mit der theoretischen Verteilung.

Die wellenmechanische Theorie der Feldemission in der von Sommerfeld und Bethe und Nordheim<sup>1)</sup> gegebenen Form ist durch einige neuere Untersuchungen<sup>2)</sup> experimentell weitgehend bestätigt worden. Insbesondere besteht eine gute Übereinstimmung zwischen Erwartung und Experiment in bezug auf die Abhängigkeit der Stromdichte von der Feldstärke. Weniger befriedigend dagegen sind die vorliegenden experimentellen Ergebnisse bei der Messung der Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen<sup>3)</sup>.

Die Elektronenemission unter dem Einfluß sehr hoher elektrischer Feldstärken kommt dadurch zustande, daß die vom Metallinnern gegen den Potentialwall der Oberfläche anlaufenden Elektronen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit den schmalen Potentialwall zu durchdringen vermögen (Tunneleffekt). Zur Berechnung der Gesamtemission hat man daher die Zahl der mit einer bestimmten Energie gegen den Potentialwall anlaufenden Elektronen mit der Durchlässigkeit des Walles für diese Energie zu multiplizieren und über alle vorkommenden Energiewerte zu integrieren. Wir betrachten mit Nordheim l. c. die Elektronen, die mit einer Geschwindigkeit  $\xi$  der Normalkomponente auf die Oberfläche treffen. Ihre Energie ist dann  $w = m\xi^2/2$ , und die Größe  $N(w)dw$  die Zahl der Elektronen, die in der Zeiteinheit mit Energien zwischen  $w$  und  $w + dw$  gegen die Oberfläche anlaufen. Es ergibt sich aus der Fermi-Verteilung die Beziehung

$$N(w) = \frac{4\pi m k T}{h^3} \lg \left( 1 + e^{-\frac{w-\mu}{kT}} \right), \quad (1)$$

\*) Anmerkung bei der Korrektur. Diese Arbeit wurde schon vor längerer Zeit abgeschlossen. Auf die inzwischen erschienene Veröffentlichung zum gleichen Thema von G. Richter, ZS. f. Phys. **119**, 406, 1942 kann daher nur hingewiesen werden.

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld u. H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV/2, S. 441, 1933; L. Nordheim, Phys. ZS. **30**, 177, 1929. — <sup>2)</sup> R. Haefer, ZS. f. Phys. **116**, 604, 1940. — <sup>3)</sup> J. E. Henderson u. R. K. Dahlstrom, Phys. Rev. **45**, 764, 1934; **55**, 473, 1939; E. W. Müller, ZS. f. Phys. **102**, 734, 1936.



wobei  $\mu$  der Grenzwert der kinetischen Energie für  $T = 0$  bedeutet. Die wellenmechanische Durchlässigkeit einer Potentialschwelle, die durch die Funktion  $U(x)$  dargestellt wird, ist allgemein

$$D(w) = e^{-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} (U(x) - w)^{1/2} dx} \quad (2)$$

Die Verteilungsfunktion  $P(w)$  der Normalkomponente der Geschwindigkeit der austretenden Elektronen, die nach Multiplikation mit der Breite  $dw$  eines Energiebereiches angibt, wieviel Elektronen der Energie  $w$  bis  $w + dw$  emittiert werden, erhält man dann als Produkt

$$P(w) dw = N(w) \cdot D(w) dw. \quad (3)$$

Die Verteilungsfunktion ist schon bei verhältnismäßig einfachen Annahmen über die Form der Potentialschwelle nicht mehr geschlossen darstellbar. Um daher die Ergebnisse der Experimente mit der zu erwartenden Verteilungsfunktion vergleichen zu können, wurde die theoretische Verteilung numerisch für eine Wolframoberfläche mit einer Austrittsarbeit von 4,5 e-Volt und für  $\mu = 5,7$  e-Volt bestimmt. Als Feldstärke wurde  $35 \cdot 10^6$  Volt  $\text{cm}^{-1}$  eingesetzt, wobei eine in den nachfolgenden Experimenten gebrauchte Stromdichte von einigen 100 Amp.  $\text{cm}^{-2}$  emittiert wird. Unter Berücksichtigung der Bildkraft wurde als Potentialverteilung an der Kathodenoberfläche angenommen

$$U(x) = -\frac{e^2}{4x} - Fx, \quad (4)$$

und die Integration für die Berechnung der Durchlässigkeit graphisch ausgeführt. Die Durchlässigkeit nimmt mit abnehmender kinetischer Energie bzw. breiter werdendem Potentialwall schnell ab und besitzt in dem numerisch aufgeführten Beispiel bei der oberen Grenzenergie  $\mu$  der Fermi-Verteilung den Wert von  $2 \cdot 10^{-6}$ , ein Volt tiefer jedoch nur noch etwa  $3 \cdot 10^{-9}$ . Da die Zahl  $N(w)$  der von innen auf die Oberfläche auftreffenden Elektronen nur etwa linear mit abnehmender Energie größer wird, so sind an der Feldemission praktisch nur die Elektronen der höchsten Energie innerhalb eines Bereiches von etwa 1 Volt beteiligt. Fig. 1 zeigt das Ergebnis der Berechnung der Verteilungsfunktion  $P(w)$  für  $T = 0^\circ$  und  $T = 500^\circ$  K. Infolge der für größere Energien stark zunehmenden Durchlässigkeit der Potentialschwelle sind die erst bei höheren Temperaturen besetzten Zustände merklich an der Emission beteiligt. Dieser Temperatureffekt der Feldemission macht sich praktisch nur in der Geschwindigkeitsverteilung bemerkbar, während seine Messung in der Gesamtemission unterhalb von  $1000^\circ$  K kaum möglich ist wegen der sehr starken Abhängigkeit

der Emission von der Austrittsarbeit bzw. von adsorbierten Verunreinigungen, die sich über einen größeren Temperaturbereich kaum unverändert halten lassen.

Die vorstehend berechnete Verteilungskurve gilt für eine reine Wolframoberfläche. Wird die Austrittsarbeit der Kathode durch Adsorption elektropositiver Schichten verkleinert, so setzt die Emission schon bei viel geringeren Feldstärken ein. Das Verhältnis von Breite zu Höhe des Potentialwalles an der Oberfläche nimmt zu, und dementsprechend werden die

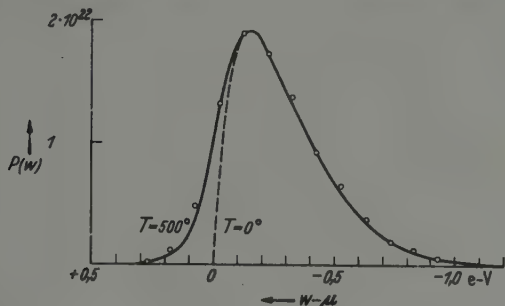


Fig. 1. Berechnete Verteilung der Elektronengeschwindigkeiten für  $T = 0^\circ \text{ K}$  und  $T = 500^\circ \text{ K}$  sowie Meßpunkte nach Auswertung von Fig. 4.

höheren Energieniveaus der Elektronen etwas bevorzugt. Bei Adsorption elektronegativer Atome, etwa von Sauerstoff, wird die Austrittsarbeit und die zur Emission erforderliche Feldstärke wesentlich heraufgesetzt. Der Potentialwall wird schmal und hoch und die Änderung der Durchlässigkeit mit der Energie entsprechend geringer. Dies hat wegen der in Richtung zu geringeren Energien zunehmenden Zahl  $N(w)$  eine relative Bevorzugung der niedrigeren Energien zur Folge. Wie die zahlenmäßige Berechnung zeigt, ergeben sich bei Veränderung der Austrittsarbeit von etwa 2,5 bis 6 Volt jedoch nur geringe Verschiebungen der Ränder der Verteilungskurve um Bruchteile von zehntel Volt.

Die bisher vorliegenden Messungen der Geschwindigkeitsverteilung von Henderson und Dahlstrom sowie des Verfassers<sup>1)</sup> haben wesentlich größere Verteilungsbreiten ergeben als nach der vorstehenden Berechnung zu erwarten ist. In allen Fällen wurde in Anbetracht der hohen Spannungen von mehreren tausend Volt, die zur Erzielung der Emission erforderlich sind, nach der Gegenspannungsmethode gearbeitet. Der Feldkathode gegenüber stand eine Anode, durch deren Öffnungen ein Teil der Feld-

<sup>1)</sup> J. E. Henderson u. R. K. Dahlstrom, Phys. Rev. **45**, 764, 1934; **55**, 473, 1939; E. W. Müller, ZS. f. Phys. **102**, 734, 1936.

elektronen hindurchtreten konnte. Ein die Anode umgebender Auffänger befand sich nahezu auf Kathodenpotential. Der von ihm abfließende Elektronenstrom wurde als Funktion der Spannungsdifferenz zwischen Auffänger und Kathode gemessen. In Übereinstimmung mit der Vorstellung des Tunneleffektes können bei derartiger Anordnungen Elektronen erst dann den Auffänger erreichen, wenn er gegenüber der Kathode so weit positiv ist, daß die ankommenden Elektronen den Potentialberg überschreiten können. Die Durchlässigkeit des Potentialberges an dem Auffänger ist wegen der dort herrschenden geringen Feldstärke völlig zu vernachlässigen. Fig. 2 veranschaulicht diese Verhältnisse. Die dem Auffänger

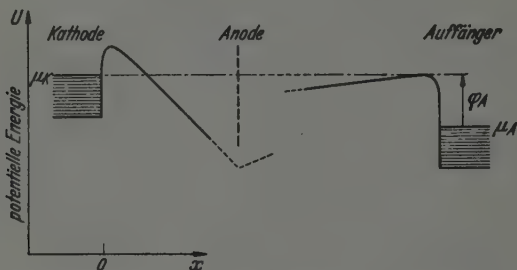


Fig. 2. Potentialverhältnisse bei der Messung nach der Gegenspannungsmethode.

gegenüber der Kathode erteilte meßbare Spannungsdifferenz ist der Unterschied der potentiellen Energie der schnellsten Elektronen mit der kinetischen Energie  $\mu_K$  bzw.  $\mu_A$  der beiden Elektroden. Der Auffänger muß daher gegenüber der Kathode ein um den Betrag seiner Austrittsarbeit  $\varphi_A$  positives Potential besitzen, damit Elektronen aus dem Niveau  $\mu_K$  in ihn eintreten können. Steigert man das Potential des Auffängers weiter, so können auch Feldelektronen geringerer Energie eintreten. Die Stromspannungskennlinie ergibt also die Integralkurve der Energieverteilung der Feldelektronen, wobei nur die Normalkomponente der Geschwindigkeit berücksichtigt wird, die auch für den Emissionsvorgang allein von Bedeutung ist.

Die Anordnung von Henderson und Dahlstrom besteht aus einem dünnen Wolframdraht als Kathode und konzentrischen Zylindern als Anode und Auffänger. Daher könnte überhaupt nur dann die richtige Geschwindigkeitsverteilung gemessen werden, wenn die Feldelektronen genau radial und in Ebenen senkrecht zur Drahtachse austreten und sich bewegen würden. Das ist jedoch wegen der unvermeidbaren Unregelmäßigkeit des Kathodendrahtes nicht der Fall. Wie man sich durch Beobachtung der Richtungsverteilung der Emission auf einem Leuchtschirm leicht überzeugen kann, ist es überhaupt nicht möglich, von einer Drahtoberfläche eine gleich-

mäßige Feldemission zu erhalten. Die Elektronen treten immer nur an den Stellen aus, an denen wegen geometrischer Unregelmäßigkeiten eine erhöhte Feldstärke herrscht. Dementsprechend erhalten Henderson und Dahlstrom trotz ihrer sorgfältigen Arbeitsweise zwar einen richtigen Einsatz des Auffängerstromes bei einem um den Betrag der Austrittsarbeit positiven Potential, aber die gemessene Energieverteilung besitzt eine Breite von 10 e-Volt, die theoretisch nicht verständlich ist.

Der Verfasser hatte in seiner vorgenannten Arbeit eine kugelsymmetrische Anordnung gewählt, wie sie für Gegenspannungsmessungen am zweckmäßigsten ist. Als Kathode diente eine feine Wolframspitze, die von der Netzanode und dem Auffänger als konzentrische Halbkugeln umgeben war. Die Geschwindigkeitsverteilung erwies sich jedoch nur wenig schmaler als die von Henderson und Dahlstrom. Günstigenfalls wurden Verteilungsbreiten von 5 e-Volt erhalten.

Verschiedene in der Zwischenzeit erfolgte Verbesserungen der experimentellen Technik bei der Untersuchung der Feldemission, wie die Einführung der weitgehend entgasbaren und durch Oberflächenwanderung unter dem Einfluß der Oberflächenspannung vollkommen glatten Einkristallspitze und des Feldelektronenmikroskopes<sup>1)</sup> ließen ein erneutes Aufgreifen der Frage der Geschwindigkeitsverteilung bei der Feldemission aussichtsreich erscheinen. Zuerst zeigte sich jedoch, daß die Verbesserung der Kathodenspitze keine Änderung in der meßbaren Verteilungskurve zur Folge hatte. Als weiterer möglicher Fehler war ein nicht genügend genau konzentrischer Aufbau des Elektrodensystems anzusehen. Es darf nicht übersehen werden, daß es gilt, die Verteilung der Geschwindigkeiten mit der Genauigkeit von zehntel Volt an einem Elektrodenstrahl von mehreren tausend Volt Geschwindigkeit zu messen. Wenn die Anordnung auch nur kleine Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit entstehen läßt, wird die Radialgeschwindigkeit schon falsch gemessen. Um diesen Fehler möglichst klein zu halten, wurde daher bei einer neuen Anordnung nur ein schmaler Kegel der von der Spitze radial ausgehenden Elektronen zur Messung herangezogen. Die Anode war nicht mehr ein Drahtnetz, sondern eine zur Kathodenspitze konzentrische Halbkugel aus dünnem Blech mit einer kleinen Öffnung in der Mitte. Als Auffänger diente die mit einer Molybdänschicht bedampfte Glaswand des kugeligen Entladungsgefäßes. Die Anode war innen mit Calciumwolframat bestäubt, so daß die Richtungsverteilung der Emission beobachtet werden konnte. Insbesondere ist dadurch der einwandfreie Zustand der Spitze leicht zu beurteilen. Durch Drehen der Spitze konnte die

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. Phys. **108**, 668, 1938.

Emission in verschiedenen Kristallrichtungen gemessen werden. Aber auch diese Anordnung brachte nicht den erwarteten Erfolg.

Schließlich wurde als wesentlicher Fehler der beträchtliche Durchgriff des Gegenfeldes durch die Öffnung der Anode erkannt. Ein Teil der durch die Anodenöffnung hindurchtretenden Elektronen wird gar nicht bis zur vollen Anodenspannung beschleunigt. Diese Elektronen erhalten beim Durchgang durch die Öffnung eine von der Achse weggerichtete Beschleunigung, d. h. das Feld zwischen Anode und Auffänger hat die Wirkung einer

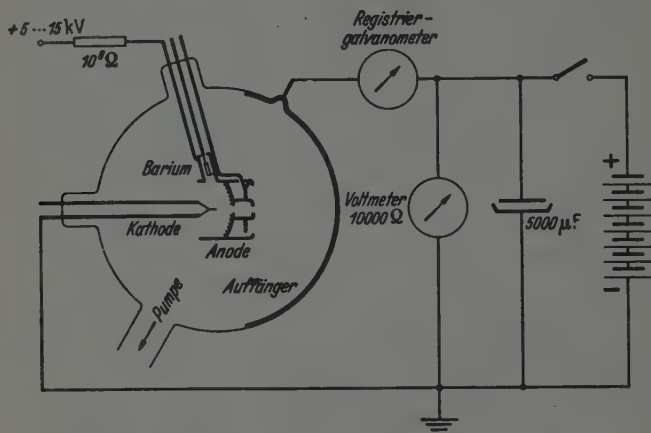


Fig. 3. Anordnung zur Messung der Gegenspannungskurve.

Zerstreuungslinse. Ein Teil der Elektronen kann im Gegenfeld nicht mehr bis zum Auffänger anlaufen, solange dessen Potential nur gerade ausreicht, um die genau radial durch die Mitte des Anodenloches gelaufenen Elektronen aufzunehmen. Erst bei weiterer Steigerung des Potentials treten alle Elektronen in den Auffänger ein und täuschen damit eine breitere Geschwindigkeitsverteilung vor.

Nach Klärung dieser Verhältnisse war es leicht, durch Verkleinerung des Durchgriffs den Fehler zu beseitigen. Das Verhältnis von Durchmesser zu Tiefe des Anodenloches wurde nach Fig. 3 durch Einfügen einer Doppelblende in den Anodentopf verkleinert. Die Anode enthielt auf der Innenseite einen Überzug aus Calciumwolframat, eine Vorrichtung zum Aufdampfen von Barium auf die Kathodenspitze sowie auf der Außenseite noch einen Molybdänglühfaden. Der Auffänger bestand aus einer auf die Glaswand aufgedampften dickeren Molybdänschicht, die kurz vor der Messung noch durch Glühen des Molybdändrahtes frisch bedampft werden konnte, um eine reine Oberfläche zu erzielen. Die Gegenspannungskurve wurde mit



Hilfe eines schnell schwingenden Galvanometers registriert, während die Auffängerspannung durch die Entladung eines Kondensators von  $5000\ \mu\text{F}$  über ein Voltmeter von  $10000\ \Omega$  stetig verändert wurde. Fig. 4 zeigt in verkleinerter Wiedergabe auf einem Registrierstreifen die Gegenspannungskurve für die Feldemission aus einer Wolframkathode. Die Anodenspannung betrug in diesem Fall  $3100\ \text{Volt}$ , und die gemessene Emission erfolgte etwa in der (210)-Richtung des Kathodenkristallits. Durch graphisches Differenzieren der Gegenspannungskurve erhielt man unter

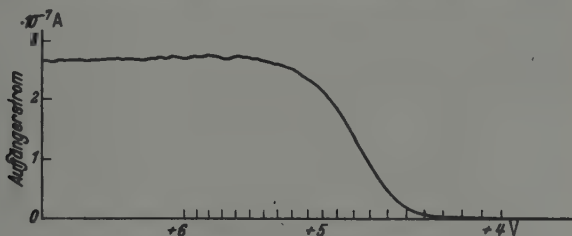


Fig. 4. Registrierte Gegenspannungskurve.

Berücksichtigung der infolge der Kondensatorentladung ungleichförmigen Abszissenteilung und einer Verschiebung der eingezeichneten Voltskala um  $0,07\ \text{Volt}$  (Differenz der Austrittsarbeit von W und Mo) nach links die gesuchte Verteilungsfunktion. Das Auswertungsergebnis ist in Fig. 1 eingezeichnet, wobei der Maßstab für die gemessenen Relativwerte so gewählt wurde, daß berechnete und gemessene Kurve an der Stelle des Maximums gleiche Ordinaten erhielten. Einige weitere Versuche mit anders orientierten Kathodenspitzen ergaben für die Emission in (100)-Richtung oder in (111)-Richtung die gleiche Verteilungskurve. Ebenso lagen die Abweichungen nach dem Aufdampfen von Barium bei verschiedenen Bedeckungsgraden innerhalb der Meßgenauigkeit.

Beim Vergleich der gemessenen Verteilungskurve mit den theoretischen Kurven nach Fig. 1 findet man praktisch vollkommene Übereinstimmung, wenn man als Kathodentemperatur  $5000^\circ\text{K}$ . ansetzt. Dies ist durchaus gerechtfertigt, da die Spitze etwa 30 Sekunden vor der Messung zur Reinigung hoch erhitzt wurde und noch nicht völlig abgekühlt war. Die Registrierung des temperaturempfindlichen Teiles der Gegenspannungskurve erfolgte dabei innerhalb von 6 Sekunden, so daß die in dieser Zeit vor sich gehende Temperaturänderung gering war.

Die Lage der Gegenspannungskurve auf der Voltskala der Abszisse wird durch die Austrittsarbeit des Molybdänauffängers bestimmt. Für diese Austrittsarbeit ergibt sich hier ein Wert von  $4,57\ \text{e-Volt}$  bei Zimmertem-



peratur, wobei die Austrittsarbeit des Wolframs zu 4,50 e-Volt angenommen ist. Dies ist in guter Übereinstimmung mit der glühelektrisch gemessenen Austrittsarbeit von Molybdän, die meist mit 4,4 e-Volt angegeben wird, wenn man einen allerdings verhältnismäßig großen Temperaturkoeffizienten von  $-10^{-4}$  e-Volt/ $^{\circ}$  K annimmt. Theoretisch sollte der Temperaturkoeffizient etwas kleiner sein. Es ist aber noch mit der Anwesenheit einer die Austrittsarbeit erhöhenden Adsorptionsschicht zu rechnen. Nach Stehenlassen der Röhre über Nacht bei gutem Hochvakuum und erneutem Ausheizen stieg die Austrittsarbeit des offenbar oberflächlich oxydierten Molybdäns sogar bis auf 6,8 e-Volt. Die Gegenspannungsmessung ist also auch zur Bestimmung von Austrittsarbeiten geeignet. Aus der genauen Übereinstimmung der Breite der gemessenen Verteilungskurve mit der theoretischen Kurve folgt übrigens, daß die aufgedampfte, polykristalline Molybdänoberfläche eine weitgehend einheitliche Austrittsarbeit besitzt. Wenn die Potentialschwelle auf einem wesentlichen Bruchteil der Gesamtfläche, etwa vor bestimmten Kristallflächen, einen höheren Wert hätte als an anderen Stellen, so müßte dort der Elektroneneintritt erst bei entsprechend höherem Auffängerpotential möglich sein, und die Verteilungskurve müßte verbreitert erscheinen. Andererseits wurden bei dem Molybdän in bezug auf Elektronenemission<sup>1)</sup> und Leitfähigkeit sehr ähnlichen Wolfram Differenzen der glühelektrischen und lichtelektrischen Austrittsarbeit bis zu 0,3 Volt zwischen verschiedenen Kristallflächen gemessen<sup>2)</sup>. Für das Vorhandensein derartiger Unterschiede der Höhe der Potentialschwelle auch nur vor vielleicht 10% der Gesamtfläche der polykristallinen Molybdänschicht sind aber nach den vorstehenden Messungen keinerlei Anhaltspunkte vorhanden.

Bei der Untersuchung der Geschwindigkeitsverteilung aus verschiedenen Kristallrichtungen wurde auch versucht, die Emission in der (110)-Richtung zu messen. In dieser Richtung emittieren Wolfram sowie auch andere kubisch raumzentriert kristallisierende Metalle wie Molybdän, Tantal und  $\alpha$ -Eisen am schwächsten. Messungen waren mit einer besonderen Röhre mit sehr engem Anodenloch und einem Schirmgitter zwischen Anode und Auffänger unter Verwendung einer Elektrometerröhre möglich. So ergab sich bei Wolframkathoden in der (110)-Ebene eine um 3 bis 4 Zehnerpotenzen geringere Stromdichte als auf den stark emittierenden (210)- oder (111)-Flächen, wobei die Gesamtemission der Spitze etwa in dem Bereich von  $10^{-4}$  bis  $10^{-7}$  Amp. verändert wurde. Unter Benutzung der theoretischen

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. Phys. 106, 541, 1937. — <sup>2)</sup> M. H. Nichols, Phys. Rev. 57, 297, 1940; C. E. Mendenhall u. C. F. de Voe, ebenda 51, 346, 1937.

Emissionsgleichung mit dem  $\varphi^{3/2}$ -Gesetz<sup>1)</sup> folgt aus diesen Messungen eine scheinbare Austrittsarbeit von 6,0 e-Volt für die (110)-Fläche, während die Mengenkongstante der Emissionsgleichung für alle Kristallflächen annähernd gleich groß ist. Die Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen der (110)-Fläche unterscheidet sich nicht von der der stärker emittierenden Kristallebenen.

Für die Erklärung der außerordentlichen Unterschiede in der Stromdichte der verschiedenen Kristallflächen sind folgende Möglichkeiten zu betrachten: Erstens kann die Austrittsarbeit auf allen Flächen nahezu gleich groß sein und die geringere Emission wird durch eine verminderte Feldstärke auf der (110)-Fläche vorgetäuscht. Dazu müßte man sich vorstellen, daß die Kristallspitze nicht genau kugelig, sondern in der Umgebung der (110)-Fläche um etwa 10% des Spitzenradius nach innen zurückgezogen ist, wodurch die Feldstärke auf etwa  $2/3$  ihres mittleren Betrages abgeschirmt wird. Zweitens könnte die (110)-Fläche ideal eben und glatt sein, da sie ja die größte Flächendichte der Atome besitzt, während die anderen Flächen größere Gittertreppenstufen aufweisen, die durch ihre Spitzenwirkung die Feldstärke örtlich erhöhen. Drittens können die verschiedenen Emissionsstromdichten eine Folge des Verbotes bestimmter Richtungen der Elektronenwellen im Kristallinnern sein<sup>2)</sup>, so daß die Austrittsarbeit der Oberflächen selbst nicht wesentlich verschieden zu sein braucht. Die vorliegenden Beobachtungen gestatten noch nicht, sich für eine der angeführten Deutungen zu entscheiden, wobei allerdings die erste am unwahrscheinlichsten ist. Es wird vielmehr nötig sein, die Bilder, die das Feldelektronenmikroskop von den Spitzenoberflächen liefert, noch genauer zu studieren, um damit genauere Kenntnisse über die sich bei der Glühtemperatur einstellende Gleichgewichtsform kleiner Kristalle zu erlangen.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß die früher erhaltenen Verteilungskurven der Elektronengeschwindigkeit bei der Feldemission auf Mängel der Versuchsanordnung zurückzuführen sind. Mit einer verbesserten Anordnung wurden Gegenspannungsmessungen durchgeführt, die genau die theoretisch erwartete Halbwertsbreite der Verteilung von etwa 0,4 Volt ergeben. Die Geschwindigkeitsverteilung ist für die Emission aus verschiedenen Kristallrichtungen gleich.

*Berlin, Laboratorium der Stabilovolt G. m. b. H., Januar 1942.*

<sup>1)</sup> R. Haefner, ZS. f. Phys. 116, 604, 1940. — <sup>2)</sup> E. W. Müller, Naturwissensch. 27, 820, 1939.

## Das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops.

Von Erwin W. Müller.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 5. Oktober 1942.)

Die Bildunschärfe des Feldelektronenmikroskops wird wesentlich durch die Verteilungsbreite der Elektronengeschwindigkeit bestimmt. Mit Hilfe des Emissionsgesetzes kann der Krümmungsradius der Kathodenspitze sowie die Lateralvergrößerung berechnet werden, womit unter Berücksichtigung der bekannten Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen das Auflösungsvermögen anzugeben ist. Bei sehr starken Vergrößerungen bzw. kleinen Krümmungsradien der Kathode macht sich zusätzlich der Einfluß der Beugung bemerkbar. Vergleiche mit experimentellen Ergebnissen bestätigen die Berechnungen. Das höchste zur Zeit erreichbare Auflösungsvermögen von etwa  $10 \text{ \AA}$  ist aber nicht durch die vorgenannten Erscheinungen begrenzt, sondern durch die Unvollkommenheiten der Kathodenoberfläche.

Das Feldelektronenmikroskop <sup>1)</sup> besteht in seiner einfachsten Form aus einer mikroskopisch feinen Metallspitze, deren Kalotte durch die unter Einwirkung einer hohen elektrischen Feldstärke radial austretenden Elektronen auf einen ihr gegenüberstehenden Leuchtschirm in starker Vergrößerung ohne eine Zwischenoptik projiziert wird. Es übertrifft mit Vergrößerung und Auflösungsvermögen die anderen bisher bekannten Emissionsmikroskope <sup>2)</sup> ganz bedeutend und gibt vielseitige Möglichkeiten zur Beobachtung von Elektronenemissionsvorgängen, Erscheinungen der Adsorption, der Oberflächenwanderung und der Kathodenzerstäubung an einkristallinen Metalloberflächen.

Das Elektronenbild weist eine gewisse Unschärfe auf, und die feinsten erkennbaren Einzelheiten zeigen sich als diffus begrenzte, kreisrunde Flecke von einigen mm Durchmesser bei 10 cm Abstand zwischen Kathode und Leuchtschirm. In einem bestimmten Elektronenbild haben alle diese unscharfen Flecke den gleichen Durchmesser, der im folgenden als Streukreisdurchmesser bezeichnet wird. Man kann ihn auf Photographien mit einer Genauigkeit von etwa 10% ausmessen, wenn man den Rand bei einer bestimmten Schwärzung annimmt. Der endliche Durchmesser des Streukreises kann unter Vernachlässigung der Beugung durch die Geschwindig-

---

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. techn. Phys. 17, 412, 1936; ZS. f. Phys. 106, 541, 1937; 108, 668, 1938. — <sup>2)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Auf die kürzlich erschienene Arbeit „Zum Auflösungsvermögen der Emissionsmikroskope“ von J. Dosse u. H. O. Müller, ZS. f. Phys. 119, 415, 1942 wird hingewiesen.

keitsverteilung der Elektronen erklärt werden. Wenn die Verteilungsbreite in e-Volt gemessen den Betrag  $\varepsilon$  besitzt, so gibt dieser Wert zugleich die Energie der größten in tangentialer Richtung vorhandenen Geschwindigkeitskomponente eines schief emittierten Elektrons an, da das Feld nur in radialer Richtung beschleunigt. Man kann sich die Bewegung eines schief emittierten Elektrons zerlegt denken in eine beschleunigte radiale Komponente und in eine tangentiale Komponente mit konstanter Geschwindigkeit. Das elektrische Feld ist in erster Annäherung das eines Kugelkondensators, der aus der Spitzenkalotte vom Radius  $r$  und dem konzentrischen Leuchtschirm vom Radius  $R$  besteht, der zugleich Anode ist. Die Feldstärke hat dann bei einer angelegten Spannung  $U$  in der Entfernung  $x$  vom Mittelpunkt die Größe

$$E_x = \frac{U}{x^2} \cdot \frac{rR}{R-r},$$

wofür wegen  $R \gg r$

$$E_x = \frac{Ur}{x^2}$$

gesetzt werden kann. Die Bewegungsgleichung des Elektrons in radialer Richtung lautet dann

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{eUr}{x^2}.$$

Durch wiederholte Integration erhält man die Flugzeit  $t$  des Elektrons von der Kathode bis zur Leuchtschirmanode

$$t = \sqrt{\frac{m}{2eU}} \int_r^R \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{r}{x}}}$$

und weiter

$$t = \sqrt{\frac{m}{2eU}} \cdot \left[ R \sqrt{1 - \frac{r}{R}} + \frac{r}{2} \ln \left( \frac{2R}{r} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{r}{R}} \right) - 1 \right) \right].$$

Wegen  $R \gg r$  ergibt sich einfach

$$t = R \sqrt{\frac{m}{2eU}},$$

d. h. wegen der Konzentration des Feldes an der Spitze darf man so rechnen, als erfolgte die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit entsprechend der durchfallenden Spannung  $U$ . Die tangentiale Komponente der Geschwindigkeit beträgt

$$v_y = \sqrt{\frac{2\varepsilon e}{m}}.$$

Das schief emittierte Elektron hat sich nach der Flugzeit  $t$  um den Betrag  $r_v \cdot t$  von der Auftreffstelle eines genau radial emittierten Elektrons entfernt. Für den auf dem Leuchtschirm gemessenen Streukreisdurchmesser  $D$  ergibt sich der doppelte Wert

$$D = 2 R \sqrt{\frac{\varepsilon}{U}}, \quad (1)$$

dem objektseitig unter Berücksichtigung der Vergrößerung  $\beta = R/r$  ein von der Geschwindigkeitsverteilung bestimmter Durchmesser von

$$d_G = 2 r \sqrt{\frac{\varepsilon}{U}} \quad (2)$$

entspricht.

Die Annahme eines kugelsymmetrischen Feldes bedeutet jedoch nur eine erste Annäherung. Eine bessere Darstellung der wirklichen Feldverhältnisse könnte durch die Betrachtung des Elektroden systems als Hälfte eines zweischaligen Hyperboloids mit der Symmetrieebene als Anode erhalten werden. Leider führt aber die Berechnung der Elektronenbahn auf ein nicht elementar bestimmbares Integral. Die Abweichung vom Kugelfeld kann man jedoch summarisch dadurch berücksichtigen, daß man einen Faktor  $p$  einführt, um den der Elektronenkegel zusammengeschnürt wird. Dieser Faktor ist empirisch leicht zu ermitteln, indem man z. B. den Winkelabstand zwischen der (011)- und der (121)-Richtung ausmißt, der in Wirklichkeit  $90^\circ$ , auf dem Leuchtschirm aber nur etwa  $20^\circ$  beträgt. Man erhält also  $p = 1,5$ . Für den Streukreisdurchmesser  $D$  ergibt sich dann

$$D = \frac{2 R}{p} \sqrt{\frac{\varepsilon}{U}}, \quad (3)$$

während (2) wegen  $\beta = \frac{R}{r p}$  erhalten bleibt.

Bei der Betrachtung der das Auflösungsvermögen bestimmenden Gleichung (2) ist zu beachten, daß zwischen  $r$  und  $U$  für eine bestimmte Kathodenoberfläche und eine gegebene geometrische Elektrodenanordnung eine feste Beziehung besteht, die durch das Emissionsgesetz hergestellt wird. Der submikroskopische Krümmungsradius der Kathodenspitze kann aus der für eine bestimmte Emission erforderlichen Anodenspannung unter Zugrundelegung der theoretischen Emissionsgleichung<sup>1)</sup>

$$i = \frac{1,5 \cdot 10^{-6} F^2}{\varphi} \cdot e - \frac{6,85 \cdot 10^7 \varphi^{3/2}}{F} \cdot \psi \left( \frac{3,62 \cdot 10^{-4} F^{1/2}}{\varphi} \right) \quad (4)$$

<sup>1)</sup> A. Sommerfeld u. H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV/2, S. 441, 1933.



[ $\varphi$  = Austrittsarbeit,  $\psi(q, F)$  eine tabellarisch gegebene Bildkraftkorrektur] für eine gegebene geometrische Anordnung der Elektroden mit ausreichender Genauigkeit wenigstens näherungsweise errechnet werden. Dazu wurde die Emissionsgleichung für eine vorgegebene Austrittsarbeit vereinfacht zu

$$i = A F^2 \cdot e^{-\frac{B}{F}}, \quad (5)$$

was praktisch nur einen sehr geringen Fehler ergibt. Als emittierende Fläche wird die Halbkugel der Spitze von der Größe  $2\pi r^2$  angesehen, während der durch die geometrischen Verhältnisse gegebene Zusammenhang zwischen der angelegten Anodenspannung  $U$  und der Feldstärke  $F$  durch

$$F = \frac{2U}{r \ln \frac{a}{r}} \quad (6)$$

dargestellt wird, wenn die Spitze zu einem Rotationshyperboloid und die Anode zu einer ebenen Platte im Abstand  $a/4$  idealisiert wird. Durch Umformen von (5) und (6) und Übergang zu Briggschen Logarithmen erhält man den gesuchten Krümmungsradius der Spitze als Funktion der Anodenspannung  $U$  bei einer bestimmten Stromstärke zu

$$r = \frac{2U (\lg 2\pi A - \lg I + 2 \lg 2U - 2 \lg 2,3 (\lg a - \lg r))}{2,3 B (\lg a - \lg r)}. \quad (7)$$

Diese Beziehung ist für die praktische Berechnung gut brauchbar, da man für den rechts nur als Logarithmus vorkommenden Radius  $r$  einen Näherungswert einsetzen kann, wobei das Verfahren bei Wiederholung mit dem verbesserten Wert von  $r$  schnell konvergiert. In Fig. 1 ist der Spitzenradius als Funktion der an das Feldelektronenmikroskop für  $I = 10^{-5}$  Amp. Emission anzulegenden Anodenspannung für verschiedene Austrittsarbeiten in logarithmischen Koordinaten dargestellt. Für  $a$  wurde entsprechend den praktisch verwendeten Abmessungen des Elektronenmikroskops 10 cm eingesetzt. Die genaue Größe von  $a$  geht in das Resultat verhältnismäßig wenig ein, denn eine Variation von  $a$  um den Faktor 10 ändert den Radius nur um größenordnungsmäßig 2%. Erfreulicherweise läßt sich die Beziehung  $r = f(U)$  in der einfachen Form

$$r = \frac{0,85}{\varphi^2} \cdot U^{5/4} \quad (8)$$

sehr genau wiedergeben, wobei  $r$  in Ångström-Einheiten und  $U$  und  $\varphi$  in Volt gemessen werden.



Mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich der wahre objektseitige Durchmesser des durch die Geschwindigkeitsverteilung bedingten Streukreises aus (2) zu

$$d_G = \frac{1,70 \sqrt{e}}{\varphi^2} \cdot U^{3/4}. \quad (9)$$

Vergegenwärtigt man sich noch einmal die Voraussetzungen für die Ableitung von (9), so findet man, nachdem die praktische Gültigkeit der

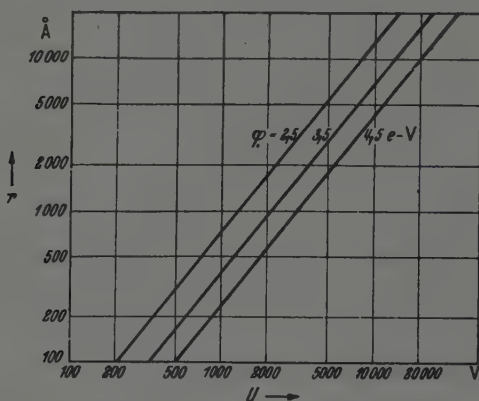


Fig. 1. Spitzenradius  $r$  bei der Anodenspannung  $U$  und  $10^{-8}$  Å Emission.

theoretischen Emissionsgleichung (4) durch Haefer<sup>1)</sup> nachgewiesen ist, nur noch eine Unsicherheit in dem durch (6) idealisierten Zusammenhang zwischen Anodenspannung  $U$  und Spitzenfeldstärke  $F$ . Da sich aber die größte Feldstärke in der Nähe der Spitze konzentriert, ist die Abweichung in dem wirklichen Feldelektronenmikroskop nur sehr unbedeutend und ist insbesondere auch nur wenig von den speziellen Abmessungen und Gestaltungen der Versuchsröhre abhängig. Ein Fehler von einigen 10% ist schließlich für die Bestimmung des Auflösungsvermögens völlig belanglos, zumal noch ein im folgenden zu betrachtender sehr unsicherer Faktor hinzukommt.

Bisher wurde die Beugung der Elektronenwellen noch vernachlässigt. Ihre Berücksichtigung bereitet insofern Schwierigkeiten, als für eine genauere Behandlung die Feinstruktur der emittierenden Oberfläche zu betrachten wäre, also insbesondere die Gestalt der Oberfläche an den Stellen, an denen die Emission infolge der Adsorption einzelner Atome oder Ionen besonders stark ist. Man kann aber zur Abschätzung des Einflusses der Beugung das

<sup>1)</sup> R. Haefer, ZS. f. Phys., 116, 604, 1940.

emittierende Objekt als Öffnung vom Durchmesser  $d$  betrachten, durch den ein Elektronenstrahl aus dem Innern der Kathode heraustritt. Nach dem Schema der Fig. 2 gilt als Interferenzbedingung bis auf einen Faktor der Größenordnung 1

$$\sin \alpha = \frac{\lambda}{2d} = \frac{D}{2R},$$

wobei  $D$  diesmal der durch die Beugung bestimmte Bilddurchmesser ist. Durch die geometrische Projektion wird ein Objekt  $d$  in der Größe  $D = \frac{Rd}{rp}$  abgebildet und man erhält durch Gleichsetzen der Bildgrößen

$$d_B^2 = pr\lambda,$$

wobei für  $\lambda$  die Elektronenwellenlänge nach der Beschleunigung durch die Anodenspannung  $U$  einzusetzen ist. Mit Hilfe der bekannten Beziehung  $\lambda = \sqrt{150/U}$  und (8) erhält man den durch die Beugung bedingten scheinbaren Objektdurchmesser

$$d_B = \frac{3,95}{\varphi} U^{3/4} \quad (10)$$

in Ångström-Einheiten gemessen.

Der das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops bestimmende Streukreisdurchmesser setzt sich aus dem durch die Breite der Geschwindigkeitsverteilung und dem durch die Beugung gegebenen Durchmesser geometrisch zusammen. Als objektseitigen Streukreisdurchmesser erhält man damit aus (9) und (10)

$$d = \sqrt{d_G^2 + d_B^2} = \frac{U^{3/4}}{\varphi^2} \sqrt{2,89 \varepsilon + 15,5 \frac{\varphi^2}{U^{3/4}}}. \quad (11)$$

Die Nachprüfung der vorstehenden Berechnungen erfolgt am besten durch Ausmessen des bildseitigen Streukreisdurchmessers

$$D = \beta d = \frac{Rd}{rp} = \frac{0,78 R}{U^{1/2}} \sqrt{2,89 \varepsilon + 15,5 \frac{\varphi^2}{U^{3/4}}} \quad (12)$$

als Funktion der Anodenspannung bei Kathoden mit verschiedenen Krümmungsradien. Läßt man das zweite Glied unter der Wurzel weg, so erhält man den allein durch die Geschwindigkeitsverteilung bedingten Streukreisdurchmesser. In der Darstellung  $D = f(U^{-1/2})$  ergibt dies eine Gerade, während die Berücksichtigung der Beugung besonders bei kleinen Anodenspannungen bzw. kleinen Krümmungsradien der Spitze eine merkliche Vergrößerung

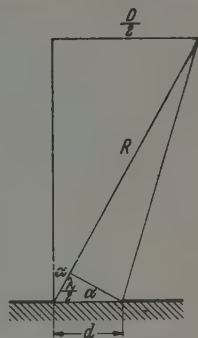


Fig. 2.  
Schema zur Beugung.

des Zerstreuungskreises zur Folge hat. Die in Fig. 3 eingezeichneten Meßpunkte wurden durch Auswertung einer Reihe von älteren, zum Teil schon veröffentlichten Aufnahmen von Wolframspitzen gewonnen. Dazu mußte auf  $R = 10$  cm reduziert werden, soweit der Abstand Spitze—Leuchtschirm eine andere Größe hatte, und es wurden Aufnahmen ausgewählt, bei denen einzelne helle Punkte von adsorbierten Atomen eine besonders genaue Aus-

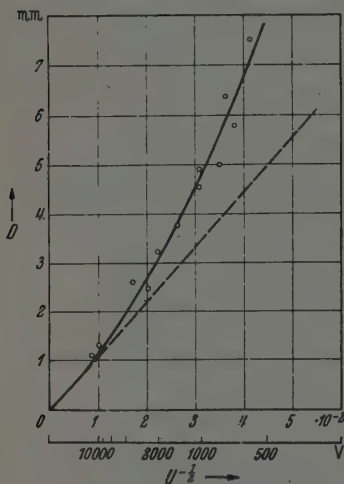


Fig. 3. Berechneter Streukreisdurchmesser (ausgezogene Kurve) sowie Meßpunkte von verschiedenen Kathodenspitzen.

messung gestatteten. Dabei wurde der Mittelwert aus Messungen an mindestens zehn Bildpunkten auf jeder Aufnahme gebildet. Die Anodenspannungen lagen entsprechend den sehr verschiedenen Krümmungsradien der Spitze zwischen 570 und 13200 Volt. Wie man sieht, wird die Lage der Meßpunkte von der unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Geschwindigkeitsverteilung und der Beugung abgeleiteten Kurve sehr gut wiedergegeben. Wäre die Beugung zu vernachlässigen, so müßten die Punkte auf der gestrichelten Geraden liegen. Bei der Berechnung der theoretischen Kurve wurde die effektive Breite der Geschwindigkeitsverteilung zu  $\varepsilon = 0,7$  V angenommen. Die Übereinstimmung

zwischen Messung und Berechnung gibt zugleich eine schöne Bestätigung der in der vorangehenden Arbeit gemessenen Breite der Geschwindigkeitsverteilung, nach der etwa 90% aller Elektronen innerhalb eines Geschwindigkeitsbereiches von 0,7 Volt ausgesandt werden.

Das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops wird durch den objektseitigen Durchmesser des Zerstreuungskreises bestimmt, der in Fig. 4 nach (11) für drei verschiedene Austrittsarbeiten dargestellt ist. Die Abweichung der Kurven von Geraden mit dem Anstieg  $3/4$  bei kleineren Spannungen ist durch die Beugung verursacht. Definiert man das Auflösungsvermögen als den kleinsten Abstand zweier noch als getrennt erkennbarer Objektpunkte, so kann man erfahrungsgemäß dafür etwa das 0,6- bis 0,7fache des Streukreisdurchmessers annehmen.

Um das höchstmögliche Auflösungsvermögen zu erzielen, kommt es also darauf an, Kathodenspitzen mit recht kleinem Radius zu verwenden. Spitzen aus Wolfram, Molybdän und Tantal lassen sich durch Ätzen und

nachfolgendes Glühen etwa bis zu  $r = 500 \text{ \AA}$  entsprechend  $U$  etwa 2000 Volt herab herstellen, womit ein Auflösungsvermögen von  $15 \text{ \AA}$  erreichbar ist. Eine weitere Verfeinerung der Spitze ist entweder durch oberflächliches Oxydieren und Abdampfen der Oxydschicht<sup>1)</sup> oder durch Ionenbombardement<sup>2)3)</sup> möglich. Besonders das letztgenannte Verfahren ist bequem, wenn man zur Zerstäubung der Spitze die Entladung mit einem Emissionsstrom von  $10^{-5}$  bis  $10^{-7}$  Amp. in Quecksilberdampf von  $10^{-4}$  bis  $10^{-3}$  Torr betreibt, was man praktisch bei Verwendung einer Quecksilberdampfpumpe

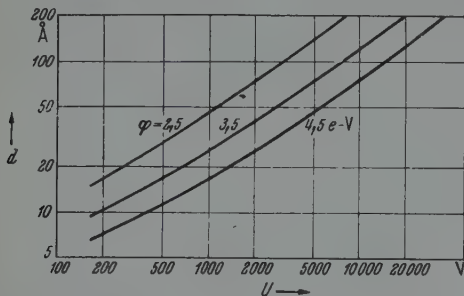


Fig. 4. Objektseitiger Durchmesser der Bildpunkte als Funktion der Anodenspannung.

durch Wegnahme der flüssigen Luft von der Kühlfalle erreicht. Man erhält damit an Spitzen mit anfänglichen Radien von vielleicht  $1000 \text{ \AA}$  in wenigen Minuten derartig kleine Krümmungsradien, daß zur Emission einige hundert Volt Anodenspannung ausreichen. Das mit den feinsten Kathodenspitzen erreichbare Auflösungsvermögen liegt dann bei  $10 \text{ \AA}$ , wie schon vor längerer Zeit erkannt wurde<sup>1)</sup>.

Als Testobjekt für das Auflösungsvermögen eignet sich ein dünner Film aus adsorbierten Ionen, etwa von Barium. Geht man von einer monoatomaren Adsorptionsschicht geringster Austrittsarbeit aus und läßt das Barium durch Erhitzen der Spitze langsam verdampfen, so bemerkt man von einem bestimmten geringen Bedeckungsgrad an die Auflösung der vorher homogen emittierenden Schicht in einzelne Punkte vom Durchmesser des Streukreises. Fig. 5 zeigt zunächst das Bild einer reinen Wolframspitze, die bei 3500 Volt  $10^{-5}$  Amp. emittiert. Der Abstand Spitze—Leuchtschirm beträgt bei der in etwa  $2/3$  der Originalgröße wiedergegebenen Aufnahme  $R = 70 \text{ mm}$ . Der Spitzenradius ist nach Fig. 1 etwa  $1120 \text{ \AA}$ , die Vergrößerung ergibt sich im Original zu 420 000 fach, und der Abbildungsmaßstab wird in der Wiedergabe damit  $1 \text{ mm} = 35 \text{ \AA}$ . In Fig. 6 ist diese Spitze mit Barium bedeckt

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. Phys. **108**, 668, 1938. — <sup>2)</sup> R. Haefer, ebenda **116**, 604, 1940. — <sup>3)</sup> E. W. Müller, ebenda **106**, 132, 1937.

und emittiert bei 2800 Volt Anodenspannung, wobei nach Fig. 4 unter Berücksichtigung der erniedrigten Austrittsarbeit der Streukreisdurch-

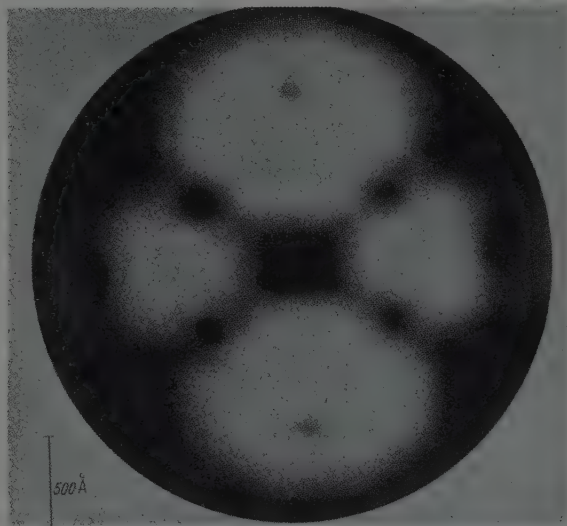


Fig. 5. Elektronenbild einer reinen Wolframkathode.

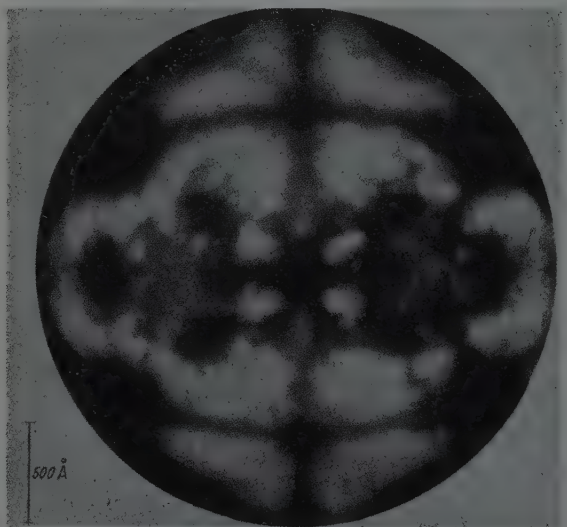


Fig. 6. Dieselbe Kathode wie in Fig. 5 mit Barium bedeckt.

messer  $40 \text{ \AA}$  beträgt und daher ein Auflösungsvermögen von  $25 \text{ \AA}$  erwartet werden kann. Aus der Steilheit der Stromspannungskennlinie ergibt

sich nach dem  $q^{3/2}$ -Gesetz eine mittlere Austrittsarbeit von 3,8 e-Volt bzw. ein Bedeckungsgrad von  $\Theta = 0,15 \Theta_m$  nach den glühelektrischen Messungen Beckers<sup>1)</sup>. Die absolute Zahl der auf der Flächeneinheit adsorbierten Bariumionen bzw. -atome ist nicht genau bekannt. De Boer<sup>2)</sup> berechnet für den Bedeckungsgrad geringster Austrittsarbeit  $\Theta_m$  die Zahl von  $1,03 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-2}$ . Für  $\Theta/\Theta_m = 0,15$  ergibt sich daraus unter der Annahme, daß sich die Ionen infolge der gegenseitigen Abstoßung möglichst weit voneinander zu entfernen suchen und sich in einem Netz aus gleichseitigen Dreiecken anordnen, eine Gitterkonstante von 27 Å. In Fig. 6

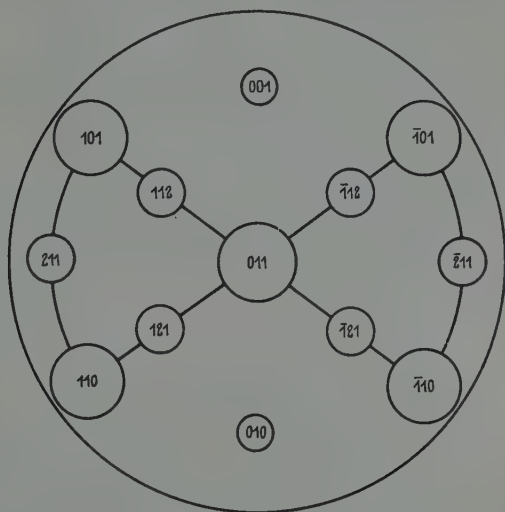


Fig. 7. Kristallographische Indizierung der ausgezeichneten Richtungen in Fig. 5 und 6.

ist tatsächlich der Beginn der Auflösung auf den dicht mit Barium besetzten, stark emittierenden Gebieten in der Umgebung der Würfelflächen deutlich zu sehen. Dazu ist noch zu bemerken, daß die visuelle Beobachtung den Effekt noch viel besser erkennen läßt als die hier wiedergegebene Aufnahme. Besonders deutlich sieht man den Beginn der Auflösung des Films bei der Erhitzung der Kathode auf Temperaturen von etwa 700 bis 900° K, wenn sich die Beweglichkeit der adsorbierten Ionen bemerkbar macht. Vor der Aufnahme von Fig. 6 wurde von dem Bariumfilm der mittlere Teil in der Umgebung von (011) durch eine kurzzeitig angelegte positive Feldstärke von  $72 \cdot 10^6 \text{ Volt/cm}$  abgerissen<sup>3)</sup>. Die Dichte des Films in der Umgebung

<sup>1)</sup> I. A. Becker, Trans. Farad. Soc. **28**, 151, 1932. — <sup>2)</sup> H. J. de Boer, Elektronenemission und Adsorptionserscheinungen, S. 73. Leipzig 1937. — <sup>3)</sup> E. W. Müller, Naturwissensch. **29**, 533, 1941.



der Würfelflächen ist dadurch nicht beeinflusst. In dem mittleren Teil des Bildes in der Nähe von (111) sind noch einzelne Ionen sichtbar, von denen sich einige in einem deutlich aufgelösten Abstand von etwa  $30 \text{ \AA}$  voneinander befinden. Zur Orientierung auf den Bildern Fig. 5 und 6 sind die wichtigsten kristallographischen Richtungen in Fig. 7 schematisch dargestellt.

Bei den feinsten durch Zerstäubung hergestellten Kathodenspitzen kann man über den Zustand der Oberfläche keine einwandfreie Aussage mehr machen. Die Oberfläche ist mit adsorbierten Fremdatomen bedeckt, so daß die Kristallstruktur der Spitze nur unvollkommen erkennbar wird. Sobald man durch Erhitzen der Kathode auf eine höhere Temperatur, als dem Einsatz der Oberflächenwanderung des Spitzenmetalls entspricht, die Oberfläche zu reinigen versucht, wächst der Krümmungsradius unter der Wirkung der Oberflächenspannung sogleich schnell an. Immerhin kann man sich bei Vergleichsversuchen an Spitzen mit größerem Radius durch Aufnahme der Stromspannungskennlinie Aufschlüsse über die Veränderung der Austrittsarbeit durch das zur Zerstäubung benutzte Gas verschaffen. Bei der Zerstäubung von Wolframspitzen mit Quecksilber ist nur ein geringer Einfluß vorhanden. Fig. 8 und 9 sind Bilder von besonders feinen Wolframspitzen, die nach einer Kathodenzerstäubung in Quecksilberdampf schon bei 790 bzw. 540 Volt  $10^{-5}$  Amp. emittierten. Die Daten für Fig. 8 sind folgende: Spitzenradius  $r = 180 \text{ \AA}$ , Leuchtschirmradius  $R = 33 \text{ mm}$ , Lateralvergrößerung  $1,2 \cdot 10^6$  fach, Streukreisdurchmesser im Objekt  $d = 15 \text{ \AA}$ . Die Struktur des Wolframkristalls ist noch deutlich zu erkennen. Jedoch erscheinen die Bildflecke zum Teil größer als dem Streukreisdurchmesser entspricht, da einige von ihnen während der Belichtungszeit von 20 sec infolge von Oberflächenwanderung oder Ionenaufprall ihren Ort etwas veränderten. Dasselbe gilt für Fig. 9, bei der die Kristallstruktur der Unterlage nur noch unvollkommen erkennbar ist. Hier beträgt bei der Anodenspannung von 540 Volt der Spitzenradius nur noch  $110 \text{ \AA}$ , die Lateralvergrößerung ist  $2 \cdot 10^6$  fach, der Streukreisdurchmesser  $12 \text{ \AA}$ . Bei den kleinen Anodenspannungen ist die Helligkeit des Leuchtschirmbildes schon recht gering, so daß man im Interesse kurzer Belichtungszeiten zur Aufnahme eine Optik großer Lichtstärke braucht, deren geringe Tiefenschärfe einen möglichst wenig gewölbten Leuchtschirm erfordert. Aus diesem Grunde ist die ursprüngliche kugelige Form des Feldelektronenmikroskops<sup>1)</sup>, die zwar einen größeren Bildwinkel erfaßt, aber infolge der Wiederholung der Einzelheiten mit der Gittersymmetrie nichts Neues bringt, weniger zweck-

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. techn. Phys. 17, 412, 1936.

mäßig als die Röhre mit flachem Leuchtschirm in der Form der Braunschen Röhren, die für alle vorliegenden Aufnahmen verwendet wurde<sup>1)</sup>).

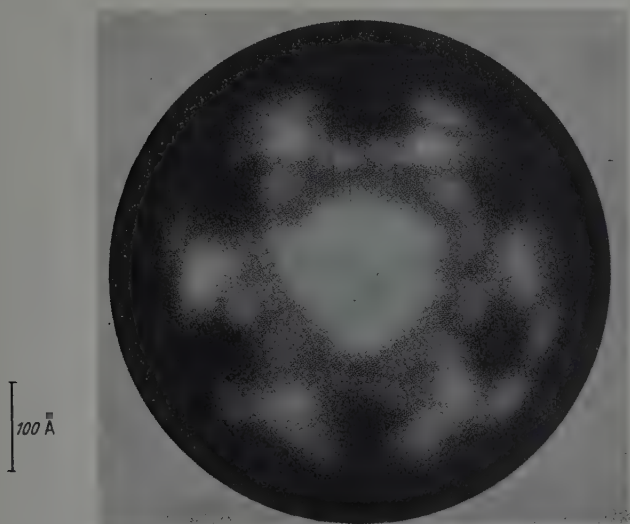


Fig. 8. Wolframkathode mit einem Radius von 180 Å.

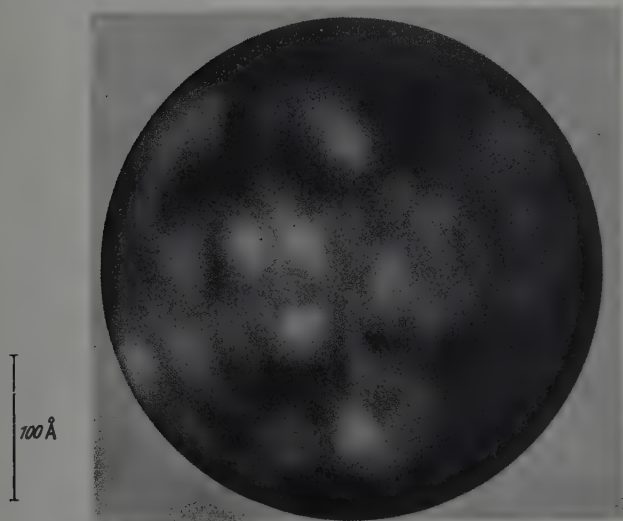


Fig. 9. Wolframkathode mit einem Radius von 110 Å.

<sup>1)</sup> E. W. Müller, ZS. f. Phys. 106, 541, 1937 und 108, 668, 1938.

Es erhebt sich schließlich die Frage, ob es praktisch möglich ist, durch Herstellung einer feineren Kathodenspitze das Auflösungsvermögen bis zur Sichtbarmachung der Gitterstruktur zu steigern. Nach den vorangehenden Überlegungen brauchte man dazu Spitzen mit Krümmungsradien von 20 bis 30 Å, wobei der Streukreisdurchmesser etwa 5 Å sein würde. Es ist aber zu bezweifeln, ob die unter der Annahme einer kugelig glatten Spitzenkalotte abgeleiteten Beziehungen hier noch Gültigkeit haben, wenn die bei der Kathodenzerstäubung entstehenden Unregelmäßigkeiten der Oberflächengestalt mit dem Krümmungsradius in eine vergleichbare Größenordnung kommen. Schon die Spitze der Fig. 9 besitzt bei 110 Å Radius keine sehr regelmäßige Form mehr. Es wäre zu versuchen, ob nicht durch vorsichtiges Aufdampfen von Wolfram die Unregelmäßigkeiten der Oberflächen aufgefüllt werden können, ohne den Radius wesentlich zu vergrößern. Die experimentellen Schwierigkeiten sind wegen der Empfindlichkeit derartig feiner Spitzen nicht gering, doch scheint die Sichtbarmachung der Gitterstruktur nicht unmöglich zu sein. Ein gitterähnliches Bild darf man allerdings schon deshalb nicht erwarten, weil die atomare Feinstruktur der idealen Kristallkugel von gleicher oder kleinerer Größenordnung ist als die Dicke des die Feldemission bestimmenden Potentialwalles.

*Berlin, Laboratorium der Stabilovolt G. m. b. H., Januar 1942.*

---

## Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente.

Von G. Haenzel in Karlsruhe.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 8. Oktober 1942.)

Die bisherigen Anordnungen des periodischen Systems der Elemente werden durch eine elementargeometrisch konstruierte Fläche ersetzt, auf der die Elemente einem System charakteristischer Punkte entsprechen. Ihre für das periodische System wesentlichen Eigenschaften kommen dann vereinigt mit Ergebnissen der Wellenmechanik einheitlich in der Topologie der Fläche zum Ausdruck.

Die bisherigen Darstellungen des periodischen Systems der Elemente in wagerechten und lotrechten Zeilen und Spalten (Meyer-Mendeleejeff) oder mit Verbindungslinien zwischen verwandten Elementen entsprechen der jetzigen Einsicht in die Systematik der Elemente nicht mehr, weil sie den Ergebnissen der Wellenmechanik und deren Folgerungen für die Chemie und Physik nicht ausreichend gerecht werden.

Ausgehend von einer elementargeometrischen Konfiguration von konzentrischen regulären Polygonen erhält man eine mehrblättrige Fläche, auf der sich diese Polygone mit ungerade zunehmender Eckenzahl so ausbreiten, daß jedes Polygon dem Umkreise des vorhergehenden umschrieben ist. Diese Fläche, die somit ihre Entstehung aus einem der ersten Objekte der Geometrie herleitet, erweist sich als der geeignete Träger des Systems der chemischen Elemente, weil ihre Struktur und Topologie den das System beherrschenden Theoremen völlig angepaßt ist.

Die Erzeugung und Anwendung des entstandenen „Modells“ bedarf nur der Elementargeometrie. Die Untersuchung der Flächenstruktur deckt jedoch die Beziehungen zur Schrödingerschen und zur Diracschen Theorie auf, die hier nur angedeutet werden. Sie sind es, auf denen die Stärke des Modells beruht. Nach einer anderen Seite hin zeigt die Theorie der Fläche, über eine meromorphe Funktion hinweg, Beziehungen zur Zahlentheorie.

### *I. Die Polygonfläche und die Funktion $P(z)$ .*

1. Ein gleichseitiges Dreieck sei dem Kreise vom Halbmesser 1 umschrieben, seinem Umkreise ein Quadrat (Fig. 1), dem Umkreis des

Quadrats ein gleichseitiges Fünfeck usf. Die entstehende Schar von  $\infty^1$  konzentrischen gleichseitigen Polygonen steigender Eckenzahl mit ihren In- und Umkreisen soll die „äußere Schar konzentrischer Vielecke“ heißen. Trägt der Einheitskreis die Nr. 1, so ist der  $r$ -te Kreis einem  $(r+1)$ -Eck umbeschrieben ( $r > 1$ ) und einem  $(r+2)$ -Eck eingeschrieben. Sein Halbmesser ist

$$r_r = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdots \cos \frac{\pi}{r+1}}. \quad (1)$$

Die Schar konvergiert gegen den Grenzkreis mit dem Halbmesser

$$R_u = \lim_{r \rightarrow \infty} r_r = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \approx 8,53 \dots \quad (2)$$

Wird dagegen ein gleichseitiges Dreieck dem Einheitskreis eingeschrieben, seinem Inkreis ein Quadrat, dem Inkreis des letzteren ein gleichseitiges

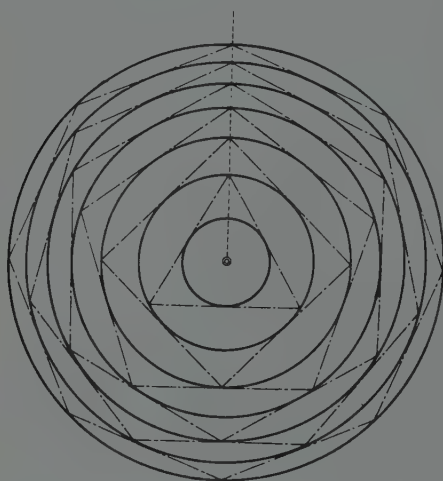


Fig. 1.

Fünfeck usf., so entsteht die „innere Schar konzentrischer Vielecke“ mit ihren In- und Umkreisen. Bei gleicher Numerierung des Einheitskreises ist der  $r$ -te Kreis einem  $(r+1)$ -Eck eingeschrieben und einem  $(r+2)$ -Eck umbeschrieben. Sein Halbmesser ist:

$$r_r = \cos \pi/3 \cdot \cos \pi/4 \cdots \cos \pi/r + 1. \quad (1')$$

Diese „innere Schar konzentrischer Vielecke“ mit ihren In- und Umkreisen konvergiert<sup>1)</sup> gegen einen Grenzkreis vom Halbmesser

$$R_i = \lim_{v \rightarrow \infty} \bar{r}_v = \prod_{v=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{v+1} \approx 0,117 \dots \quad (2')$$

„Entsprechende (gleichnumerierte) Umkreise der äußeren und der inneren Schar konzentrischer Vielecke sind invers bezüglich des Einheitskreises, gleiches gilt von ihren Grenzkreisen.“

Statt der monoton steigenden Folge aller ganzen Zahlen kann irgendeine Reihe von Zahlen gegeben sein, nach der die konzentrischen Vielecke gemäß ihren Eckenzahlen aufeinander folgen, die Beziehung zwischen der äußeren und der inneren Schar bleibt erhalten, die Konvergenz ist im Einzelfalle zu prüfen.

2. Die äußere Schar konzentrischer Vielecke ungerader steigender Eckenzahl (Fig. 2) hat den Grenzkreishalbmesser:

$$R_a = - \prod_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2v+1}} \approx 8,70 \dots, \quad (3)$$

der zugehörige innere Grenzkreishalbmesser ist  $R_i \approx 0,27 \dots$ . Die Vielecke dieser Schar sollen durch Drehungen so orientiert werden, daß eine Ecke von jedem auf dem gleichen Halbstrahl  $g$  des Mittelpunktes liegt.

Eine Anzahl übereinanderliegender Ebenenblätter ist von unten nach oben mit  $n_1 = 1, 2, 3, \dots v, \dots$  numeriert (Fig. 2). Alle Blätter enthalten den Einheitskreis, dessen Gebiet mit  $n_2 = 0$  gekennzeichnet ist, und die Halbgerade  $g$ . Letztere wird als Richtung mit  $n_3 = 0$  bezeichnet. Der Einheitskreis des untersten Blattes  $n_1 = 1$  wird längs seines Randes abgeschnitten und an das darüberliegende Blatt  $n_1 = 2$  geheftet, so daß das Gebiet  $n_1 = 1, n_2 = 0$  nur unter Aufstieg in das Blatt  $n_1 = 2$  verlassen werden kann. In diesem Blatte ist dem Einheitskreis  $n_1 = 2, n_2 = 0$  ein gleichseitiges Dreieck umbeschrieben (mit einer Ecke auf  $g$ ). Das Kreisringgebiet zwischen dem Einheitskreis und dem Umkreise des Dreiecks heißt  $n_2 = 1$ . In ihm sind die drei Transversalen zu den Ecken durch  $n_3 = 0, \pm 1$  gekennzeichnet. Der Außenrand des Ringes  $n_2 = 1$  wird an die Ebene  $n_1 = 3$  geheftet. Diese enthält den Einheitskreis, den ersten Kreisring  $n_2 = 1$  mit den Dreieckstransversalen  $n_3 = 0, \pm 1$  und den zweiten

<sup>1)</sup> Bezüglich der Konvergenz siehe Nr. 4.



Kreisring  $n_2 = 2$  mit den Fünfecktransversalen  $n_3 = 0, \pm 1, \pm 2$ . Sie ist längs des Außenrandes von  $n_2 = 2$  mit der Ebene  $n_1 = 4$  verbunden usw.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Allgemein enthält das Blatt} \quad n_1 = r, \\ \text{die Kreisringe} \quad n_2 = 0, 1, 2, \dots, r-1. \\ \text{und in diesen die Transversalen} \quad n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (r-1). \end{array} \right\} \quad (4)$$

Jede Transversale auf der so entstandenen vielblättrigen Fläche ist durch drei Zahlen bestimmt, die den Bedingungen (4) genügen. Von ihnen gibt  $n_1$

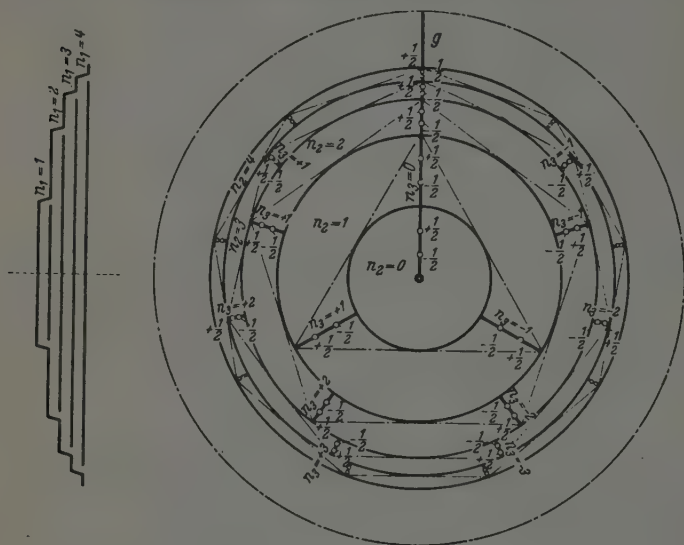


Fig. 2.

die Nummer des Blattes,  $n_2$  die Nummer des Ringes an, in dem die Transversale liegt,  $n_3$  diese selbst. Die konstruierte Fläche soll „Polygonfläche“ heißen.

3. Auf jeder Transversalenstrecke in den einzelnen Kreisringen werden nach Fig. 2 je zwei Punkte symmetrisch angenommen und durch die Zuteilung der vierten Zahlen  $n_4 = \pm 1/2$  voneinander unterschieden. Diese Punkte heißen die „Eigenwertpunkte“ der Polygonfläche, ihre Zahlenquadrupel die Eigenwerte. Das System der Eigenwertpunkte ist folgendermaßen auf der Fläche ausgebreitet: Im untersten Blatt  $n_1 = 1$  befinden sich die beiden Eigenwertpunkte:

$$\left. \begin{array}{l} n_1 = 1, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad n_4 = \pm 1/2, \\ \text{im zweiten Blatt die 8 Punkte} \\ n_1 = 2, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 0, \quad n_4 = \pm 1/2, \\ n_2 = 1, \quad n_3 = 0, \quad \pm 1, \quad n_4 = \pm 1/2, \end{array} \right\} \quad (5)$$

im dritten Blatte 18 Punkte. Allgemein enthält das Flächenblatt  $n_1 = v$   $2 \cdot v^2$  Eigenwertpunkte.

41). Ein unendliches Produkt von der Form  $\prod_{v=1}^{\infty} \cos x_v$  ist konvergent, wenn  $\sum_{v=1}^{\infty} |x_v|^2$  konvergiert. Die Funktion

$$w = f(z) = - \prod_{v=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{2^v - 1} \quad (6)$$

konvergiert daher für jedes endliche  $z$ . Es ist

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = - \frac{\pi}{2} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{2^v - 1} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{z}{2^v - 1} \quad (7)$$

und  $f(z)$  erweist sich mit Hilfe des Weierstraßschen Doppelreihensatzes als eine ganze Funktion. Ihre Nullstellen liegen in den ungeraden, positiven und negativen, reellen Zahlen. Der erste Faktor des unendlichen Produktes verschwindet in den ungeraden Zahlen, der zweite in den dreifachen Werten, der dritte in den fünffachen Werten aller ungeraden Zahlen usw., so daß folgende Zahlentafel über die Vielfachheit der Nullstellen Auskunft gibt:

Nummer des Faktors	Nullstellen in										
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21...
2	3	9	15	21	27	33	39	45	51...		
3	5	15	25	35	45	55	65...				
4	7	21	35	49	63...						
5	9	27	45...								
6	11...										

Ist eine (ungerade) Zahl Nullstelle von  $t$  Faktoren, so muß  $z$  an  $t$  Stellen der Tabelle enthalten sein und umgekehrt. Da alle Faktoren nur einfache Nullstellen haben, entscheidet sich die Multiplizität einer (ungeraden) Zahl  $z$  mittels ihrer kanonischen Darstellung als Produkt von Primzahlenpotenzen  $p_i^{n_i}$

$$z = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m} \quad (8)$$

Ist zunächst  $m = 1$ , so enthält die Tabelle die Zahl  $z = p_1^{n_1}$  je einmal in den  $n_1 + 1$  Zeilen, die mit  $p_1^0, p_1^1, \dots, p_1^{n_1}$  beginnen. Für  $m > 1$  folgt:

„Eine gegebene ungerade Zahl  $z$  ist Nullstelle von

$$(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_m + 1) = t(z) \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Nr. 4 und 5 können für die physikalische Anwendung überschlagen werden.

Faktoren des unendlichen Produktes  $-\prod_{i=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{2^{v_i}-1}$ , worn die  $n_i$  die Primzahlexponenten von  $z$  sind. Die Anzahl der in einer Nullstelle  $z$  verschwindenden Faktoren ist also die zahlentheoretische Teileranzahl  $t(z)$  von  $z$ .

Der Weierstraßsche Produktsatz gestattet die Aufstellung derjenigen Funktionen, die in den ungeraden Zahlen  $z$  Nullstellen der Ordnungen  $t(z)$  haben. Mit  $z_v = 2^v - 1$ , Gewicht der Nullstelle  $\alpha_v = t(2^v - 1)$  und konvergenzerzeugenden Exponenten  $k_v = t(2^v - 1) + v$  ergibt sich

$$G(z) = e^{k(z)} \prod \left[ \left( 1 - \frac{z}{2^{v_i}-1} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{\frac{z}{2^{v_i}-1} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{2^{v_i}-1} \right)^2 + \dots + \frac{1}{t(2^{v_i}-1) + v_i - 1} \left( \frac{z}{2^{v_i}-1} \right)^{t(2^{v_i}-1) + v_i - 1}} \right]$$

Wird nun das reziproke Produkt

$$w = P(z) = - \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{z}{2^{v_i}-1}} \quad (10)$$

betrachtet und als Ordnung eines Poles die Anzahl seiner an dieser Stelle unbegrenzt wachsenden Faktoren bezeichnet, so ergeben sich folgende Theoreme:

„Die Funktion  $P(z)$  ist eine meromorphe Funktion mit Polen in den reellen ungeraden Zahlen  $z$ . Die Polordnung ist die zahlentheoretische Teileranzahl  $t(z)$ , die beiden einzigen Pole erster Ordnung liegen in  $\pm 1$ . Die positiven und negativen Primzahlen sind die Pole zweiter Ordnung, ihre positiven und negativen Quadrate die Pole dritter Ordnung. Die Pole, deren Ordnungen die Primzahlen  $1, 2, 3, 5, \dots, p_\lambda$  sind, liegen bzw. in den Punkten

$$\pm p^0, p^1, p^2, p^4, \dots, p^{p_\lambda - 1},$$

wo  $p$  jede Primzahl ( $\neq 2$ ) ist. Zu jeder Polordnung  $g$  gibt es einen größten Kreis um den Anfangspunkt, dessen Inneres frei von Polen der Ordnung  $g$  ist und dessen Radius durch die kleinste ungerade Zahl mit der Teileranzahl  $g$  gegeben ist. Ist wiederum  $g$  eine Primzahl  $p$ , so enthält der Kreis vom Radius  $3^{p-1}$  keine Pole der Ordnung  $p$ , zwei liegen auf dem Rande, die übrigen außen.“

5. Hängt die Funktion  $P(z)$  aufs engste mit der Theorie der Primzahlen zusammen, so ist sie geometrisch mit der in Nr. 1 bis 2 konstruierten Polygonfläche nahe verwandt, denn durch Vergleich mit jenen Ausführungen erhält man:

„Die Blätter  $n_1 = 1, 2, \dots, \lambda, \dots$  der Polygonfläche entsprechen den Teilprodukten der meromorphen Funktion  $P(z)$ . Der Radius jedes Flächenblattes ist gleich dem Werte des entsprechenden Teilproduktes an der Stelle

$z = 2$ . Der Grenzkreishalbmesser  $R_a$  [Gleichung (3) in Nr. 2] ist der Funktionswert  $P(2)$ .“

Wird beim Aufbau der Polygonfläche an Stelle der äußeren Schar konzentrischer Vielecke ungerader Eckenzahl die innere (reziproke) Schar verwendet, so ist die meromorphe Funktion  $P(z)$  durch die ganze Funktion  $f(z)$  [Gleichung (6)] zu ersetzen.

## II. Das Einelektronensystem.

### Die Polygonfläche als Eigenwertfläche und Modell.

#### 6. Die Schrödinger-Gleichung des Einelektronensystems<sup>1)</sup>

$$\Delta \psi + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} (E - U) \psi = 0 \quad (11)$$

lautet mit der potentiellen Energie  $U = -\frac{e^2}{r}$  in räumlichen Polarkoordinaten  $r, \vartheta, \varphi$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{r} \right) \psi = 0. \quad (12)$$

Die übliche Lösung mit Hilfe des Produktansatzes  $\psi = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \Phi(\varphi)$  führt mittels Kugelflächenfunktionen  $P_l^m \cdot e^{im\varphi}$   $l$ -ter Ordnung und Laguerrescher Polynome  $w_p$   $p$ -ten Grades auf die Eigenfunktionen

$$\left. \begin{aligned} \psi &= e^{-\varrho/2} \cdot \varrho^l \cdot w_{n-l-1}(\varrho) P_l^m(\cos \vartheta) \cdot \cos^m \varphi, \\ \left( \varrho = \frac{2r}{r_0}, \quad n > 0 \text{ ganz} \right), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

wo an die Stelle von  $\cos m\varphi$  auch  $\sin m\varphi$  treten kann. Die Diskussion der bekannten drei Eigenwertreihen

$$E_n = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2 n^2} = -\frac{Ry \cdot h}{n^2}, \quad l(l+1), m$$

liefert die drei Reihen ganzer Quantenzahlen  $n_1 = n, n_2 = l, n_3 = m$  mit den Bedingungen:

$$\begin{aligned} n_1 &= 1, 2, 3, \dots, v, \dots, \\ n_2 &= 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1, \\ n_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n_1 - 1). \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Es bezeichnet  $m_0$  die Ruhemasse des Elektrons,  $e$  seine Ladung,  $z$  die Kernladungszahl,  $h$  das Wirkungsquantum,  $Ry$  die Rydberg-Konstante,  $\alpha = 2\pi e^2/hc$  die Feinstrukturkonstante,  $E$  die kinetische und  $U$  die potentielle Energie,  $r$  Elektronenabstand.

Zufolge der Gleichungen (4) sind die Transversalen der in I konstruierten Polygonfläche den zulässigen Eigenwerttripeln der Wellengleichung (12) umkehrbar eindeutig zugeordnet und damit den Eigenfunktionen (13). Folgende Aussagen über die Wellengleichung und die Polygonfläche sind gleichwertig:

Bei gegebenem erstem Eigenwert $n_1$ läuft $n_2 = l$ von 0 bis $n_1 - 1$ und zu jedem $l$ gibt es $2l + 1$ Kugelflächenfunktionen, so daß zum Wert $n_1$ je $\sum_{l=0}^{n_1-1} (2l + 1) = n_1^2$ zulässige Eigenfunktionen gehören.	Das gegebene Flächenblatt $n_1$ enthält die Ringe $n_2 = 0$ bis $n_2 = n_1 - 1$ und in jedem Ringe Nr. $l$ liegen $2l + 1$ Transversalen, so daß die Ebene $n_1$ je $\sum_{l=0}^{n_1-1} (2l + 1) = n_1^2$ Transversalen enthält.
--	--

Das Studium der Wellengleichung wird daher im folgenden durch die Topographie der Polygonfläche weitgehend ersetzt werden. Mit Rücksicht auf die Abbildung der Eigenwerte soll die Fläche auch als „Eigenwertfläche“ bezeichnet werden.

7. Als Modell des Einelektronensystems ist die Polygonfläche mit Energiestufen zu belegen, und zwar erhalten die einzelnen Blätter, Ringe, Transversalen und Eigenwertpunkte Energieniveaus, die durch die ihnen zukommenden Eigenwerte oder Quantenzahlen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  bedingt sind. Die verschiedenen Flächenblätter  $n_1 = 1, 2, 3, \dots$  tragen die Hauptenergiestufen

$$E_{n_1} = -\frac{2\pi^2 m_0 e^4 z^2}{h^2 n_1^2} = -\frac{z^2}{2 n_1^2} Ry [Erg], \quad (14)$$

so daß der Übergang aus einem höheren Blatte  $n_1$  in ein tieferes  $n_1'$  der Emission der Spektrallinie mit der Frequenz

$$\mu = \frac{2\pi^2 m_0 e^4}{h^2} \left( \frac{1}{n_1'^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad (15)$$

entspricht.

Nach der Diracschen Theorie beträgt die Energie des Einelektronensystems (vermindert um die Ruheenergie)

$$w = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 + \left( \frac{\alpha z}{n_1 - n_2 - 1 + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2 z^2}} \right)^2}} - m_0 c^2 \quad (16)$$

mit  $j = n_2 \pm \frac{1}{2} \equiv n_2 + n_4$  bei Gültigkeit des positiven oder negativen Wertes von  $n_4$  je nach der Einstellung des Spins. Die Entwicklung nach Potenzen von  $\alpha z$  ( $\alpha$  Feinstrukturkonstante,  $z$  Kernladungszahl) ergibt

$$w = -\frac{z^2}{2n_1^3} Ry - \frac{\alpha^2 z^4}{2n_1^3} Ry \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4(n_1 - n_2 - 1 + j + \frac{1}{2})} \right) - \dots \quad (17)$$

Das Diracsche Zusatzenergieniveau der rechten Seite ist daher auf die einzelnen Ringe ( $n_2$ ) und Eigenwertpunkte ( $n_4$ ) der Polygonfläche zusätzlich zu verlegen. Der bisher nicht benutzte Eigenwert  $n_3$ , die magnetische Quantenzahl, bedingt das Energieniveau

$$\Delta E_{n_3} = \frac{H e \hbar n_3}{4 \pi m_0 c} \quad (H \text{ magnetische Feldstärke}), \quad (18)$$

mit dem die Transversalenstrecken ( $n_3$ ) zusätzlich zu belegen sind. Damit ist das Niveauschema des Einelektronensystems auf der Fläche ausgebreitet, jeder Eigenwertpunkt besitzt ein bestimmtes Energieniveau. Mit Hilfe eines auf der Fläche beweglichen Punktes ergibt sich das Theorem:

*„Jeder Weg auf der Eigenwertfläche entspricht einem Energiesprung. Die physikalisch zulässigen Wege beginnen und enden in Eigenwertpunkten der Fläche. Nach den bekannten Auswahlregeln liegen Anfangspunkt und Endpunkt in zwei beliebigen verschiedenen Flächenblättern. Die Differenz ihrer Ringnummern muß  $\pm 1$  sein, die Differenz ihrer Transversalenummern 0 oder  $\pm 1$ .“*

Der Energiesprung ist von der Gestalt des Weges solange unabhängig, als nicht unterwegs weitere Eigenwertpunkte berührt werden. Enthält der Weg noch weitere Eigenwertpunkte, so handelt es sich um mehrere aneinander anschließende Sprünge.

8. Um ein Beispiel für diese Modellvorstellung zu geben, lasse man in einem Magnetfelde von der Feldstärke  $H$  (Gauß) die Flächenzahl  $n_3$  als magnetische Quantenzahl wirksam werden. Die Fläche liefert dann das Grundtheorem des normalen Zeeman-Effektes.

Unabhängig von der ersten Quantenzahl  $n_1$  spaltet ein Term der zweiten Quantenzahl  $n_2$  im magnetischen Felde in  $2n_2 + 1$  Terme auf. Das Aufspaltungsbild ist symmetrisch zur ungespaltenen Linie. Bekanntlich sind die zusätzlichen Energiewerte der magnetischen Quantenzahl  $m = n_3$

$$E_m = \frac{H e \hbar}{4 \pi m_0 c} \cdot m,$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n_2$  ( $e$  Ladung,  $m_0$  Masse). Die Auswahlregeln  $n_2 - n_2' = \pm 1$ ,  $n_3 - n_3' = 0, \pm 1$  ergeben sofort die zulässigen Wege.



Aus ihnen schließt man mittels  $\Delta\mu = Em/\hbar c$  auf die Aufspaltung der einzelnen Linie mit der Wellenzahl  $\mu$  in drei Linien mit den Zeeman-Verschiebungen

$$\Delta\mu = 0, \quad \pm \frac{eH}{4\pi m_0 c^2}.$$

Diese Betrachtungen gelten für Systeme, die außer dem Kern und einem äußeren Elektron abgeschlossene Schalen von Rumpfelektronen enthalten. Sie besitzen ein nur vom äußeren Elektron herrührendes Drehimpulsmoment  $n_2 \cdot \frac{\hbar}{2\pi}$ , wo  $n_2$  die Ringnummer auf der Fläche ist, d. h.  $n_2 = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1$ . Der Wert  $n_2 = 0$  ist nach dem früheren Bohrschen Modell nicht zu verstehen, da es sich dabei um eine Bahn ohne Drehimpuls, also um eine Pendelbahn durch den Kern handeln würde. Auf der Eigenwertfläche als Modell fällt dieser Widerspruch fort.

### III. Das System der Elemente auf der Polygonfläche.

9. Das gesamte System von vier Eigenwerten bzw. vier Quantenzahlen ist damit auf der Fläche ausgebreitet. Die ideale Zahlenfolge der Quantenzahlen und der Aufbau des periodischen Systems der Elemente durch Anbau immer neuer Elektronen sind auf der Fläche vorgezeichnet. Das Paulische Prinzip: „Unter den Elektronen eines Atoms dürfen keine zwei in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen“ weist die chemischen Elemente umkehrbar eindeutig den Eigenwertpunkten der Fläche zu, so daß die Elemente einer chemischen Periode im gleichen Flächenblatt liegen. Die Eigenwertpunkte bilden in den Flächenblättern die ideale Quantenzahlfolge. Im untersten Blatt  $n_1 = 1$  liegt das Ein- und das Zweielektronensystem (H und He), im darüberliegenden  $n_1 = 2$  die Achterreihe des periodischen Systems vom Lithium zum Neon, im nächsten Blatt die Achtzehnerreihe der Folge usw.

Der vielbesprochene Unterschied zwischen der idealen Zahlenfolge

$$2, 8, 18, 32, \dots, 2n^2, \dots$$

und der realen Folge der Reihen des periodischen Systems der Elemente

$$2, 8, 8, 18, 18, 32$$

ist treffend durch den Zusammenhang der Eigenwertfläche dargestellt. Auf der Eigenwertfläche der *idealen* Quantenfolge kann der Übergang von einem unteren Blatt in das darüberliegende erst nach Besetzung aller im unteren Blatt befindlichen Eigenwertpunkte stattfinden (Fig. 3a). Auf der Eigenwertfläche der *realen* Folge des periodischen Systems wird dagegen

der Übergang vom Blatt  $n_1 = 3$  in das Blatt  $n_1 = 4$  infolge anderen Zusammenhanges beider Blätter (Fig. 3b) schon vollzogen, nachdem erst 8 von den 18 Eigenwertpunkten des Blattes  $n_1 = 3$  besetzt waren, und zwar die

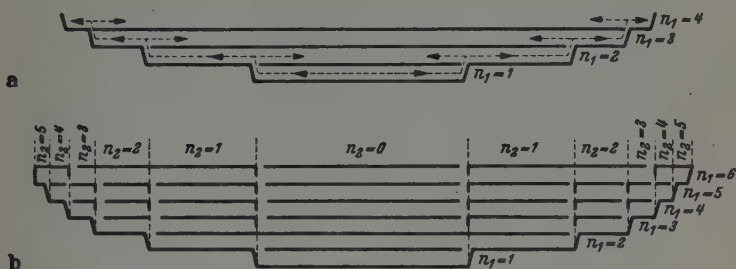


Fig. 3.

acht Stellen mit  $n_2 = 0$ ,  $n_3 = 0$ ,  $n_4 = \pm 1/2$  und  $n_2 = 1$ ,  $n_3 = 0$ ,  $\pm 1$ ,  $n_4 = \pm 1/2$ . Nach Besetzung der beiden Punkte  $n_1 = 4$ ,  $n_2 = 0$ ,  $n_3 = 0$ ,  $n_4 = \pm 1/2$  findet Rückkehr ins dritte Blatt  $n_1 = 3$  statt, wo die Besetzung der zehn äußeren Punkte  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 0$ ,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $n_4 = \pm 1/2$  nachgeholt wird. Als Gesamtergebnis ist festzustellen:

„Die Eigenwertfläche entspricht hinsichtlich der Wege zwischen ihren Eigenwertpunkten den spektralen Eigenschaften des Einelektronensystems, unter dem Gesichtspunkte des Paulischen Prinzips entspricht sie der idealen Quantenfolge. Zur Darstellung des realen periodischen Systems ist der Zusammenhang der Fläche abzuändern.“

10. Die üblichen Darstellungen des sogenannten periodischen Systems der Elemente mit ihren Anordnungen in wagerechten und lotrechten Kolonnen oder mit Verbindungslinien zwischen homologen Elementen geben das Wesen der Sache nur unvollkommen wieder. Unserer Auffassung des periodischen Systems entspricht vielmehr die eindeutige Verteilung der Elemente auf die Eigenwertpunkte der in ihrem Zusammenhang abgeänderten Eigenwertfläche. Ein gegebenes Element der Ordnungszahl  $\lambda$  hat auf der Fläche den Eigenwertplatz Nr.  $\lambda$  desjenigen Elektrons einzunehmen, durch dessen Anbau es aus dem vorhergehenden hervorging. Die Anordnung seiner  $\lambda$  Elektronen und ihre Quantenzustände sind durch die Eigenwertpunkte Nr. 1 bis  $\lambda$  völlig angegeben und  $\lambda$  läuft von 1 bis 92. Die Fig. 4a bis g zeigt diese Verteilung in der Reihenfolge der Blätter und Ringe. Wegen des Anschlusses an Physik und Chemie ist die Quantenzahl  $n_1$  als Hauptquantenzahl  $n$  bezeichnet, die Quantenzahl  $n_2$  als Nebenquanten-

zahl  $k$ , letztere ist um 1 erhöht, läuft also von 1 bis  $n$ . Das Zeichen  $m_n$  ist der Ring Nr.  $n$  im Blatt Nr.  $m$ . Diese Darstellung zeigt u. a. mit Deutlichkeit:

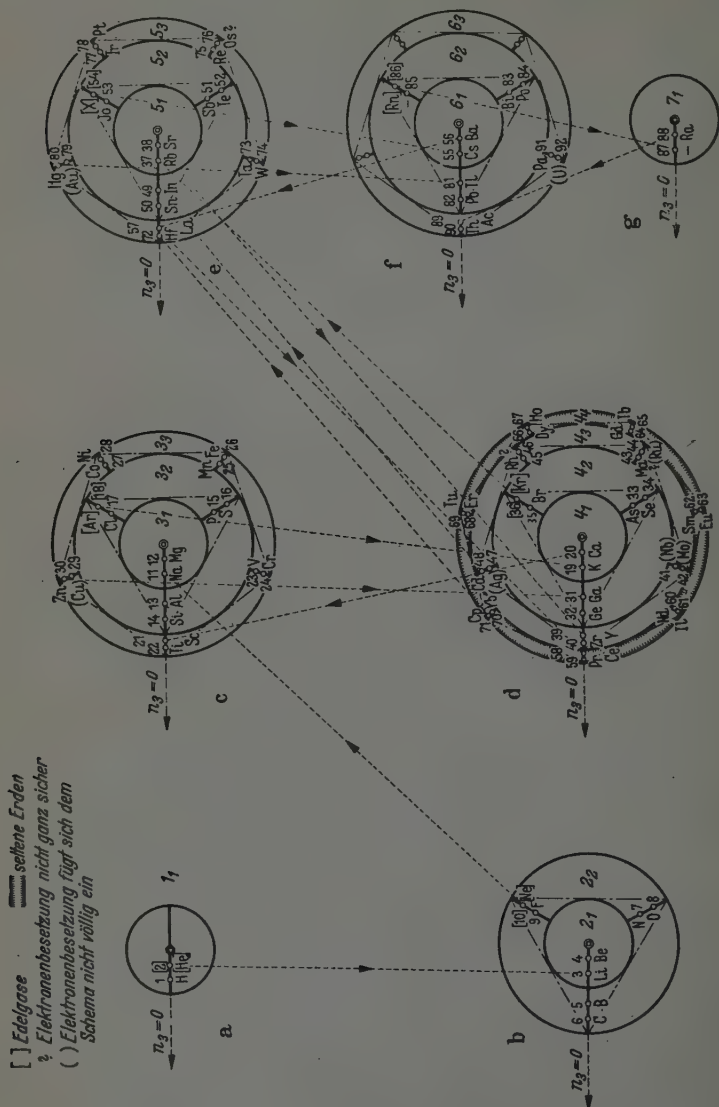


Fig. 4.

a) den Aufbau des Systems nach Blättern (Schalen) und Ringen (Untergruppen) von unten nach oben und von innen nach außen, das Aus-

lassen einzelner Ringe und ihr späteres Nachholen, die Anzahl, Anordnung und die Energiezustände der Elektronen jedes Elementes.

b) Chemisch und physikalisch homologe Elemente, die in der Bohr-Thomsenschen Darstellung<sup>1)</sup> durch eine Kette von Strichen zu verbinden sind, liegen auf der Fläche untereinander an kongruenten Stellen der einzelnen Blätter, der Ausbau des äußersten Ringes ist in den *verschiedenen* Blättern dann gleichweit fortgeschritten. Die Kongruenz untereinanderliegender Ringe aller Blätter entspricht der schon von Stoner und Main-Smith erhobenen Forderung<sup>2)</sup>, daß die Elektronenanzahl der Nebenquantenzahl  $k$  von ihrer Hauptquantenzahl  $n$  unabhängig ist, sowie dem Bohrschen Postulat von der Invarianz und Permanenz der Quantenzahl<sup>3)</sup>, nach dem die Bindung eines neuen Elektrons die  $n_k$ -Konfiguration aller vorher gebundenen Elektronen unverändert läßt.

c) Die Edelgase [2], [10], [18], [36], [54], [86] bilden (Fig. 4) wirklich den Abschluß der Ringe  $1_1$ ,  $2_2$ ,  $3_2$ ,  $4_2$ ,  $5_2$ ,  $6_2$  und liegen mit Ausnahme von [2] an kongruenten Stellen der Blätter.

d) Wo gleiches Verhalten verschiedener Elemente durch übereinstimmende „Außenschale“ erklärt wird, handelt es sich auf der Eigenwertfläche um übereinstimmende Platzbesetzung im *gleichen* obersten besetzten Blatt. Besonders zeigt das der Ring  $4_4$ , in dem die 14 seltenen Erden 58 bis 74 nacheinander ihre Plätze einnehmen, während in den darüberliegenden Blättern 5 und 6 die vorausgegangene Besetzung der Ringe  $5_1$ ,  $5_2$ ,  $6_1$  unverändert bleibt. Bekanntlich kommt das durch gleiches spektroskopisches und magnetisches Verhalten zum Ausdruck, während rein chemisch auch das Element 57 infolge seiner mit 58 bis 71 gemeinsamen Dreiwertigkeit zu den seltenen Erden rechnet.

e) Die Häufigkeit der Elemente in der oberen Lithosphäre, der Stern- und Sonnenatmosphäre und in den Meteoriten zeigt die bekannte Zweierperiodizität, nach der die Elemente gerader Ordnungszahl die stabileren sind; diese Harkinsche<sup>4)</sup> Regel wird von der gleichen Zweierperiodizität des größten Isotopenreichtums der geradzahligten Elemente begleitet. Auf der Eigenwertfläche kommt die Zweierperiodizität durch die

---

<sup>1)</sup> N. Bohr, Drei Aufsätze über Spektren und Atombau. Braunschweig 1922; I. Thomsen, ZS. f. anorgan. Chem. **9**, 190, 1895. Die in den tabellarischen Darstellungen des periodischen Systems untereinanderstehenden Elemente liegen also in kongruenten Punkten der verschiedenen Blätter. — <sup>2)</sup> E. C. Stoner, Phil. Mag. **48**, 719, 1924. — <sup>3)</sup> N. Bohr, ZS. f. Phys. **13**, 133, 1923; Ann. d. Phys. **71**, 256, 1923. — <sup>4)</sup> W. D. Harkins, Journ. Amer. Chem. Soc. **39**, 856, 1917.

paarweise Anordnung der Eigenwertpunkte zum Ausdruck. Jedoch handelt es sich um eine Frage der Kerntheorie, die im nächsten Abschnitt behandelt wird.

Die Eigenwertfläche vermittelt also eine neue Darstellung der Elemente, welche die Eigenschaften des periodischen Systems nach Mendelejeff oder Thomsen mit den Ergebnissen der Quanten- und Wellenmechanik vereinigt.

#### IV. Die Kernfläche und ihre Bedeutung für die Kernphysik.

11. Die Eigenwertfläche werde an ihrer Ebene  $n_1 = 1$  gespiegelt. Die gespiegelte Fläche besteht aus den Blättern

$$\bar{n}_1 = 1, 2, 3, \dots \nu$$

mit den Ringgebieten

$$\bar{n}_2 = 0, 1, 2, \dots (\nu - 1).$$

In ihnen sind die Richtungen

$$\bar{n}_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm (\nu - 1)$$

ausgezeichnet.

In jeder dieser Richtungen liegen zwei Punkte  $P, P'$  mit den vierten Quantenzahlen  $\bar{n}_4 = +1/2, -1/2$ , so daß alle zulässigen Eigenwertquadrupel nochmals auftreten. Das System der charakteristischen Punkte soll das „ $P$ -System“ der Fläche heißen, die Fläche selbst aber „Kernfläche“, weil sie alle Atomkerne und ihre Eigenschaften angibt.

Auf den Mittelsenkrechten aller Strecken  $PP'$  (Fig. 5) werden im Abstände  $\pm 1/2$  vom Mittelpunkte je zwei neue charakteristische Punkte  $N, N'$  eingetragen. Die Gesamtheit dieser Punkte bilden das „ $N$ -System“ der Kernfläche. Wir behalten uns vor, dem  $N$ -System noch einige weitere Punkte hinzuzufügen. Der Kern des Elementes der Ordnungszahl  $Z$  ist aus  $N_p = Z$  Protonen und  $N_n$  Neutronen aufgebaut und es ist  $N_p + N_n = M$  die Massenzahl. Die Elementekerne werden nach der Zahl ihrer Protonen auf die Punkte des  $P$ -Systems verlegt. Da die Protonenzahl die Kernladungszahl  $Z$  ist, wird der Kern jedes Elementes dabei auf den gleichen Punkt ( $n_i$ ) der Kernfläche gewiesen, den das Element wegen seiner Elektronenkonfiguration auf der Eigenwertfläche innehatte. Mit anderen Worten:

„Zwei spiegelbildlich homologe Punkte der Kernfläche und der Eigenwertfläche stellen Kern und Elektronenbesetzung eines Elementes dar; die Ionen eines Elementes werden durch Paare nicht homologer Punkte beider Flächen

wiedergegeben. Ein Element und seine Ionen ordnen einem bestimmten Punkte des P-Systems der Kernfläche mehrere Punkte der Eigenwertfläche zu.“

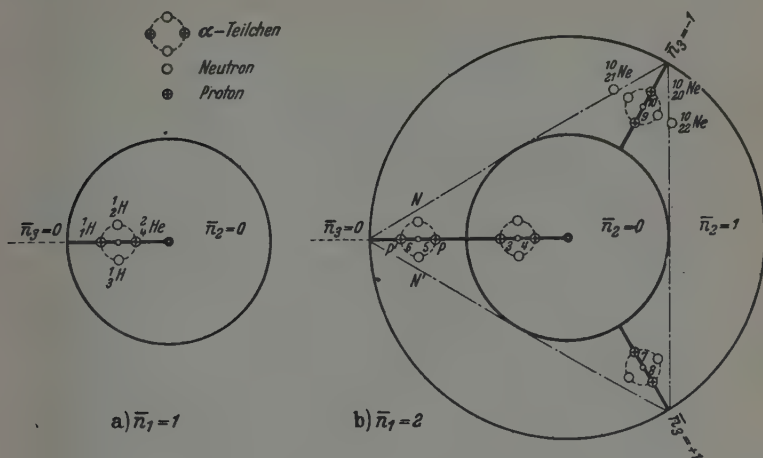


Fig. 5.

12. Ein Kern enthält außer den seiner Ordnungszahl entsprechenden  $N_p$  Protonen  $N_n$  Neutronen. Die Neutronen besetzen die Punkte des N-Systems (11) der Kernfläche. Je zwei Protonen und zwei Neutronen bilden ein  $\alpha$ -Teilchen. Zwei P-Punkte mit gleichen  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  und  $\bar{n}_4 = \pm 1/2$  liegen aber mit zwei N-Punkten auf einem Kreise, er stellt bei voller Besetzung ein  $\alpha$ -Partikel dar. Also:

„Die Kerne der Elemente werden durch die PN-Konfigurationen der Kernfläche wiedergegeben. Zum Kern des Elementes mit der Ladungszahl  $\lambda$  gehören die Punkte Nr. 1 bis  $\lambda$  des P-Systems und eine der Neutronenzahl entsprechende Anzahl Punkte des N-Systems. Die Konfiguration zeigt den Kernaufbau nach  $\alpha$ -Teilchen, Protonen und Neutronen und die Massenzahl. Isotope haben die gleiche P-Konfiguration bei verschiedenen N-Konfigurationen. Isotone Kerne haben gleich viel N-Punkte, aber verschiedene P-Konfigurationen.“

Die Fig. 5 zeigt unter anderem die Kerndarstellung des Elementes  $^{10}_{20}\text{Ne}$  (5  $\alpha$ -Teilchen) und die seiner beiden Isotope  $^{10}_{21}\text{Ne}$  und  $^{10}_{22}\text{Ne}$  mit 5  $\alpha$ -Teilchen und einem bzw. zwei weiteren Neutronen.

13. Die Wege auf der Kernfläche zwischen zwei PN-Konfigurationen stellen Kernumwandlungen dar. Folgende Fälle sind hervorzuheben:



A. Der Weg führe vom Punkte  $P_\lambda$  des Elementes der Ordnungszahl  $\lambda$  unmittelbar zum Punkt  $P_{\lambda-1}$ . Die Summen der  $P$ - und  $N$ -Punkte der beiden Konfigurationen seien gleich, die dargestellten Kerne sind isobar. Die Konfiguration  $P_\lambda$  besteht demnach aus  $\lambda$  Punkten des  $P$ -Systems und  $n$  Punkten des  $N$ -Systems, die Konfiguration  $P_{\lambda-1}$  aus  $\lambda - 1$  Punkten des  $P$ -Systems und  $n + 1$  Punkten des  $N$ -Systems. Es geht unterwegs ein Proton in ein Neutron über. Dabei wird in der Umgebung des Kerns ein positives Elektron mit der Ladung des Protons und ein Neutrino, jedes von beiden mit dem Eigendrehimpuls  $\frac{1}{2} \cdot h/2\pi$ , geschaffen<sup>1)</sup>. Wird der Weg in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so entsteht ein negatives Elektron und ein Neutrino. Demnach gilt der Satz:

*„Wege auf der Kernfläche zwischen Konfigurationen mit gleicher Punktezahl bedingen die Elektronenradioaktivität. Im Sinne steigender  $P$ -Nummern durchlaufen sind sie mit der Ausstrahlung negativer Elektronen verbunden, in entgegengesetzter Richtung mit der Ausstrahlung von Positronen.“*

B. Wege auf der Kernfläche zwischen Konfigurationen, deren jede zwei  $P$ -Punkte und zwei  $N$ -Punkte weniger zählt als die vorhergehende, bedingen die  $\alpha$ -Radioaktivität. Es gibt auf der Fläche vier Wege dieser Art:

a) Der Weg durch diejenigen  $P$ - $N$ -Konfigurationen, deren Punktezahlen durch 4 teilbar sind, nämlich 232, 228, 224, . . . . Er entspricht der *Thoriumreihe* des radioaktiven Zerfalls.

b) Der Weg durch die  $P$ - $N$ -Konfigurationen, deren Punktezahlen geradzahlig, aber nicht durch 4 teilbar sind, nämlich 238, 234, 230, . . . . Er entspricht der *Uranreihe*.

c) Der Weg durch solche  $P$ - $N$ -Konfigurationen, deren ungerade Punktezahlen je um 1 unterhalb der Stationen der Thoriumreihe liegen, also 231, 227, . . . . Er entspricht der (bei 235 beginnenden) *Aktinierreihe*.

d) Der Weg ungerader Punktezahlen, je um 1 unterhalb der Stationen der Uranreihe, also 233, 229, . . . . Er ist nur in einzelnen seiner Stationen künstlich realisiert. Zwischen die Wegstrecke der vier radioaktiven Zerfallsreihen lassen sich Wegstrecken der Elektronenradioaktivität ohne Störung dieser Vorschriften einschalten, wodurch die bekannte Gabelung und Wiedervereinigung der radioaktiven Zerfallsreihen entsteht.

C. Andere Wege auf der Kernfläche stellen die künstlichen Kernumwandlungen dar. Dabei sind zwei Arten von Wegen zu unterscheiden,

<sup>1)</sup> E. Fermi, ZS. f. Phys. 88, 161, 1934. — Für beide Korpuskeln gelten Dirac-Gleichungen. Bekanntlich entsteht das Neutrino zur Rettung des Impulsenergiesatzes.

je nachdem die Umwandlung von künstlicher Radioaktivität begleitet ist oder nicht. Wege der ersten Art sind weiter zu klassifizieren nach Charakter der ausgesandten Strahlen, beide Arten von Wegen können außerdem unterteilt werden nach der Form der Anregung, welche die Umwandlung hervorruft. (Beschießung mit  $\alpha$ -Teilchen, Deuteronen, Protonen, Neutronen.)

D. Von jeder der Flächenstellen  $U_{92}^{235}$ ,  $Pa_{91}^{231}$ ,  $Th_{90}^{230}$ ,  $Th_{90}^{231}$  im Blatt  $n_1 = 6$  zeichnen wir je die Wege zu den Punktepaaren:

$Br_{35}-La_{57}$ ,  $Rb_{37}-Cs_{55}$ ,  $Sr_{38}-Xe_{54}$ ,  $Y_{39}-J_{53}$ ,  $Zr_{40}-Te_{52}$ ,  $Nb_{41}-Sb_{51}$

in den Blättern 4, 5, 6. Unter der Wirkung langsamer Neutronen werden die Kerne der an den Ausgangsstellen sitzenden schweren Elemente Uran, Protaktinium und Thorium je in die beiden Elementekerne an den Endpunkten dieser Wegepaare gespalten. Die eingezeichneten Wegepaare stellen auf der Fläche die *Kernspaltungen* dar. Die beiden Kerntrümmer, also die Elementekerne an den Endpunkten der Wegepaare, sind bekanntlich Betastrahler (A) und stoßen zum Teil auch Neutronen aus, so daß sich einzelne Wege von den Endstationen aus noch fortsetzen, bis ein stabiler Endkern erreicht ist. Vom Sitz des Uranhauptisotops  $U_{92}^{238}$  führen entsprechende Wege nach Pd, Ag, Cd und In, da ersteres durch Bestrahlung mit schnellen Neutronen in zwei annähernd gleiche Teile gespalten wird, die diesen Elementen angehören.

Wird das System der Elemente durch weiteren Ausbau der Kern- und der Eigenwertfläche über das Uran hinaus extrapoliert, und zwar unter Berücksichtigung der Gesichtspunkte, welche die Besetzung der Flächenpunkte 1 bis 92 regelten, so kann man aus der Gestalt der Fläche zu der Vermutung kommen, daß die auf Nr. 92 folgenden Transurane eine ähnliche Gruppe bilden wie die seltenen Erden im dritten Ringe des vierten Blattes.

14. Mit Hilfe der Kernfläche können auch die einzelnen Energiestufen der Kernteile geordnet dargestellt werden. Die gesamte Wechselwirkung des einzelnen Protons oder Neutrons mit allen übrigen Kernteilen werde durch ein Potentialfeld beschrieben, in dem sich jeder Kernteil unabhängig von allen übrigen bewegt. Dann lassen sich die verschiedenen Energiezustände  $\bar{n}_1$ ,  $\bar{n}_2$  durch die Protonen und Neutronen des Kerns nach dem Pauli-Prinzip (9) besetzen. Vom Termaufbau der Elektronenhülle unterscheidet sich der des Kerns durch die (aus den beiden Arten von Kernteilen folgenden) doppelten Besetzungszahlen und durch eine teilweise andere Reihenfolge der Terme. Die nachstehende Zusammenstellung zeigt die

ideale Termbesetzung des Kerns für die unteren Stufen, die sich an den Blättern der Kernfläche ablesen läßt.

$n_1 =$	1			2			3			4				5				
$n_2 =$ .....	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4			
Protonen .....	2	2	6		6	10				14								18
Neutronen .....	2	2	6		6	10				14								18
Termbezeichnung..	1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f	5s	5p	5d	5f	5g			

Die Eigenwertfläche und die Kernfläche zusammen geben erst die Struktur der Atomphysik vollständig wieder. Daß die beiden unbesetzten Flächen zwar Spiegelbilder voneinander sind (9), für Elektronenhülle und Kern des Atoms aber zum Teil asymmetrische Rollen spielen, ist der geometrische Ausdruck dafür, daß die Naturgesetze zwar symmetrisch in bezug auf die positiven und negativen Ladungsträger sind, daß die positiven Ladungen aber den Kern, die negativen die Elektronenhülle bevorzugen. Bei einer folgerichtigen Durchführung der geometrischen Symmetrie wäre nach Besetzung beider Flächen eine abermalige Spiegelung zulässig. Es gäbe auch negative Kerne und positive Elektronenhüllen .

## Über den Energietransport durch Strahlung der Resonanzlinien in Gasen.

Von R. Mannkopff in Göttingen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 25. November 1942.)

Die Größe des durch die eigene Strahlung eines Gases in Richtung des Temperaturgefälles bewirkten Energietransports wird berechnet, und zwar sowohl für eine bestimmte Frequenz, wie für den gesamten Frequenzbereich einer Spektrallinie und für ein unbegrenztes und ein begrenztes Volumen. Das Ergebnis wird auf die Energieströmung in der Lichtbogensäule angewendet.

Der Anteil der Strahlung an der von einer Lichtbogensäule abgegebenen Energie war in letzter Zeit Gegenstand mehrerer Untersuchungen. Elenbaas<sup>1)</sup> maß die Gesamtstrahlung einer Quecksilberbogensäule und fand sie abhängig nur von der auf den cm Bogenlänge berechneten Leistung, dagegen in erster Näherung unabhängig von Gasdichte und Säulenradius. Ferner ist nach Elenbaas der Anteil  $A$  der Energie, der durch Wärmeleitung im Gase nach außen abgeführt wird, wesentlich konstant, so daß die Gesamtstrahlung sich schreiben läßt  $S = f(L - A)$ , worin  $f$  ungefähr den Wert 0,7 besitzt. Von der nach Abzug der Wärmeleitung verbleibenden Leistung soll also ein Bruchteil von etwa 0,8 nicht als Strahlung austreten, sondern durch die Strahlung der im Gase absorbierten Resonanzlinien bis zur Wand überführt werden. Welcher Teil der gemessenen Strahlung auf die einzelnen Emissionslinien entfällt, ist in Abhängigkeit von Druck, Durchmesser des Entladungsrohres und der auf den cm Säulenlänge entfallenden Leistung ebenfalls für den Quecksilberbogen zunächst von Krefft, Larché und Rössler<sup>2)</sup>, später von Kern und Schulz<sup>3)</sup> untersucht, außerdem ist an einer UV-Normallampe nach Krefft, Rössler und Rüttenauer von Rössler<sup>4)</sup> besonders genau die austretende Gesamtstrahlung und ihr auf die einzelnen Linien entfallender Anteil gemessen. Für die Gesamtstrahlung führen diese Messungen auf ähnliche Werte, wie sie Elenbaas fand; den Anteil der Gesamtstrahlung an der Leistung findet Rössler zu 39%, während von dem Rest 17% der Resonanzlinie 1849 Å und 44% der Konvektion und Wärmeleitung zugeschrieben werden. Der Anteil der Resonanzlinie, der von Rössler im Anschluß

<sup>1)</sup> W. Elenbaas, *Physica* **4**, 413, 1937. — <sup>2)</sup> H. Krefft, K. Larché u. F. Rössler, *ZS. f. techn. Phys.* **17**, 324, 1936. — <sup>3)</sup> J. Kern u. P. Schulz, *ZS. f. Phys.* **111**, 454, 1939. — <sup>4)</sup> F. Rössler, *Ann. d. Phys.* (5) **34**, 1, 1939.

an Rechnungen von Elenbaas ermittelt ist, macht, wie man sieht, einen beträchtlichen Bruchteil der Gesamtenergiebilanz aus, der nach dem Elenbaasschen Ausdruck für die Gesamtstrahlung mit der Leistung  $L$  noch stark zunehmen muß. Andererseits ist von Rompe und Schulz <sup>1)</sup> der Wärmeleitungskoeffizient für die Strahlungsdiffusion unter Einsetzung der tatsächlichen Linienbreite für die Hg-Resonanzlinie 1849 Å abgeschätzt worden und zu nur  $10^{-3}$  bis  $10^{-5}$  des klassischen Wärmeleitvermögens gefunden. Nach dieser Abschätzung dürfte entgegen der Annahme von Elenbaas und Rössler der durch die Strahlung der Linie 1849 Å abgeführte Teil der Gesamtenergie gegenüber der vom Quarz durchgelassenen Strahlung und der durch Wärmeleitung im Gase abfließenden Wärmemenge keine Rolle spielen. Der Widerspruch löst sich bei einer genaueren Berechnung der durch absorbierte Strahlung beförderten Energiemenge.

### *1. Die Energieströmung im unbegrenzten Raum und für einen kleinen Frequenzbereich.*

Von den verwandten, bei der Berechnung des Strahlungsflusses in Sternatmosphären auftretenden Aufgaben unterscheidet sich unser Problem in einigen Zügen. Während dort die Temperatur vorwiegend durch den Austausch von Strahlung bestimmt wird, und außerdem in dem Gemisch von Atomen zahlreicher Elemente das Absorptionsvermögen des Gases über weite Wellenlängenbereiche merkbare Werte besitzt, wollen wir hier die in einer Lichtbogensäule herrschenden Bedingungen zugrunde legen.

Es sei also die Temperatur durch das Gleichgewicht zwischen der zugeführten elektrischen Energie und der durch Strahlung und Leitung abgegebenen Wärmemenge gegeben, wobei der Ausgleich der Freiheitsgrade untereinander nicht durch Strahlung, sondern durch Stöße der Gaspartikel, Elektronen, Ionen und Moleküle erfolgt. Hierbei wollen wir Gasdruck und Dicke der untersuchten Gasschichten so groß gewählt denken, daß auch bei beträchtlicher Energieabgabe durch unabsorbierte Strahlung bereits die Stöße ein praktisch vollkommenes Gleichgewicht zwischen den Freiheitsgraden der Translation, Rotation, Schwingung und Anregung herstellen. Wir haben es also mit einem Gase definierter Temperatur zu tun. Ferner wollen wir annehmen, daß in dem betrachteten Wellenlängenbereich nur eine absorbierende Linie vorhanden ist.

<sup>1)</sup> R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. 113, 12, 1939; R. Rompe u. M. Steenbeck, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 18, 343, 1939.



Zur Ermittlung der Energieströmung betrachten wir den in dem Gase durch ein Flächenelement  $d\sigma$  hindurchtretenden Energiefluß der Frequenz  $\nu$  im Frequenzintervall  $d\nu$ . Das Absorptionsvermögen des Gases sei  $\chi$ . Das Volumen des Gases sei unbeschränkt, in dem Gase soll ein Temperaturgefälle in Richtung einer Ordinate  $r$  vorhanden sein. Die Normale des Flächenelements  $d\sigma$  falle mit dieser Richtung zusammen,  $d\sigma$  liegt also in einer Isothermenfläche (Fig. 1). Der Energiestrom durch dieses Flächenelement ist dann gleich der Differenz der von beiden Seiten durchtretenden Strahlungsflüsse. Für verschwindendes Temperaturgefälle  $dT/dr$ , also bei Strahlungsgleichgewicht, sind diese beiden Strahlungsflüsse gleich, es findet keine Energieströmung statt. Wenn jedoch ein Temperaturgefälle vorhanden ist,  $T$  also auf der einen Seite niedriger, auf der anderen höher ist, als die Temperatur der Isothermenfläche, so wird die von der Seite höherer Temperatur kommende Strahlung überwiegen und es entsteht eine Energieströmung.

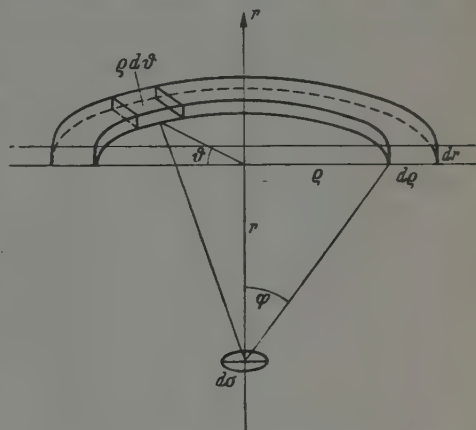


Fig. 1. Aufteilung des Integrationsbereichs für das Doppelintegral der Gleichung (4).

In unserem Gase sei  $T_0$  die Temperatur am Ort  $r = 0$  des Flächenelements  $d\sigma$ , das Temperaturgefälle an der Stelle  $r = 0$  sei  $dT_0/dr$ . Wir berechnen zunächst die dem Flächenelement  $d\sigma$  aus dem Raum  $r = 0$  bis  $r = +\infty$  in der Zeiteinheit zugestrahlte Energie  $dJ(\nu)$ . Hierzu integrieren wir über die auf  $d\sigma$  fallende Strahlung aller Volumenelemente. Den Halbraum  $r > 0$  teilen wir hierzu, wie folgt auf. Es sei  $\rho$  der Abstand eines Punktes von der  $r$ -Achse,  $\theta$  der Winkel, den  $\rho$  mit einer durch die  $r$ -Achse und eine beliebige feste Gerade in der Fläche  $r = 0$  gelegten Ebene bildet,  $\varphi$  der Winkel zwischen der Normalen und dem zu dem betrachteten Punkte führenden Strahl, dessen Länge also  $= \sqrt{r^2 + \rho^2}$  wird (Fig. 1). Das Volumenelement, dessen Zustrahlung auf  $d\sigma$  wir bestimmen wollen, bilde einen Kreisring im Abstände  $\sqrt{r^2 + \rho^2}$  von  $d\sigma$ , mit dem Durchmesser  $\rho$ , dem Querschnitt  $dr \cdot d\rho$ , also dem Volumen  $V = 2\pi \rho dr d\rho$ . Es ist  $V \cdot J(\nu)$ , die von dem Volumenelement  $V$  emittierte Strahlung, nach dem Kirch-



hoffschen Gesetz  $= 4\pi V \cdot \chi \cdot S_r(T)$ , wo  $S_r(T)$  die schwarze Strahlung bei der Temperatur  $T$ . Die von dem Volumenelement mit den Ordinaten  $r, \varrho$  in die Raumwinkeleinheit ausgestrahlte Energie wird

$$J_{r,\varrho}(\nu) = \chi_r S_r(T) 2\pi \varrho d\varrho dr.$$

In Richtung auf die Fläche  $d\sigma$  fällt hiervon der Bruchteil  $dJ_{r,\varrho}(\nu)$

$$dJ_{r,\varrho}(\nu) = J_{r,\varrho}(\nu) d\sigma \cdot \cos \varphi \cdot \frac{1}{r^2 + \varrho^2},$$

der auf seinem Wege durch Absorption im Gase noch um den Faktor  $e^{-\chi \sqrt{r^2 + \varrho^2}}$  geschwächt wird. Also trifft in  $d\sigma$  ein

$$dJ_{r,\varrho}(\nu) = \chi_r S_r(T) d\sigma \cos \varphi \frac{e^{-\chi \sqrt{r^2 + \varrho^2}}}{r^2 + \varrho^2} 2\pi \varrho d\varrho dr. \quad (1)$$

Da  $\cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}}$ , da ferner für  $S_r(T)$  im Bereich sichtbaren und ultravioletten Lichtes mit hinreichender Annäherung an Stelle der Planckschen die Wiensche Strahlungsformel gesetzt werden kann, wird hieraus, wenn wir noch über  $\varrho$  von 0 bis  $\infty$  integrieren

$$\int_0^\infty dJ_{r,\varrho}(\nu) d\varrho = J_r(\nu) d\sigma = \chi_r \cdot 2\pi \cdot \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} d\sigma \cdot dr \int_0^\infty \frac{r \cdot \varrho \cdot e^{-\chi \sqrt{r^2 + \varrho^2}}}{(r^2 + \varrho^2) \sqrt{r^2 + \varrho^2}} d\varrho. \quad (2)$$

Die gesamte auf  $d\sigma$  fallende Strahlung gewinnen wir hieraus durch Integration über  $r$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . Während die Integration über  $\varrho$  sich auf eine Schicht bestimmter Temperatur bezog, ist nun über Schichten verschiedener Temperatur zu integrieren. Von diesen werden wegen der mit  $r$  zunehmenden Absorption die  $d\sigma$  fernerer Schichten weniger zum Gesamtbetrage beitragen als die näheren. Daher genügt es, wie noch gezeigt wird, falls wir uns mit einer endlichen, angebbaren Genauigkeit begnügen, die Integration nur innerhalb endlicher Grenzen durchzuführen.

Um nun die Integration zu ermöglichen, muß  $e^{-\frac{h\nu}{kT}}$  als Funktion von  $r$  bekannt sein. Und zwar wird es uns, um der Energieströmung eine dem Wärmestrom verwandte Darstellung geben zu können, daran liegen, eine Beziehung zum Temperaturgefälle  $dT/dr$  herzustellen. Wir führen daher folgende vereinfachende Annahmen ein:

1. Im Integrationsgebiet von  $r$ , das, wie festgestellt, endlich sein kann, sei  $dT/dr$  konstant,  $T$  verlaufe also linear.

2. Im Integrationsgebiet sei der Temperaturabfall  $1/T$  so klein gegen  $T_0$ , daß, wenn  $e^{-\frac{h\nu}{k(T_0 + \Delta T)}}$  nach  $T$  in eine Reihe entwickelt wird, schon die beiden ersten Glieder die erforderliche Genauigkeit geben.

Da

$$\left. \begin{aligned} \text{und} \quad \frac{1}{T_0 + \Delta T} &= \frac{1}{T_0} \left( 1 + \frac{\Delta T}{T_0} \right) \\ e^{-\frac{h\nu}{k(T_0 + \Delta T)}} &= e^{-\frac{h\nu}{kT_0}} \left( 1 - \frac{h\nu}{kT_0} \cdot \frac{\Delta T}{kT_0} + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

genügt es, um die Differenz zwischen beiden Seiten kleiner als 1 % zu machen, wenn für  $T_0 = 5000^\circ$  und eine Anregungsspannung  $h\nu$  der benutzten Frequenz von 5 Volt,  $\Delta T/T_0$  nicht größer als  $10^{-3}$  wird. Größere Genauigkeit kann durch Berücksichtigen weiterer Glieder in der Reihenentwicklung erreicht werden, doch werden dann die Rechnungen wesentlich umfangreicher.

Wir setzen für  $e^{-\frac{h\nu}{k(T_0 + \Delta T)}}$  die Entwicklung (3) und beachten, daß bei Integration von  $-r$  bis  $+r$  die Glieder, die  $e^{-\frac{h\nu}{kT_0}}$  als Faktor enthalten, sich fortheben, während die zweiten Glieder wegen des wechselnden Vorzeichens von  $\Delta T$  sich addieren. Für  $\Delta T$  selbst dürfen wir gemäß Annahme 1 setzen

$$\Delta T = \frac{dT}{dr} \cdot r.$$

Damit wird

$$d\sigma \cdot J(\nu) = d\sigma \cdot 2\pi \cdot$$

$$\frac{2h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{kT_0}} \frac{h\nu}{kT_0^2} \cdot \frac{dT}{dr} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \cdot \varrho e^{-\chi \sqrt{r^2 + \varrho^2}}}{(r^2 + \varrho^2) \sqrt{r^2 + \varrho^2}} d\varrho dr. \quad (4)$$

Das rechtsstehende Doppelintegral kann nun durch zwei Substitutionen wesentlich vereinfacht werden. Wir führen zunächst an Stelle von  $\varrho$   $a = \cos \varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \varrho^2}}$  als neue Variable ein. Damit nimmt das innere Integral über  $d\varrho$  die Form an

$$\int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da. \quad (5)$$

Ferner gehen wir von  $dr$  zu  $d(\chi r)$  über, indem wir setzen  $dr = \frac{1}{\chi} d(\chi r)$ . Dadurch wird unser Doppelintegral von der Gasdichte unabhängig und lautet nunmehr

$$\frac{D}{\chi} = \frac{1}{\chi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi r \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da d(\chi r). \quad (6)$$

Da die eine Integrationsvariable  $\chi r$  in beiden Integralen auftritt, existiert keine einfache Lösung des Doppelintegrals, es ist jedoch eine numerische Be-

stimmung möglich, da  $D$  nur von den beiden Variablen  $a$  und  $\chi r$ , also der optischen Tiefe des Raumes abhängt, dagegen infolge unserer Annahmen 1

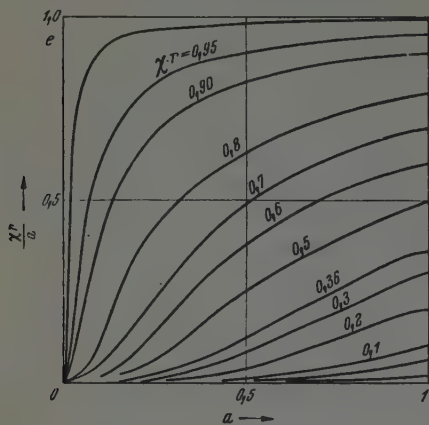


Fig. 2. Kurvenschar  $e^{-\frac{\chi r}{a}}$  mit  $\chi \cdot r$  als Parameter.

und 2 von den übrigen Variablen Temperatur und Frequenz unabhängig ist. Hierzu ist zuerst (5) mit  $\chi r$  als Parameter zu berechnen. Fig. 2 gibt

die Schar der Kurven  $e^{-\frac{\chi r}{a}}$  für verschiedene  $\chi r$  wieder, Fig. 3 bringt das zwischen den Grenzen 0 und 1 genommene

$\int e^{-\frac{\chi r}{a}} da$  (Kurve I) und sein Produkt mit  $\chi r$  (Kurve II), beide gegen  $\chi r$  als Abszisse aufgetragen. Wie Kurve II zeigt, verschwindet der Integrand zu der Integration über

$d(\chi r)$  bereits für  $\chi r > 5,5$ . Es genügt also, die Integration von  $-5,5$  bis  $+5,5$  auszuführen. Sie ergibt, wie Kurve III in Fig. 3 zeigt, den Wert des Doppelintegrals zu  $2 \cdot 0,8156$ .

Für die im Frequenzintervall  $d\nu$  durch  $d\sigma$  in Richtung des Temperaturgefälles strömende Strahlungsenergie der Frequenz  $\nu$  erhalten wir so

$$J(\nu) d\nu d\sigma = 2 \cdot 0,8156 \cdot 2\pi \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT_0}} \frac{h\nu}{kT_0^2} \frac{1}{\chi} \cdot \frac{dT}{dr} \cdot d\nu \cdot d\sigma \quad (7)$$

und daraus das Wärmeleitvermögen für Strahlungsdiffusion  $\kappa_s(\nu)$

$$\kappa_s(\nu) = 2 \cdot 0,8156 \cdot 2\pi S_\nu(T_0) \frac{h\nu}{kT_0^2} \cdot \frac{1}{\chi}, \quad (8)$$

oder, wenn wir  $C = 2\pi S_\nu(T_0) \frac{h\nu}{kT_0^2}$  setzen,

$$\kappa_s(\nu) = 2 \cdot 0,8156 C \frac{1}{\chi}. \quad (9)$$

Die Energieströmung ergibt sich als proportional der schwarzen Strahlung  $S_\nu(T_0)$  am Ort des Flächenelements  $d\sigma$ . Das Produkt  $h\nu/kT_0^2 \cdot dT/dr$  kann als Maß für die Unsymmetrie des Strahlungsflusses aufgefaßt werden, der Faktor  $h\nu/kT_0^2$  ist klein gegen 1.

Daß  $\kappa_s$  ferner proportional  $1/\chi$ , entspricht der Tatsache, daß die Energie sich um so schneller ausbreiten wird, je seltener ein Strahlungsquant durch Absorption verschwindet, d. h. je kleiner  $\chi$  ist. Es wird also im

Frequenzbereich einer Absorptionslinie die Energieströmung für die Linienmitte, in deren Nähe  $\chi$  sein Maximum hat, den kleinsten Wert besitzen und nach den Rändern der Linie hin zunehmen, soweit nur die Bedingung  $d > 5,5/\chi$  erfüllt ist. Schätzt man daher nach Art der von Rompe und Schulz<sup>1)</sup> durchgeführten Überlegung auf Grund des optischen Wirkungsquerschnittes den Betrag der Strahlungsdiffusion ab, so kann man zwar auch richtige Werte erhalten, man faßt jedoch bei Beschränkung auf

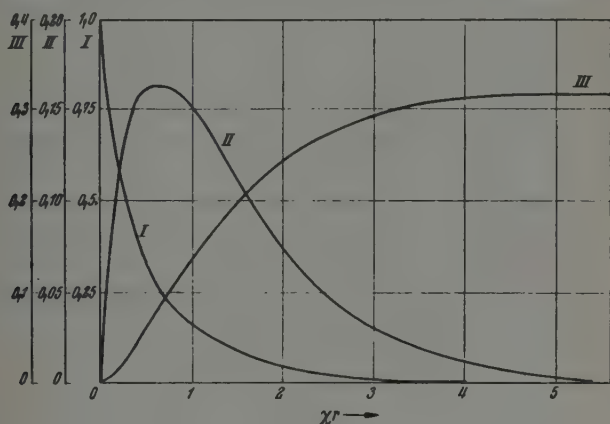


Fig. 3.

Die Funktionen  $I = \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da$ ,  $II = \chi r \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da$  und  $III = \int_0^d \chi r \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da d(\chi r)$ .

die Dämpfungsbreite der Linie nur den Frequenzbereich, für den  $\chi$  am größten,  $\kappa_s$  also am kleinsten ist. Somit bleiben bei einer Dicke der Gaschicht, die für einen größeren Frequenzbereich die Bedingung  $d > 5,5/\chi$  erfüllt, beträchtliche Teile dieses Frequenzbereiches unberücksichtigt, und zwar gerade diejenigen, die nach (8) zum Werte von  $\kappa_s$  am meisten beitragen müssen.

## 2. Das Strahlungsleitvermögen für den Bereich einer Spektrallinie.

Für einen kleinen Frequenzbereich, für den  $\chi_r$  als konstant betrachtet werden kann, ist das Strahlungsleitvermögen  $\kappa_s(\nu)$  durch (8) gegeben. Für den Frequenzbereich einer Spektrallinie nimmt jedoch  $\chi$  von der Linienmitte nach größeren und kleineren  $\nu$  hin ab, die Berechnung der durch die Strahlung einer Linie insgesamt bewirkten Energieströmung verlangt daher Kenntnis des Absorptionsverlaufs.

<sup>1)</sup> R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. 113, 12, 1939.

Der Absorptionskoeffizient läßt sich für eine Frequenz  $\nu$  durch den Brechungsindex  $n$  und den Absorptionsindex  $\kappa$  darstellen<sup>1)</sup>. Es ist

$$\chi_\nu = \frac{4\pi\nu}{c} n\kappa.$$

Der Faktor  $n\kappa$  ist nach der klassischen Theorie des Absorptionsverlaufs in der Umgebung einer Spektrallinie aus den atomaren Konstanten zu berechnen<sup>1)</sup>. Wir führen hierzu die Größen

$$x = \frac{4\pi(\nu - \nu_0)}{\gamma} \quad \text{und} \quad M = \frac{2Nfe^2}{\gamma\nu_0 m_{el}} \quad (10)$$

ein. In  $M$  bedeutet  $N$  die Zahl der Atome im  $\text{cm}^3$ ,  $e$  die Elementarladung in Coulomb,  $\nu_0$  die Frequenz der Linienmitte,  $m_{el}$  die Masse des Elektrons. Die Stoßdämpfungsbreite der Linie sei  $\gamma$ ,  $f$  ihre klassische Oszillatorenstärke. Trotz der hohen Temperatur in einer Lichtbogensäule können wir, bei hinreichend hohen Drucken, die Dopplerbreite der Linie neben der Dämpfungsbreite vernachlässigen. Bei Berechnung von  $M$  ist zu berücksichtigen, daß  $\nu_0$  in der Einheit  $\text{sec}^{-1}$  einzusetzen ist, während  $\gamma$  in der Kreisfrequenzskala gemessen wurde. Es ist also, falls wir auch  $\gamma$  in  $\text{sec}^{-1}$  angeben wollen, im Nenner noch der Faktor  $2\pi$  hinzuzufügen. Ebenso wird, wenn wir  $\gamma$  in  $\text{sec}^{-1}$  messen,  $x = \frac{2(\nu - \nu_0)}{\gamma}$ .

Mit Hilfe der Größen  $x$  und  $M$  lassen sich  $n$  und  $\kappa$  durch folgende Bestimmungsgleichungen ausdrücken:

$$\frac{1}{M} \{n^2(1 - \kappa^2) - n_0^2\} = \frac{-x}{1 + x^2}, \quad \frac{1}{M} 2n^2\kappa = \frac{1}{1 + x^2}. \quad (11)$$

$n_0$  ist der Beitrag der übrigen Linien zum Brechungsindex, der = 1 gesetzt werden darf. Bezeichnen wir noch  $M/(1 + x^2)$  mit  $b$ , so führt Auflösung der Gleichungen (11) auf den gesuchten Ausdruck

$$n^2\kappa^2 = \frac{(xb - 1) \pm \sqrt{(xb - 1)^2 + b^2}}{2}.$$

Um  $n^2\kappa^2$  nicht als kleine Differenz zweier großer Zahlen zu erhalten, formen wir ihn noch um und erhalten

$$n^2\kappa^2 = \frac{1}{2} (xb - 1) \left( 1 \pm \left( \sqrt{\frac{b}{xb - 1}} \right)^2 \right). \quad (12)$$

Nur für kleinere Werte von  $M$  ist eine einfachere Darstellung von  $n\kappa$  möglich. Es wird hier  $n\kappa = \frac{M}{2n_0} \cdot \frac{1}{1 + x^2}$ . Dem entspricht eine vom Werte  $M/2n_0$  nach beiden Seiten symmetrisch abfallende Kurve, die sich mit zunehmendem  $x$  der Hyperbel  $\frac{M/2n_0}{x^2}$  asymptotisch nähert.

<sup>1)</sup> M. Born, Optik, S. 421–492, Berlin 1933; A. Unsöld, Physik der Sternatmosphären, S. 148f., Berlin 1938.

Für größere Werte von  $M$ , die sowohl durch größere  $f$ , wie durch größeres  $N$ , also durch höheren Druck bedingt sein können, erfährt die Kurve eine Verschiebung und eine Verbreiterung. Mit zunehmendem Abstande von der Linienmitte nähert sie sich wieder dem Verlauf, der durch die Gleichung  $n\kappa = \frac{M}{2n_0} \cdot \frac{1}{1+\bar{x}^2}$  gegeben wird. Dabei haben wir der Verschiebung der Kurve  $v = x - \bar{x}$  durch Einführung der neuen Variablen  $\bar{x}$  Rechnung getragen. Wir begehen auch in diesem Falle für den größten Teil des in Frage kommenden Frequenzbereiches keinen großen Fehler, wenn wir setzen

$$\chi = \frac{4\pi\nu_0}{c} n\kappa = \frac{4\pi\nu_0}{c} \frac{M}{2n_0} \frac{1}{1+\bar{x}^2}. \quad (13)$$

Für das Strahlungsleitvermögen  $\kappa_s(\nu)$  des Intervalls  $d\nu$  mit dem Absorptionsvermögen  $\chi_\nu$  folgt daher

$$\kappa_s(\nu) = 0,6312 \cdot 2\pi S_\nu(T_0) \frac{h\nu}{kT_0^2} \frac{c}{4\pi\nu_0} \frac{2n_0}{M} (1 + \bar{x}^2)$$

oder, wenn wir den Zahlenwert des Doppelintegrals wieder mit  $D$ , das Produkt  $2\pi \cdot S_\nu(T_0) \cdot h\nu/kT_0^2$  mit  $C$  bezeichnen,

$$\kappa_s(\nu) = 2D \cdot C \frac{c}{4\pi\nu_0} \frac{2n_0}{M} (1 + \bar{x}^2).$$

Durch Integration über  $d\nu$  folgt daraus

$$\kappa_s = \int_{-\mu}^{+\mu} \kappa_s(\nu) d\nu = 2DC \frac{c}{4\pi\nu_0} \frac{2n_0}{M} \int_{-\mu}^{+\mu} (1 + \bar{x}^2) d\nu \quad (14)$$

oder, wenn man von  $\bar{x}$  zu  $\nu - \nu_0 = \bar{x} \cdot \frac{\gamma}{2}$  übergeht,

$$\kappa_s = 2 \cdot D \cdot C \frac{c}{4\pi\nu_0} \cdot \frac{2n_0}{M} \int_{-\mu}^{+\mu} \left(1 + \left(\frac{2(\nu - \nu_0)}{\gamma}\right)^2\right) d\nu.$$

Ausführung der Integration ergibt

$$\kappa_s = 2DC \frac{c}{4\pi\nu_0} \cdot \frac{2n_0}{M} \left[ (\nu - \nu_0) + \frac{1}{3\gamma^2} (\nu - \nu_0)^3 \right]_{-\mu}^{+\mu}. \quad (15a)$$

Da  $\nu - \nu_0 = x \cdot \frac{\gamma}{2}$ , können wir in (14) statt  $d\nu$  auch  $dx \cdot \frac{\gamma}{2}$  schreiben und erhalten

$$\kappa_s = 2DC \frac{c}{4\pi\nu_0} \cdot \frac{2n_0}{M} \frac{\gamma}{2} \left[ x + \frac{x^3}{3} \right]_{-x_1}^{+x_1}, \quad \text{worin} \quad x_1 = \frac{2\mu}{\gamma}. \quad (15b)$$

Wie (15a) und (15b) zeigen, nimmt die durch Strahlungsdiffusion bewirkte Energieströmung mit dem Abstande von der Linienmitte sehr schnell zu, und zwar für Frequenzabstände, die hinreichend groß gegen die Halbwerts-



breite sind, annähernd mit der dritten Potenz. Vorausgesetzt ist dabei eine solche optische Tiefe der strahlenden Gasschicht, daß die Strahlung für das ganze betrachtete Frequenzintervall die Intensität des Normalspektrums erreicht.

### 3. Numerische Berechnung eines Beispiels.

Zum Vergleich mit der Erfahrung sollen die Gleichungen (15) zunächst zur Ermittlung des Strahlungsleitvermögens der Quecksilberresonanzlinie 1849 Å verwendet werden. Die Rechnung werde für ein Frequenzintervall von der Größe der Dämpfungsbreite in der Linienmitte durchgeführt, für das bereits die von Rompe und Schulz<sup>1)</sup> mit Hilfe des optischen Wirkungsquerschnitts gewonnene Abschätzung vorliegt.

Hierzu ist zuerst  $M$  festzulegen. Für die in  $M$  eingehende Dämpfungsbreite  $\gamma$  der Linie setzen wir mit Rompe und Schulz<sup>2)</sup> den für die Eigen-druckverbreiterung gültigen Wert

$$\gamma = \frac{N e^2 f}{3 \pi m_{el} c^2 v_0} \quad (16)$$

Dann wird  $M$  unabhängig von der Linienbreite und nimmt den einfachen Wert  $3/2$  an, da  $N, f$  und sämtliche Konstanten sich fortheben. Da  $n_0 = 1$ , wird  $2 n_0/M = 4/3$ .

In der Achse der Lichtbogensäule, auf die sich die erwähnte Abschätzung bezog, betrug die Breite der Linie bei einer Dichte von 1,85 Atomen pro  $\text{cm}^3$  und einer wahrscheinlichen Temperatur von 8000° K etwa  $28 \text{ cm}^{-1}$  entsprechend  $8,43 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ . Ähnlich berechnet sich nach Rompe und Schulz<sup>2)</sup> die Halbwertsbreite  $\gamma$  nach (16) zu  $\gamma = 7,92 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ , da für die Linie 1849 Å die Frequenz der Linienmitte  $v_0 = 1,623 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$  und  $f = 1,3$ . Setzen wir in (15a) die Grenzen  $\pm \mu = \pm \gamma/2$ , so wird

$$\kappa_s = 2 DC \frac{c}{3 \pi v_0} \left( \gamma + \frac{4}{3 \gamma^2} \frac{\gamma^3}{4} \right) = 2 DC \frac{c}{4 \pi v_0} \frac{4}{3} \gamma.$$

Da für  $T_0 = 8000^\circ \text{ K}$  gilt:  $S_\nu(T_0) = \frac{h \nu^3}{c^2} e^{-\frac{h \nu}{k T_0}} = 1,93 \cdot 10^{-6} \text{ erg sec cm}^{-1}$ ,  $h \nu / k T_0^2 = 1,210 \cdot 10^{-3} \text{ grad}^{-1}$ , und  $c/3 \pi v_0 = 1,96 \cdot 10^{-6}$ , so ist

$$\begin{aligned} \kappa_s &= 0,631 \cdot 1,93 \cdot 10^{-6} \cdot 1,21 \cdot 10^{-3} \cdot 2,283 \cdot 1,96 \cdot 10^{-6} \cdot 1,33 \cdot 7,92 \cdot 10^{11} \\ &= 1,945 \cdot 10^{-2} \frac{\text{erg}}{\text{cm grad sec}} = 4,65 \cdot 10^{-10} \frac{\text{cal}}{\text{cm grad sec}}. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> R. Rompe u. P. Schulz, ZS. f. Phys. 113, 12, 1939. — <sup>2)</sup> R. Rompe u. P. Schulz, ebenda 110, 223, 1938.

Das stimmt mit der Schätzung von Rompe und Schulz überein, mit einem optischen Stoßquerschnitt  $q$  von  $10^{-3}$  bis  $10^{-4}$  cm<sup>2</sup> ergibt sich aus ihren Formeln

$$1,32 \cdot 10^{-9} \text{ bis } 1,32 \cdot 10^{-10} \frac{\text{cal}}{\text{cm grad sec}}.$$

Unser Wert liegt in der Mitte und beträgt in der Tat, wie Rompe und Schulz für ihre Schätzung betonen, nur den etwa  $10^{-5}$ -ten Teil des Wärmeleitvermögens, das ja von der Größenordnung  $10^{-5}$  cal/cm grad sec ist.

Zu dem Wert von  $\kappa_s$  trägt wesentlich nur ein Volumen bei, das sich bis zu einer optischen Tiefe  $\chi r = 5,5$  erstreckt. Für unser Beispiel, bei dem  $\nu - \nu_0 = \gamma/2$ , wird

$$\chi = \frac{4\pi\nu_0}{c} n\kappa = 6,81 \cdot 10^5 \cdot 0,52 = 3,54 \cdot 10^5,$$

also die Schichtdicke  $d = 5,5/3,54 \cdot 10^{-5} = 1,555 \cdot 10^{-5}$  cm. Die Abmessungen unserer Lichtbogensäule sind aber weit größer. Setzen wir  $d = 0,01$  und  $0,03$  cm, so erhalten wir für  $\chi$  den Wert  $5,5 \cdot 10^2$  und  $1,83 \cdot 10^2$ . Dem entsprechen nach (13) die Werte  $x_{0,01} = 30,45$  und  $x_{0,03} = 52,7$ . Berechnen wir hiermit  $\kappa_s$  aus (15b), so erhalten wir für  $r = 0,01$  und  $r = 0,03$

$$\begin{aligned} \kappa_{s0,01} &= \frac{3}{4} 1,945 \cdot 10^{-2} \cdot 30,45^3 = 4,12 \cdot 10^2 \frac{\text{erg}}{\text{cm grad sec}} \\ &= 9,66 \cdot 10^{-6} \frac{\text{cal}}{\text{cm grad sec}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{s0,03} &= \frac{3}{4} \cdot 1,945 \cdot 10^{-2} \cdot 52,7^3 = 2,140 \cdot 10^3 \frac{\text{erg}}{\text{cm grad sec}} \\ &= 5,01 \cdot 10^{-5} \frac{\text{cal}}{\text{cm grad sec}}. \end{aligned}$$

Nach Braune, Brasch und Wenzel<sup>1)</sup> ist das Wärmeleitvermögen  $\kappa$  für Hg-Dampf bei 630° K =  $2,305 \cdot 10^{-5}$  cal, daraus berechnet sich für 8000° K, falls  $\kappa$  mit  $T^{1/2}$  zunimmt,  $\kappa = 8,2 \cdot 10^{-5}$  cal/cm grad sec. Wie der Vergleich dieses Wertes mit unserem Ergebnis zeigt, wird das Strahlungsleitvermögen dadurch, daß auch der durch die seitlichen Frequenzbereiche bewirkte Energietransport berücksichtigt wird, um etwa 5 Zehnerpotenzen größer, als bei Beschränkung der Rechnung auf die Halbwertsbreite der Linie und wird von der Größenordnung des Wärmeleitvermögens.

#### 4. Das Strahlungsleitvermögen für begrenzte Räume.

In der bisherigen Rechnung wurde nur der Beitrag eines begrenzten Frequenzbereiches zum Strahlungsleitvermögen berücksichtigt. Man erhält auf diese Weise nur eine untere Grenze für  $\kappa_s$ , die noch dazu keine gute

<sup>1)</sup> H. Braune, R. Brasch u. W. Wenzel. ZS. f. phys. Chem. (A) **137**, 447, 1928.

Näherung darstellt, weil ja  $\kappa_s$  mit  $(\nu - \nu_0)$  oder mit  $1/\chi$  schnell zunimmt. Es müßte  $\kappa_s$  daher weiter wachsen, wenn nicht die strahlenden Gaskörper, die sich etwa in einem Entladungsrohr herstellen lassen, begrenzt wären. Das hat zur Folge, daß das Doppelintegral  $D$  mit zunehmendem  $1/\chi$ , sobald  $\chi d$  unter 5,5 sinkt, anfängt merklich abzunehmen, da sein Integrationsbereich mit zunehmender Durchsichtigkeit des Gases sowohl für  $r$  wie für  $\varrho$  nicht mehr als unendlich groß betrachtet werden kann.

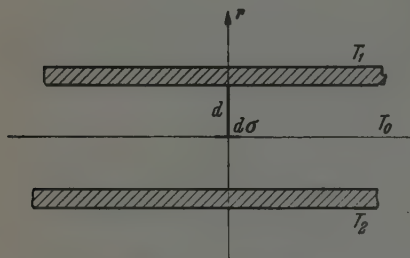


Fig. 4. Das in der Koordinate  $r$  auf den Bereich  $-d$  bis  $+d$  begrenzte Integrationsgebiet des Doppelintegrals  $D$ .

Ob  $D/\chi$  und damit  $\kappa_s$  für ein begrenztes Gasvolumen einem endlichen Wert zustrebt, kann nur durch eine Bestimmung des Ganges von  $D$  mit  $\chi d$  entschieden werden. Exakt zu lösen ist diese Aufgabe, wenn die strahlende Gasschicht nur senkrecht zur  $r$ -Achse, also in Richtung des Temperaturgefälles begrenzt ist. Man kann diesen Fall durch ein Versuchsgefäß verwirklicht denken, in den sich TI-Dampf zwischen zwei parallelen Quarzplatten befindet, die an zwei Räume mit den verschiedenen Temperaturen  $T_1 > T_2$  grenzen (Fig. 4). Bei Temperaturen um  $1000^\circ$  muß dann bereits ein merklicher Energietransport durch Resonanzstrahlung stattfinden, dessen Größe nach (14) für eine in der Mitte zwischen beiden Quarzplatten liegende Bezugsebene mit der Temperatur  $T_0$  im Frequenzintervall  $d\nu$  durch  $d\nu \cdot \kappa_s \cdot dT/dr$  gegeben ist. Jedoch ist  $D$  in  $\kappa_s$  nicht mehr konstant und  $= 0,3516$ . Die Schicht wird vielmehr mit zunehmendem  $\chi d$  immer durchsichtiger, die Strahlung erreicht nicht mehr die Intensität des Normalspektrums. Die Integration nach  $\chi d$  kann nun nicht mehr bis  $\chi d = 5,5$  durchgeführt werden, weil dieser Wert wegen der Abnahme von  $\chi$  nicht mehr erreicht wird, so daß  $D$  mit zunehmendem  $\nu - \nu_0$  abnimmt. Man kann den Grenzwert von  $\kappa_s$  für große Abstände von der Linienmitte, also kleine  $\chi$  durch folgende Überlegung bestimmen. Es nähert sich  $e^{-\chi r}$  bei kleinem  $\chi r$  immer mehr der Einheit, also wird auch

$$\int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da = 1.$$

Daher wird

$$\chi r \cdot \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da = \chi r \quad \text{und} \quad \int_0^{\chi d} \chi d \int_0^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da d(\chi d) = (\chi d)^2.$$

Also ist  $\kappa_s(\nu) = C d^2 \chi$ , worin  $C = 2 \cdot 2\pi \cdot S_\nu(T_0) \cdot h\nu/kT_0^2$ , und da wir bei hinreichend großem  $\nu - \nu_0$  setzen können

$$\chi = \frac{4\pi\nu_0}{c} \cdot \frac{M}{2n_0} \left( \frac{\gamma/2}{\gamma - \nu_0} \right)^2,$$

wird

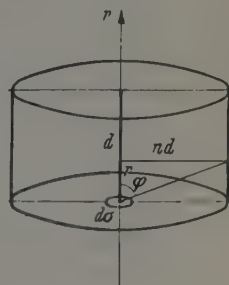
$$\kappa_s = C d^2 \cdot \frac{M}{2n_0} \cdot \frac{\gamma^3}{4} \cdot \frac{1}{\nu - \nu_0} \cdot \frac{4\pi\nu_0}{c}.$$

Wir beachten, daß diese Darstellung nur oberhalb eines Frequenzabstandes  $(\nu_1 - \nu_0)$  gilt, dem der etwa bei  $d = 0,3$  gelegene Wendepunkt der Kurve III für  $D$  in Fig. 3 entspricht, und wählen die Grenzen des Integrals von  $\nu - \nu_0 = \infty$  bis zu diesem Wendepunkt. Für diesen ist

$$\frac{1}{\nu_1 - \nu_0} = \frac{2}{\gamma} \sqrt{0,3 \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{2n_0}{4\pi\nu_0} \cdot M},$$

so daß

$$\kappa_s = C \cdot d^{3/2} \sqrt{0,3 \cdot \frac{4\pi\nu_0}{c} \cdot \frac{M}{2n_0}}. \quad (17)$$



Zu diesem Betrag, der den Anteil enthält, den die Flanken der Resonanzlinie zu  $\kappa_s$  beitragen, tritt noch das Integral über  $\kappa_s(\nu) d\nu$  zwischen  $-(\nu_1 - \nu_0)$  und  $+(\nu_1 - \nu_0)$ . Damit erhält  $\kappa_s$  für eine unendlich ausgedehnte Schicht endlicher Dicke einen endlichen Wert.

Fig. 5. Zylindrische Begrenzung des Integrationsgebiets für das Doppelintegral.

Um eine Anwendung unserer Rechnungen auf ein allseitig begrenztes Gasvolumen zu ermöglichen, wollen wir außer der Begrenzung längs der Richtung des Temperaturgefälles eine weitere Einschränkung des Integrationsgebietes einführen, indem wir auch für  $\varrho$  einen endlichen Wert  $nd$  setzen. Für die numerische Rechnung werden wir  $n = 1$  setzen, uns also auf ein zylindrisches Volumen beschränken, dessen Höhe  $2d$  gleich seinem Durchmesser ist (Fig. 5). Die Begrenzung des Integrationsraumes bedeutet, daß in dem Doppelintegral  $D$  nunmehr beide Integrationen nicht mehr bis zu den festen Grenzen  $5,5$  und  $0$  durchzuführen sind. Vielmehr werden die Grenzen und wird damit das ganze Integral eine Funktion von  $\chi$  und damit von  $x$  oder von  $(\nu - \nu_0)$ .

Für ein gegebenes  $d$  läuft die Variable  $\chi r$  von  $0$  bis  $\chi d$ . Für die Grenzen der Variablen  $u = \cos \varphi$  ergibt sich folgende Bedingung. Die obere Grenze

$a_1 = 1$  bleibt bestehen. Die andere ist dadurch gegeben, daß  $\cos \varphi$  nicht größer als  $r/\sqrt{r^2 + n^2 d^2}$  werden kann. Also

$$a_2 = \frac{r}{\sqrt{r^2 + n^2 d^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \left(\frac{\chi d}{\chi r}\right)^2}}.$$

Die Erweiterung mit  $\chi$  macht es möglich,  $a_2$  als Funktion der Integrationsvariablen  $\chi r$  mit  $\chi d$  als Parameter darzustellen. Dabei genügt es,  $\chi d$  und  $\chi r$  in dem Bereich  $< 5,5$  zu betrachten, da ja oberhalb 5,5 unser Integral  $D$

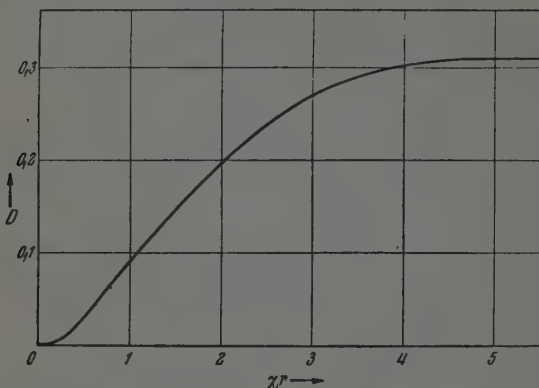


Fig. 6. Das Doppelintegral  $D$  für einen zylindrischen Raum als Funktion der optischen Tiefe  $\chi \cdot d$ .

wesentlich konstant ist. Es ist nun für den Bereich  $0 < \chi d < 5,5$  zunächst  $a_2$  zu berechnen. Dann ist aus Fig. 2 für eine hinreichende Anzahl von Werten des Parameters  $\chi d$  das Integral über  $e^{-\frac{\chi r}{a}}$  von  $a_1 = 1$  bis  $a_2$  als Funktion von  $\chi r$  zu entnehmen. Diese Werte sind mit  $\chi r$  zu multiplizieren und dieser Ausdruck

$$\chi r \int_{a_2}^1 e^{-\frac{\chi r}{a}} da \quad \text{mit der Grenze} \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 (\chi d / \chi r)^2}}$$

ist wiederum für jeden Wert des Parameters  $\chi d$  von 0 bis  $\chi d$  über  $\chi r$  zu integrieren. Wir unterdrücken die ganzen, etwas umständlichen Zwischenrechnungen und geben in Fig. 6 nur das Ergebnis, den Verlauf des Doppelintegrals  $D$  als Funktion seiner oberen Grenze  $\chi d$ .

Zu ermitteln ist nun  $\kappa_s = 2C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{D}{\chi} d\chi$  für ein gegebenes  $d$ . Mit  $d$  ist

auch  $\chi d$  für jeden Wert von  $\chi$  gegeben. Führt man als Variable  $\chi d$  statt  $\chi$  ein, so erhält man einen sehr unübersichtlichen Ausdruck. Jedoch ist es

möglich, von der Integrationsvariablen  $\nu$  zu  $x$  überzugehen und dadurch das Integral in  $\kappa_s$  unabhängig von der Linienbreite darzustellen. Es wird, da  $d\nu = dx \cdot \frac{\gamma}{2}$ ,

$$\kappa_s = 2C \frac{\gamma}{2} \int_0^{\infty} \frac{d}{\chi d} \cdot D \cdot dx = C \cdot d \cdot \gamma \int_0^{\infty} \frac{D}{\chi d} dx. \quad (18)$$

Die zu jedem  $x$  gehörige Ordinate  $\chi d$  ist dabei der Beziehung

$$\chi d = \frac{4\pi\nu_0}{c} \cdot \frac{M/2 n_0}{1+x^2} \cdot d$$

zu entnehmen. In Fig. 7 ist  $D/\chi d$  als Funktion von  $x$  für drei verschiedene  $d$  dargestellt. Für das Integral in (18) ergibt sich aus Fig. 7 ein endlicher Wert, der annähernd mit  $d^{1/2}$  zunimmt,  $\kappa_s$  wächst also mit  $d^{3/2}$ . Wie aus (18) weiter hervorgeht, wird  $\kappa_s$  der Dämpfungsbreite  $\gamma$  der Linie und damit dem

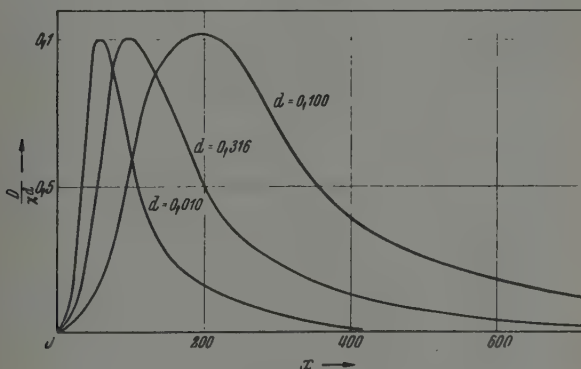


Fig. 7. Der Integrand  $D/\chi \cdot d$  zur Bestimmung von  $\kappa_s$  für ein zylindrisches Volumen ( $d$  in cm).

Druck proportional, anders als das vom Druck unabhängige Wärmeleitvermögen  $\kappa$ . Mit der Temperatur steigt das Strahlungsleitvermögen, da in (18) die Intensität der Wärmestrahlung als Faktor auftritt, exponentiell an, also weit schneller als das Wärmeleitvermögen, das nur mit  $T^{1/2}$  zunimmt.

Wir berechnen nur ein Beispiel, das den Verhältnissen in der Lichtbogensäule angepaßt ist. Es sei die Ausdehnung des betrachteten Integrationsgebietes in Richtung des Temperaturgefälles von der Größenordnung der Bereiche, in denen in Lichtbogensäulen die Temperatur noch einigermaßen konstant ist; wir führen die Rechnung für  $d = 0,01, 0,0316$  und  $0,10$  cm durch. In Fig. 7 ist für diese drei Werte  $D/\chi d$  als Funktion von  $x$  dargestellt. Die Integration liefert die mit  $d^{1/2}$  ansteigenden Werte



10,90, 19,4 und 34,7. Für die Hg-Linie 1849 A folgt unter den Bedingungen der oben durchgeführten Abschätzung und mit der Halbwertsbreite der Linie  $\gamma = 7,92 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$  für  $d = 0,01 \text{ cm}$

$$\kappa_s = C \cdot 0,01 \cdot 7,92 \cdot 10^{11} \int_0^\infty \frac{D}{\chi d} dx = 2,937 \cdot 10^{-8} \cdot 0,01 \cdot 7,92 \cdot 10^{11} \cdot 10,9$$

$$= 2,395 \cdot 10^2 \frac{\text{erg}}{\text{cm grad sec}} = 5,95 \cdot 10^{-4} \frac{\text{cal}}{\text{cm grad sec}}$$

Werte für andere  $d$  sind in Tabelle 1 wiedergegeben. Der aus den Messungen von Braune, Brasch und Wenzel<sup>1)</sup> extrapolierte Wert des Wärmeleitvermögens für Hg-Dampf fällt für etwa 6000°, wo er  $7,00 \cdot 10^{-5} \text{ cal/cm grad sec}$  erreicht, mit den für  $d = 0,014 \text{ cm}$  berechneten Werten von  $\kappa_s$  zusammen. Bei 6000° K und einem zylindrischen Volumen vom Durchmesser  $2d$  ist also das Strahlungsleitvermögen in der Mitte des Zylinders von der Größenordnung des Wärmeleitvermögens. Dies entspricht nach den neuesten Bestimmungen der Temperatur in der Säule des Quecksilberbogens<sup>2)</sup> etwa der mittleren Temperatur in der stromleitenden Zone. Der Energietransport durch Strahlung der Resonanzlinie 1849 A ist also von der gleichen Größenordnung wie der durch Wärmeleitung. Das ist im Einklang mit den eingangs angeführten Messungen von Elenbaas<sup>3)</sup> und Rössler<sup>4)</sup>, wonach ein Bruchteil von 0,17 oder mehr der Energie, die der Bogensäule zugeführt wird, weder durch unabsorbierte Strahlung noch durch Wärmeleitung abgegeben werden soll, also durch Resonanzstrahlung transportiert werden muß. Für den inneren, leuchtenden Teil der Lichtbogensäule fällt also das Strahlungsleitvermögen neben dem Wärmeleitvermögen stark ins Gewicht.

Tabelle 1.

Das Strahlungsleitvermögen  $\kappa_s$  von Hg-Dampf in  $\text{cal/cm grad sec}$  für die Mitte eines zylindrisch begrenzten Volumens vom Durchmesser  $2d$ , berechnet für die Linie 1849 A bei einer Halbwertsbreite von  $7,92 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}$ .

$d$ cm	$T^\circ \text{ K}$		
	6000	7000	8000
0,010	$4,21 \cdot 10^{-5}$	$1,71 \cdot 10^{-4}$	$5,95 \cdot 10^{-4}$
0,0316	$2,37 \cdot 10^{-4}$	$9,66 \cdot 10^{-4}$	$3,35 \cdot 10^{-3}$
0,10	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$1,89 \cdot 10^{-2}$
0,316	$7,50 \cdot 10^{-3}$	$3,05 \cdot 10^{-2}$	$1,06 \cdot 10^{-1}$
1,00	$4,21 \cdot 10^{-2}$	$1,73 \cdot 10^{-1}$	$5,98 \cdot 10^{-1}$

<sup>1)</sup> H. Braune, R. Brasch u. W. Wenzel, ZS. f. phys. Chem. (A) **137**, 447, 1928. — <sup>2)</sup> P. Schulz, ZS. f. Phys. **119**, 167, 1942. — <sup>3)</sup> W. Elenbaas, Physica **4**, 413, 1937. — <sup>4)</sup> F. Rössler, Ann. d. Phys. (5) **34**, 1, 1939.

*Zusammenfassung.*

Nach der vorstehenden Überlegung ist der in einem Gase hoher Temperatur durch die Strahlung einer bestimmten Frequenz bewirkte Energietransport dem Absorptionsindex umgekehrt, der Intensität der schwarzen Strahlung direkt proportional. Als Faktoren treten ferner auf ein Ausdruck, der das Temperaturgefälle enthält und ein Maß für die Unsymmetrie der Strahlung darstellt, sowie ein bei hinreichender optischer Tiefe konstanter Formfaktor in Gestalt eines Doppelintegrals. Da das Temperaturgefälle nur als Faktor auftritt, lassen sich alle übrigen Glieder des Ausdrucks zu einem, dem Wärmeleitvermögen analogen Leitvermögen für Strahlungsdiffusion oder kurz Strahlungsleitvermögen zusammenfassen.

Die durch die Strahlung einer Absorptionslinie innerhalb eines unbegrenzten Gasvolumens bewirkte Energieströmung ergibt sich durch Integration über den Frequenzbereich der Linie. Sie wächst mit der dritten Potenz des Abstandes von der Linienmitte, das Strahlungsleitvermögen ist also für die Mitte der Linie am kleinsten.

Ist das Gasvolumen begrenzt, so wird das Doppelintegral von der optischen Tiefe des Raumes und damit von der Frequenz abhängig. Es wird für eine unendlich ausgedehnte Platte und für ein zylindrisches Volumen als Funktion der Frequenz berechnet. Durch Integration über den gesamten Frequenzbereich kann nunmehr das Strahlungsleitvermögen eines begrenzten Volumens für eine Spektrallinie gefunden werden. Es nimmt einen endlichen Wert an, der für einen zylindrischen Raum annähernd mit der Wurzel aus dem Volumen ansteigt. Außerdem ist es der Halbwertsbreite der Linie und damit dem Druck proportional, anders als das vom Druck unabhängige Wärmeleitvermögen. Mit der Temperatur steigt es exponentiell an, so daß es bei hinreichend hoher Temperatur das Wärmeleitvermögen stets überflügelt.

Für Quecksilberdampf wird das Strahlungsleitvermögen im Volumen einer Lichtbogensäule und im Druckbereich einiger Atmosphären bei etwa 6000° K von der Größenordnung des Wärmeleitvermögens. Dies Ergebnis ist geeignet, eine Lücke in der Energiebilanz der Lichtbogensäule zu schließen.

Göttingen, im November 1942.

## Über die Druckabhängigkeit der Anregungstemperatur in der Lichtbogensäule \*).

Von Heinz Jagodzinski in Göttingen.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 25. November 1942.)

Es wird das Auftreten von Spektrallinien hoher Anregungsenergie in der Lichtbogensäule bei vermindertem Druck begründet und es werden Messungen des Intensitätsanstieges der roten Wasserstofflinie bei Druckerniedrigung mitgeteilt.

Die hohen Temperaturen im elektrischen Lichtbogen<sup>1)</sup> weisen darauf hin, daß die in der Lichtbogensäule stattfindenden Vorgänge vorwiegend thermischer Art sind. Welche Faktoren spielen nun bei der Bogenentladung eine entscheidende Rolle? Zunächst ist das sich einstellende Gleichgewicht abhängig von der zugeführten elektrischen Energie  $L \cdot \mathcal{E} \cdot I \cdot dt$ , worin  $\mathcal{E}$  die elektrische Feldstärke,  $L$  also die Leistung pro cm Bogenlänge; diese wird verbraucht:

1. durch die durch Wärmeleitung des Bogen-gases an die Umgebung abgeführte Energiemenge,

2. durch die ausgestrahlte elektromagnetische Energie.

Die Energie in der Lichtbogensäule verteilt sich auf drei Komponenten:

1. das Elektronengas,

2. die Freiheitsgrade der Anregung von Ionen, Atomen und Molekülen,

3. die Translations-, Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade des Bogen-gases.

Man spricht dementsprechend auch von der Elektronen-, der Gas- und der Anregungstemperatur. Der Energieaustausch zwischen dem Elektronengas und den anderen Komponenten findet fast ausschließlich durch Stöße erster und zweiter Art statt. Wie Witte<sup>2)</sup> gezeigt hat, fallen bei Normaldruck diese drei Temperaturen fast zusammen, das Temperaturgleichgewicht ist nicht nachweisbar gestört. Geht man jedoch zu niederen Drucken über, so nähert sich die Bogenentladung in ihrem Charakter immer mehr der Glimmentladung. Dies deutet sich schon durch den Anstieg der auf die freie Weglänge entfallenden Spannung an. Nachgewiesen ist der Vorgang von Langmuir<sup>3)</sup>. Er hat in Gasentladungen die Elektronen-

\*) D 7.

<sup>1)</sup> L. S. Ornstein u. Mitarbeiter, Proc. Amsterdam **33**, 44, 1930; **34**, 33, 498, 764, 1931; A. v. Engel u. M. Steenbeck. Wiss. Veröff. a. d. Siemens-Werken **10**, 155, 1931. - <sup>2)</sup> H. Witte, ZS. f. Phys. **88**, 415, 1934, s. auch R. Mannkopff, ZS. f. Phys. **86**, 161, 1933. - <sup>3)</sup> I. Langmuir u. H. Mott-Smith, Gen. Elektro Rev. **26**, 731, 1923; **27**, 449, 1924.

temperatur bei Drucken von 0,001 bis 0,01 mm Hg-Säule gemessen; sie liegt wesentlich höher als die Gastemperatur; in der gleichen Arbeit wies Langmuir darauf hin, daß die Temperaturdifferenz zwischen Elektronen- und Gastemperatur mit steigendem Druck immer geringer wurde. Bei welchem Druck wird nun im elektrischen Lichtbogen ein merkliches Abweichen der Elektronentemperatur von der Gastemperatur zum ersten Male eintreten?

Diese Temperaturdifferenz läßt sich mit Hilfe einer Wärmeleitungsüberlegung abschätzen<sup>1)</sup>. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die in dem Zeitintervall  $dt$  vom Elektronengas an das Bogengas abgegebene Wärmemenge proportional der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Gasen.

$$-dw = k (T_{el} - T_{gas}) dt$$

( $T_{el}$  = Temperatur des Elektronengases,  
 $T_{gas}$  = Temperatur des Bogengases).

Diese Energieabgabe wird durch die zugeführte elektrische Energie  $L dt$ , wo  $L = \mathfrak{E} \cdot I$  ist, ausgeglichen:

$$-dw = L dt,$$

somit wird

$$T_{el} - T_{gas} = \frac{L}{k}.$$

Die Konstante  $k$  läßt sich aus folgendem Gedankenexperiment ermitteln. Der Strom werde plötzlich abgeschaltet, dann wird das Elektronengas seinen Temperaturüberschuß an das Bogengas abgeben. Die Abgabe erfolgt nach dem Gesetz

$$(T - T_{gas}) = (T_{el} - T_{gas}) e^{-\frac{kt}{mc}}$$

( $mc$  = Wärmekapazität des Elektronengases).  $k$  läßt sich nun am einfachsten aus der Halbwertszeit, das ist die Zeit, nach der die Temperaturdifferenz ihren halben Wert erreicht hat, ermitteln, da

$$\frac{T_{el} - T_{gas}}{T - T_{gas}} = 2 \text{ wird, ist also } k = \frac{mc}{\tau} \ln 2.$$

Setze ich  $k$  in die erste Gleichung ein, so erhalte ich

$$T_{el} - T_{gas} = \frac{L \cdot \tau}{mc \cdot \ln 2}. \quad (1)$$

Zur Feststellung der Druckabhängigkeit der Differenz zwischen Elektronen- und Gastemperatur müssen wir beachten, wie sich Halbwertszeit  $\tau$  und

<sup>1)</sup> R. Mannkopff, ZS. f. Phys. 86, 161, 1933.

Wärmekapazität  $mc$  mit dem Druck ändern. Zunächst ließe sich die Halbwertszeit  $\tau$  durch Abschätzung des mittleren Energieverlustes eines Elektrons durch Stöße erster und zweiter Art ermitteln. Man berechnet die mittlere Stoßzahl, die notwendig ist, um die Hälfte des Energieüberschusses an das Bogen gas abzugeben. Aus der Stoßzahl ergibt sich dann die Halbwertszeit. Ist  $\tau_0$  die Halbwertszeit beim Druck  $p_0$  (760 mm Hg), so ist

$$\tau : \tau_0 = p_0 : p.$$

$\tau$  ist dem Druck umgekehrt proportional, weil die Anzahl der Stöße eines Elektrons in einer Sekunde mit dem Druck abnimmt. Die Wärmekapazität des Elektronengases ist gleich der eines einatomigen Gases gleichen Drucks und gleicher Temperatur. Die Dichte ist Gasdichte mal Ionisierungsgrad. Die Wärmekapazität eines einatomigen Gases beim Druck  $p$  und der Temperatur  $T$  ist

$$(mc)_{gas} = \frac{C_v + 2}{22\,414} \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-3} / \text{Grad},$$

wobei  $p_0$  760 mm Hg,  $T$  die Gastemperatur und  $T_0$  die Zimmertemperatur sein sollen.  $C_v$  ist für einatomige Gase ziemlich genau 3 cal/Grad. Für die Wärmekapazität des Elektronengases folgt daraus

$$(mc)_{el} = (mc)_{gas} \cdot \text{Ionisierungsgrad} = \frac{5}{22\,414} \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0} \cdot x.$$

Der Ionisierungsgrad  $x$  läßt sich aus der Eggert-Sahaschen Theorie berechnen; danach ist

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{1}{p} \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}.$$

Da  $x$  klein gegen 1 ist (etwa  $10^{-3}$ ), lasse ich  $x^2$  im Nenner fort. Ist  $x_0$  der Ionisierungsgrad bei  $p_0$ , so folgt durch Division der beiden Saha-Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0} &= \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/2}, \\ x &= x_0 \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} (mc)_{el} &= \frac{5}{22\,414} \frac{T_0}{T} \frac{p}{p_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{1/2} \cdot x_0, \\ &= \frac{5}{22\,414} \frac{T_0}{T} \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/2} \cdot x_0. \end{aligned}$$

Setze ich die berechneten Werte für  $mc$  und  $\tau$  in die Gleichung für  $T_{el} - T_{gas}$  ein, so erhalte ich

$$T_{el} - T_{gas} = \frac{22\,414}{5 \ln 2} \cdot \frac{L \cdot \tau_0}{x_0} \frac{T}{T_0} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{3/2}. \quad (2)$$

Wie man aus (2) sieht, muß die Differenz zwischen Elektronentemperatur und Gastemperatur mit  $(1/p)^{3/2}$  zunehmen, wächst also mit abnehmendem Druck  $p$ , entsprechend den Langmuirschen Messungen.

Mit zunehmender Elektronentemperatur werden, falls diese für die Lichtanregung maßgebend ist, auch die Anregungsbedingungen für Linien hoher Anregungsspannung günstiger. Es ist also mit zunehmendem  $T_{el}$  ein Auftreten hochangeregter Linien zu erwarten. Deren Intensität ist bei Vernachlässigung der Absorption, die in der Lichtbogensäule bei Auswahl geeigneter Linien gering ist,

$$I = N \cdot h \nu \cdot A_{nm} \cdot G_n \cdot e^{-\frac{E_a}{kT}}.$$

Hierin ist  $N$  die Zahl der Atome im betrachteten Volumen  $v$ , also  $= p \frac{N_0 v}{p_0}$ ,  $E_a$  die Anregungsenergie des oberen Zustandes der Linie,  $A_{nm}$  die Übergangswahrscheinlichkeit,  $G_n$  das statistische Gewicht für den Ausgang der Linien.

Die Werte für diese Konstanten interessieren in dieser Ausführung nicht, da sie das Endergebnis nicht entscheidend beeinflussen.

Ich logarithmiere die Gleichung und setze den Wert von  $T_{el}$  ein:

$$\ln I = \ln \left( N_0 \frac{v}{p_0} A_{nm} G_n E_a \right) + \ln p - \frac{E_a}{k T_{gas} + k R \left( \frac{p_0}{p} \right)^{3/2}}.$$

$$R \text{ ist darin } \frac{22414}{5 \ln 2} \cdot \frac{L \cdot \tau_0}{x_0} \cdot \frac{T}{T_0}.$$

Der Verlauf von  $\ln I$  ist also durch eine Gleichung von der Form

$$\ln I = A + \ln p - \frac{B}{C + D \left( \frac{p_0}{p} \right)^{3/2}}$$

gegeben. Den Verlauf dieser Funktion bringen wir beim Vergleich der theoretisch ermittelten mit den gemessenen Werten der Intensitäten.

In der folgenden Untersuchung wurde der Anstieg der Elektronentemperatur in Abhängigkeit vom Druck (10 bis 50 mm Hg) gemessen.

**Versuchsordnung.** Die Versuchsanordnung zur Ausführung der Messungen geht aus Fig. 1 hervor. In einem Eisentopf (200 · 300 · 500 mm) von etwa 30 Liter Inhalt befand sich auf einer Eisenschiene angebracht ein Bogenstativ, dessen Elektroden von außen durch einen kleinen Elektromotor verstellt werden konnten. Die Schiene war an der Verschlußplatte des Gefäßes befestigt, diese war mit ihrer Auflage am Topf sorgfältig ab-



gefräst worden, eine Gummidichtung glich die letzten Unebenheiten aus, so daß bei einem Druck von etwa 5 mm Hg nur noch ein Druckanstieg von 2 mm Hg in 15 Minuten beobachtet wurde. Da die Aufnahmeserie, welche in dem Druckintervall von 10 bis 50 mm Hg ausgeführt wurde, nur 6 bis 8 Minuten, die Belichtungszeit einer einzigen Aufnahme aber nur 40 sec dauerte, konnte der geringe Druckanstieg während einer Aufnahmeserie vernachlässigt werden, er liegt vollkommen innerhalb der Fehlergrenzen. Das Licht der Bogensäule fiel durch ein in die Stirnwand des Topfes eingesetztes Fenster, durch die Abbildungslinse und die Stufenblende in den

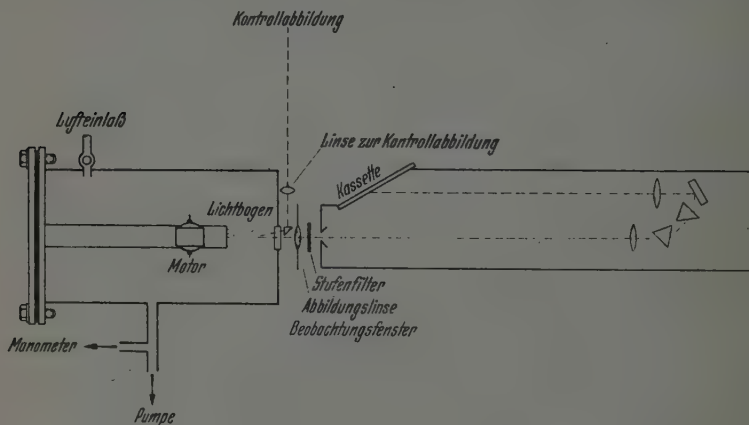


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung.

Spektrographen. Zwischen Beobachtungsfenster und Linse war noch ein kleines Prisma seitlich in den Strahlengang geschoben; diese erzeugte auf einem Schirm in Verbindung mit einer Linse und einem Spiegel eine Kontrollabbildung des Lichtbogens. Das Platinstufenfilter von Zeiss hatte eine Stufenhöhe von 1,1 mm. Zum Evakuieren der Anordnung diente eine Ölpumpe. Es wurde ein im Institut gebauter Zweiprismen-Glasspektrograph mit einem Auflösungsvermögen von 4000 bei 6500 Å und einem Öffnungsverhältnis von 1:28 benutzt.

**Elektroden.** Zu den Messungen gelangten ausschließlich Kohleelektroden zur Anwendung, welche nach dem im Institut von Hörmann<sup>1)</sup> und Bauer ausgearbeiteten Verfahren durch kurzdauerndes Ausglühen bei etwa 3500°K vorher sorgfältig gereinigt worden waren. Da die Elektrodenhalter am Bogenstativ durch ein auf derselben Achse geschnittenes Links- und Rechts-

<sup>1)</sup> H. Hörmann, ZS. f. Phys. 97, 544, 1935.

gewinde gleichmäßig gegeneinander verstellt wurden, mußte der Abstand der Elektroden durch Auswahl ihrer Durchmesser konstant gehalten werden. Der zur Messung benutzte Teil des Bogens mußte nämlich recht genau mit Hilfe der Kontrollabbildung stets auf derselben Höhe gehalten werden.

Der Abstand der Elektroden war bei einem Durchmesser der Kathode von 2,5 mm und der Anode von 3,8 mm hinreichend konstant. Da bei den niederen Drucken infolge Mangel an Sauerstoff der Kohlenstoff nicht mehr so stark zu  $\text{CO}_2$  verbrennt, verkürzen sich die Elektroden bei Betrieb des Lichtbogens nur noch sehr wenig. Sind die Kohlen nicht homogen — das Gefüge der Kohlen wird durch Sublimation der Verunreinigungen aus der Kohle bei der Reinigung oft nicht unerheblich gestört —, so brennen sie bei niedrigen Drucken nur sehr unregelmäßig ab; dies macht sich besonders auf der Kathode bemerkbar, wo der Kathodenbrennfleck auf der „gezahnten“ Elektrodenoberfläche dauernd hin- und herspringt; quantitativ auszuwertende Aufnahmen sind durch diese Erscheinung vor der Kathode natürlich unmöglich. Aus diesem Grunde wurden auch alle quantitativen Messungen mit Aufnahmen, bei welchen ein Teil der Gassäule dicht vor der Anode zur Belichtung ausgenutzt worden war, durchgeführt.

*Auswahl des Versuchselements.* Zur Messung des Verhaltens der Anregungstemperatur mußte ein Element ausgewählt werden, das schwer anregbare Linien in dem zugänglichen Spektralbereich besitzt, ferner mußte das Element bei Zimmertemperatur bereits einen genügenden Dampfdruck besitzen. Wasserstoff erwies sich als dafür sehr geeignet. Eingehende Versuche zeigten, daß bereits der Wasserdampfgehalt der Luft vollkommen ausreicht, um bei Drucken unter 50 mm Hg eine kräftige Schwärzung der Balmer-Serie hervorzurufen.

#### *Der Intensitätsverlauf im Spektrum längs der Achse der Lichtbogensäule.*

Nach genauer Justierung der Abbildungslinse und der Lichtquelle auf die optische Achse des Kollimators wurde zunächst der Lichtbogen auf den Spalt abgebildet; es war darauf zu achten, daß Anode und Kathode auf der gleichen Stelle des Spaltes blieben, damit bei der Aufnahme keine Überlagerung der verschiedenen Teile des Lichtbogens eintreten konnte. Eine Belichtungszeit von 20 sec erwies sich als ausreichend, um ein gut geschwärztes Spektrum zu erzeugen.

Der Verlauf der Intensität längs der Bogensäule zeigte dicht vor der Kathode einen starken Anstieg <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> H. Witte, ZS. f. Phys. 88, 415, 1934; H. Nagaoka u. Y. Sugiura, Jap. Journ. of Phys. 3, 45, 1924.

Dicht hinter diesem Bereich trat ein deutliches Intensitätsminimum auf, das auch für die CN-Bandenlinien vorhanden war. Darüber befand sich ein kleiner Raum, in dem die Intensität wiederum merklich anstieg. Darauf folgte erneut ein Minimum; erst dann setzte die gleichmäßige Linienschwärzung der Lichtbogensäule ein. Diese Erscheinung der Intensitätsminima hat eine auffallende Ähnlichkeit mit den Dunkelräumen bei der Glimmentladung.

Mit zunehmendem Druck verschwanden die Linien der Balmer-Serie zunächst in der Lichtbogensäule,  $H_{\alpha}$  bei einem Druck von etwa 70 bis 80 mm Hg, dagegen war  $H_{\alpha}$  in der negativen Glimmschicht noch bis zu 140 mm Hg sichtbar.

Mit dieser Grenze der Wahrnehmbarkeit stimmt es gut überein, daß in der Bogensäule das Auftreten der Prädissoziation im Spektrum des AlH bis zu Drucken von 140 mm verfolgt werden konnte. Nach der von Olsson<sup>1)</sup> gegebenen Deutung ist diese von Mörikofer<sup>2)</sup>, Ericksson und Hulthén<sup>3)</sup>, Bengtsson und Rydberg<sup>4)</sup>, Farkas<sup>5)</sup> und Wurm<sup>6)</sup> untersuchte Erscheinung an das Auftreten von Feldanregung geknüpft und ein besonders empfindliches Mittel zum Nachweis von Störungen des thermischen Gleichgewichts.

Wie vorhin schon erwähnt wurde, war der Kathodenbrennfleck bei Drucken von 10 mm Hg und weniger sehr unruhig; oft befand er sich hinter der Kathode, so daß die verstärkende Wirkung in der Glimmschicht für die Aufnahme verlorenging. Diese Intensitätsschwankungen dicht vor der Kathode zeigten alle Aufnahmen. Dagegen waren in dem an die Anode anschließenden Teil der Lichtbogensäule recht konstante Intensitätswerte zu beobachten. Alle quantitativen Messungen wurden deshalb unter Ausnutzung eines kleinen Bereiches der Bogensäule unmittelbar vor der Anode ausgeführt. Hierzu wurde der Lichtbogen scharf in die Optik des Spektrographen abgebildet; dadurch wird

1. eine gleichmäßige Ausleuchtung des Spaltes erzielt,
2. kann man durch Einsetzen von Blenden an der Stelle, wo die scharfe reelle Abbildung des Lichtbogens erzeugt wird, nicht erwünschte Teile des Bogens von der Erzeugung des Spektrums ausschließen.

---

<sup>1)</sup> E. Olsson, ZS. f. Phys. **104**, 402, 1937; Arkiv för matem., astr. o. fysik **26** B, Nr. 4. — <sup>2)</sup> W. Mörikofer, Diss. Basel 1925. — <sup>3)</sup> G. Ericksson u. E. Hulthén, ZS. f. Phys. **34**, 775, 1925. — <sup>4)</sup> E. Bengtsson u. R. Rydberg, ZS. f. Phys. **59**, 540, 1930. — <sup>5)</sup> L. Farkas, ZS. f. Phys. **70**, 733, 1931. — <sup>6)</sup> K. Wurm, ZS. f. Phys. **76**, 309, 1932.

Das ist besonders zur Vermeidung des störenden Anodenkontinuums wichtig. Die Elektroden wurden mit Hilfe der Kontrollabbildung auf gleicher Höhe gehalten.

*Ausführung einer Meßreihe.* Zur Feststellung der Schwärzungskurven wurden die Intensitätsmarken mit dem vorhin erwähnten Platinstufenfilter von Zeiss aufgenommen. Der Topf wurde zunächst bis auf 9 mm Hg evakuiert; nach genauer Einstellung der Elektroden wurde 40 Sekunden belichtet, der Druck nach der Aufnahme gemessen, erst dann konnte der neue Druck durch Zulassen von Luft hergestellt werden. Es wurde während der ersten Aufnahme durchschnittlich eine Druckerhöhung von 3 mm Hg gemessen. Nach den vorhergehenden Angaben über die Größe der Fehler, die durch Undichtigkeiten in der Apparatur entstehen können, kann diese Druckerhöhung nicht darauf beruhen. Sie liegt vielmehr an dem starken Temperaturanstieg im Topf während der ersten Aufnahme. Die Temperaturerhöhung läßt sich aus der Zustandsgleichung für ideale Gase berechnen. Es ist

$$p \cdot V = \nu R T,$$

$$p = \text{Druck in mm Hg,}$$

$$V = \text{Volumen der eingeschlossenen Gasmenge (30 Liter),}$$

$$\nu = \text{die eingeschlossene Gasmenge in Molen,}$$

$$T = \text{absolute Temperatur.}$$

Während einer Aufnahme bleibt die eingeschlossene Gasmenge die gleiche, es kann sich also mit dem Druck nur noch die Temperatur ändern. Nenne ich  $p_1$ ,  $T_1$  Druck und Temperatur vor der Messung,  $p_2$ ,  $T_2$  Druck und Temperatur nach der Messung, so erhalte ich:

$$p_1 V = \nu R T_1,$$

$$p_2 V = \nu R T_2;$$

durch Division erhält man

$$T_2 = T_1 \frac{p_2}{p_1}.$$

Bei 9 mm Hg und 298° C und einem Anstieg von 3 mm Hg ergibt sich eine Temperaturdifferenz von 100° C. Da im Bogen die Temperatur etwa 7000° beträgt, also sehr groß gegen die Temperatur des eingeschlossenen Gases ist, wird die Intensität der Linien  $H_a$  und  $H_\beta$  nicht primär vom Druck abhängen — diesen kann ich ja durch künstliche Erhöhung der Gastemperatur vergrößern, ohne daß sich die Anregungsverhältnisse wesentlich ändern ( $T$  im Bogen groß gegen  $T$  — Gas!) — sondern von der Gasdichte. Diese bleibt nun offenbar während einer Aufnahme konstant; ihre

Zunahme nach der Zulassung von Luft läßt sich berechnen, wenn ich annehme, daß sich die Temperatur während der kurzen Zeit der Druckerhöhung nicht ändert; der Energieverbrauch durch Erwärmung der zugeführten Gasmenge und der damit verbundene Temperaturabfall kann vernachlässigt werden, weil die Wärmekapazität der zugeführten Gasmenge gering ist gegenüber der der Gefäßwände.

Nach Definition der Dichte ist

$$\varrho = \frac{G}{V}$$

( $G$  = Masse der eingeschlossenen Gasmenge). Nun ist das Gewicht eines Mols eines Gases gleich seinem Molekulargewicht, also ist

$G = vM$ , da rein zahlenmäßig der Wert des Gewichtes mit dem der Masse übereinstimmt,

$M$  = Molekulargewicht.

Daraus ergibt sich der Zusammenhang zwischen  $\varrho$  und  $v$

$$\varrho = \frac{vM}{V},$$

$$v = \frac{\varrho \cdot V}{M}.$$

Setze ich nun an Stelle von  $v$  mit Hilfe der obigen Beziehung  $\varrho$  in die Zustandsgleichung ein, nenne ich ferner  $p_2$  und  $\varrho_1$  Druck und Dichte vor,  $p_3$  und  $\varrho_2$  Druck und Dichte nach der Zuführung von Luft, so erhalte ich:

$$p_2 \cdot V = \frac{\varrho_1 V}{M} R T_2,$$

$$p_3 \cdot V = \frac{\varrho_2 \cdot V}{M} R T_2.$$

Hieraus berechnet man durch Division der beiden Gleichungen

$$\varrho_2 = \frac{p_3}{p_2} \varrho_1.$$

Daraus lassen sich die Verhältnisse der Gasdichten und ihre absoluten Werte bei den einzelnen Aufnahmen bequem ermitteln.

Es wurde die Intensität von  $H_\alpha$  bei etwa 10, 20, 30, 40 und 50 mm Hg gemessen,  $H_\beta$  konnte infolge der Lage innerhalb der mit merklicher Intensität auftretenden CN-Banden nicht zur Messung herangezogen werden.

Da die Intensität der Linien merklich von der Leistung in der Lichtbogensäule abhängt (siehe auch theoretisch errechnete Formel), mußten für die einzelnen Aufnahmen die Strom- und die Spannungswerte gemessen

werden. In der Formel für  $\ln I$  ist die Leistung  $L$  pro  $\text{cm}^3$  des Bogengases zu verstehen. Hier werden zunächst die Leistungen pro  $\text{cm}$  der Lichtbogensäule bestimmt. Die Umrechnung auf  $1 \text{ cm}^3$  des Bogengases ergibt einen Faktor von etwa 30. Die Berechnung des Faktors erfolgt nach dem von Hörmann<sup>1)</sup> gemessenen wirksamen Querschnitt des Bogens bei Normaldruck. Da bei niederen Drucken keine Verbreiterung der Bogensäule beobachtet wurde, dürfte der Wert seine Gültigkeit behalten. Die Leistung pro  $\text{cm}$  der Bogensäule wurde aus der Längsfeldstärke und der Stromstärke ermittelt. Zur Bestimmung der Längsfeldstärke wurden die Spannungswerte  $P$  bei drei Abständen (5, 10, 15 mm) gemessen ( $i = \text{const}$ ).

Tabelle 1. Leistung in der Bogensäule.

Druck	$i$	$P_{5 \text{ mm}}$	$P_{10 \text{ mm}}$	$P_{15 \text{ mm}}$	$E$	$L/\text{cm}$
9 mm	7,5 Amp.	39 Volt	55 Volt	71 Volt	32 Volt/cm	240 Watt
20 „	7,3 „	46 „	69 „	91 „	45 „	328 „
30 „	6,8 „	56 „	78 „	100 „	44 „	298 „
40 „	6,6 „	61 „	83 „	105 „	44 „	290 „
50 „	6,6 „	63 „	84 „	106 „	43 „	285 „

### *Entwicklung, Photometrierung, Auswertung.*

Die Aufnahmen wurden 5 Minuten bei  $19^\circ$  Entwicklertemperatur in Glycīnlösung entwickelt, sie wurden mit einem feinhaarigen breiten Pinsel während des Entwicklungsvorganges gebürstet; dadurch wird vermieden, daß die Ränder der Linien stärker entwickelt werden, als ihre mittleren Teile. Es wurde Perutz-Peromminiafilm benutzt. Die Photometrierung erfolgt mit einem Spektrallinienphotometer von Zeiss.

Die Intensitätsverhältnisse wurden durch Aufschiebung der Schwärzungskurven nach Ornstein, Moll und Burger in üblicher Weise ermittelt, die Untergrundschwärzung, die bei kleinen Intensitäten ins Gewicht fällt, durch Messungen neben der Linie berücksichtigt.

### *Vergleich der Messung mit dem erwarteten Verlauf.*

Um die theoretisch zu erwartenden Werte für  $\ln I$  zu ermitteln, müssen in der vorhin aufgestellten Formel die Konstanten bestimmt werden. Es ist

$$\ln I = A + \ln p - \frac{B}{C + D \left( \frac{p_0}{p} \right)^{3/2}}.$$

<sup>1)</sup> H. Hörmann, ZS. f. Phys. 97, 539, 1935.



$A$  bewirkt nur eine Verschiebung der Kurve und wird deshalb nicht beachtet.  $B$  ist gleich  $E_a$  und für  $H_a$  in cal umgerechnet  $4,62 \cdot 10^{-10}$  cal.  $C$  ist  $= kT_{gas}$ , wobei

$$\begin{aligned} k &= 1,371 \cdot 10^{-16} \text{ erg/grad,} \\ &= 4,13 \cdot 10^{-24} \text{ cal/grad} \end{aligned}$$

ist.  $T_{gas}$  wird mit  $6 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{K}$  angenommen. Somit ist  $C = 2,48 \cdot 10^{-20}$  cal.

$D$  muß für die verschiedenen Leistungen bei einer Meßreihe betrachtet werden und ist

$$D = k \frac{2,24 \cdot 10^{-4} T}{5 \ln 2 T_0} \frac{\tau_0}{x_0} L.$$

Die Leistung  $L$  (s. Tabelle 1) muß noch auf cal/sec umgerechnet und auf  $1 \text{ cm}^3$  des Gases bezogen werden. Hierzu soll der Radius des stromleitenden Teiles der Lichtbogensäule im Einklang mit Messungen von Hörmann<sup>1)</sup> zu  $0,17 \text{ cm}$  angenommen werden. Für  $T$  ist die Gastemperatur mit  $7000^\circ$  zu setzen,  $T_0$ , die Zimmertemperatur, wählen wir zu  $291^\circ \text{ K}$ , so daß  $T/T_0 = 24$  wird.

Für  $x_0$  dürfen wir mit dem von Hörmann<sup>1)</sup> aus der Leitfähigkeit des Entladungskanals bestimmten Wert von  $2 \cdot 10^{-3}$  rechnen, der eine untere Grenze darstellt, aber vermutlich nicht um mehr als den Faktor 2 vom wahren Werte abweicht.

Weniger gut ist  $\tau_0$ , die Akkomodationszeit der Elektronentemperatur, bekannt. Mannkopf (l. c.) schätzt sie zu weniger als  $5 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$ , mit diesem Wert führt jedoch die Berechnung von  $\ln I$  noch zu einem viel zu steilen Anstieg im Druckbereich von 10 bis 50 mm Hg. Man muß daher zu viel kleineren Werten von  $\tau_0$  übergehen, erst mit  $1$  bis  $4 \cdot 10^{-11} \text{ sec}$  erhält man eine Steigung, die im Gebiet von 20 bis 40 mm Druck hinreichend mit der gemessenen Kurve übereinstimmt. In Fig. 2 sind Messung und Rechnung einander gegenübergestellt.

Wie die Verhältnisse bei Drucken von etwa 20 mm und kleiner liegen, kann mit Hilfe der theoretisch bestimmten Formel sicher nicht ohne weiteres gesagt werden, da die Gastemperatur bei niederen Drucken absinkt, andererseits der Ionisationsgrad nicht mehr durch die Gastemperatur allein, sondern in zunehmendem Maße durch die Elektronentemperatur bestimmt wird. Die gemessene Kurve zeigt demgemäß bei kleinen Drucken eine zunehmende Abweichung von den berechneten Werten.

<sup>1)</sup> H. Hörmann, ZS. f. Phys. 97, 539, 1935.

Wie man sieht, ist die Steigung der berechneten Kurve sehr empfindlich gegen kleine Änderungen von  $\tau_0$  und entspricht nur zwischen 1 und  $4 \cdot 10^{-11}$  sec dem gemessenen Verlauf. Es fragt sich, ob wir mit diesem

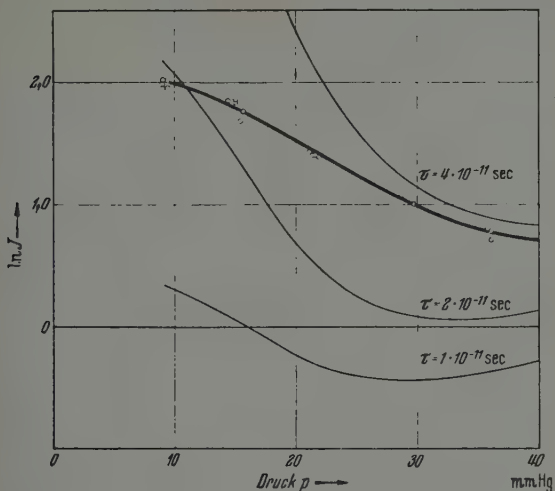


Fig. 2. Intensitätsverlauf von  $H_{\alpha}$  mit abnehmendem Druck, gemessen und aus Elektronentemperaturen berechnet.

Wert von  $\tau_0$  eine plausible Differenz zwischen der Elektronen- und Gas-temperatur bei Atmosphärendruck erhalten. Einsetzen in Formel (2) ergibt für  $\tau_0 = 2 \cdot 10^{-11}$  sec und  $x_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ :

$$T_{el} - T_{gas} = 0,102^{\circ}.$$

Angesichts der reichen Austauschmöglichkeiten zwischen den Freiheitsgraden des Bogengases und des Elektronengases scheint dieser sehr kleine Wert nicht unmöglich, zumal die bisherige Schätzung<sup>1)</sup> mit weniger als  $20^{\circ}$  nur eine obere Grenze geliefert hat.

### Zusammenfassung.

Unter gewissen vereinfachenden Annahmen, wie der eines scharf begrenzten Entladungskanals der Lichtbogensäule, kann eine Näherungsformel für den Gang der Elektronentemperatur mit dem Gasdruck angegeben werden. Sie läßt Voraussagen über den Intensitätsanstieg von Spektrallinien hoher Anregungsspannung mit abnehmendem Druck zu.

<sup>1)</sup> R. Mannkopff, l. c.

An der Linie  $H_{\alpha}$  der Balmer-Serie wurde dieser Anstieg der Elektronentemperatur und der Linienintensität bei Drucken bis zu 9 mm Hg abwärts untersucht. Danach tritt  $H_{\alpha}$  erstmalig bei etwa 70 bis 80 mm Hg auf. Die Intensität der Linie in Abhängigkeit vom Druck wird für Drucke zwischen 9 und 50 mm Hg gemessen. Im Druckbereich bis etwa 20 mm abwärts besteht Übereinstimmung der berechneten Kurvenform mit den gemessenen Werten, falls der Rechnung für die Akkomodationszeit der Elektronentemperatur ein Betrag von 2 bis  $3 \cdot 10^{-11}$  sec und ein Ionisationsgrad von  $2 \cdot 10^{-3}$  zugrunde gelegt wird. Bei Drucken unterhalb 20 mm Hg ist die Gültigkeit der verwendeten einfachen Abschätzung mehr und mehr in Frage gestellt.

Für Atmosphärendruck errechnet sich mit der gefundenen niedrigen Akkomodationszeit eine Differenz zwischen Elektronen- und Gastemperatur von nur  $0,1^{\circ}$ .

Dem bisherigen Direktor des Mineralogischen Instituts der Universität Göttingen, Herrn Prof. Dr. F. K. Drescher-Kaden, bin ich für die Förderung der Untersuchung zu besonderem Dank verpflichtet. Herrn Prof. Dr. Mannkopff danke ich für die Anregung, sowie die wertvolle Unterstützung bei der Ausführung der Arbeit. Die Veröffentlichung hat sich durch meine erneute Einberufung zum Wehrdienst verzögert.

*Göttingen, Mineralogisches Institut der Universität, im August 1942.*

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

## Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für Selbststrahler.

Von A. Recknagel.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942.)

Zur Berechnung der Auflösungsgrenze wird das Elektronenmikroskop für Selbststrahler (Emissionsmikroskop) durch ein homogenes Beschleunigungsfeld und eine fehlerfreie Elektronenlinse ersetzt. Mit Hilfe der Schrödingerschen Wellengleichung wird untersucht, wie sich der Elektronenstrom eines Kathodenpunktes in dem Beschleunigungsfeld verhält. Daraus ergibt sich eine Wellentheorie der sphärischen Aberration für das Beschleunigungsfeld. Das Auflösungsvermögen kann berechnet werden, soweit es durch sphärische (und chromatische) Aberration und durch Wellenerscheinungen begrenzt ist. Die auflösbare Strecke liegt etwa in der Größenordnung der Wellenlänge, die an der Kathode auftritt. Sie nimmt mit steigender Feldstärke ab, wenn auch schwächer als nach der geometrisch-optischen Theorie. Bei dem Emissionsmikroskop von Mecklenburg sollte eine Strecke von etwa  $5\text{ m}\mu$  noch auflösbar sein. Mit wachsender Feldstärke geht der Elektronenstrom immer mehr über die Grenze des geometrisch-optisch erlaubten Strahlungskegels hinaus. Dadurch muß schließlich eine mechanische Ausblendung eintreten, auch wenn dies geometrisch-optisch gar nicht möglich ist. Auf diese Weise wird eine grundsätzliche Auflösungsgrenze festgelegt, die der optischen Auflösungsgrenze entspricht. Eine wesentliche Verbesserung des Auflösungsvermögens durch Ausblenden der fehlerhaften Randstrahlen wurde in dem speziellen durchgerechneten Feld nicht gefunden, dagegen wird die Scharfstellung bei Ausblendung weniger kritisch

Das Auflösungsvermögen optischer Mikroskope wird bekanntlich dadurch eingeschränkt, daß nicht alles von den Dingpunkten ausgehende Licht zum Bild beiträgt, daß die abbildenden Wellenbündel vielmehr räumlich durch die Blenden der Linsenfolge begrenzt sind. Maßgebend für den Zahlenwert der Auflösungsgrenze ist neben der Lichtwellenlänge die Blendenöffnung. Diese ist an sich willkürlich bis auf die Bedingung, daß bei der äußerstenfalls zulässigen Blendengröße noch ein geometrisch-optisch einwandfreies Bild entsteht. Die Unterscheidung von Selbstleuchtern und Nichtselbstleuchtern, die durch Kohärenzfragen bedingt ist und mit der Auflösungsbegrenzung durch die Blenden an sich nichts zu tun hat, führt nun zu zwei etwas verschiedenen Formen der Auflösungsbedingung: Eine nicht selbstleuchtende Struktur wird aufgelöst, wenn die wesentlichen Teile des von ihr abgebeugten Lichtes durch die Blenden hindurchgelangen und zum Bild beitragen. Eine selbstleuchtende Struktur wird aufgelöst, wenn

das Licht der verschiedenen Strukturteile in solcher Weise an den Blenden gebeugt wird, daß die Beugungsbilder der einzelnen Strukturteile genügend getrennt sind.

In der Elektronenoptik liegen die Verhältnisse bekanntlich gleichartig, wenn die oben erwähnte Bedingung für die Blendengröße erfüllt ist. Gerade diese Bedingung ist aber bei den heute verwendeten Elektronenlinsen häufig verletzt. Infolge der Bildfehler dieser Linsen erhält man kein ausreichendes Bild, wenn das Strahlenbündel die ganze Linsenöffnung ausfüllt. Dadurch entstehen Unterschiede gegenüber den einfachsten optischen Verhältnissen, die bisher erst für Nichtselbstleuchter (Durchstrahlungsmikroskop) untersucht wurden. Folgendes hat sich dabei ergeben: Bei Beleuchtung mit parallelen Elektronenstrahlen wird eine Struktur dann aufgelöst, wenn die wesentlichen Teile des abgebeugten Elektronenstromes durch denjenigen Teil der Linsenfolge hindurchgehen, der eine einwandfreie Strahlvereinigung gewährleistet. Ist die Struktur kleiner, die Beugungserscheinung also weiter ausgebreitet, so können die abgebeugten Elektronen zwar noch durch die Linsenfolge hindurchgelangen; sie liefern jedoch wegen der Fehlerhaftigkeit der Linsen kein ausreichendes Bild. Infolgedessen hängt das Auflösungsvermögen nicht nur von der Elektronenwellenlänge ab, sondern auch noch explizit von einer Größe, die die Linsengüte kennzeichnet (Konstante der sphärischen Aberration). In den üblichen optischen Formeln tritt im Gegensatz dazu die Linsengüte nur implizit als äußerstenfalls erlaubte Blendenöffnung auf. Diese Betrachtung ist aber noch nicht vollständig, weil man die Bestrahlung mit parallelen Bündeln nicht streng verwirklichen kann, weil man vielmehr stets mit Bündeln endlicher Öffnung arbeitet. Wegen der Bildfehler hängt das Auflösungsvermögen auch von der Größe dieser Bündelöffnung ab. Daher muß bei den Elektronen-Übermikroskopen die Öffnung des bestrahlenden Bündels so klein sein (etwa  $10^{-3}$ ), daß nur der einwandfreie Teil der Linse von Elektronen getroffen wird.

Bei den Elektronenmikroskopen für Selbststrahler, als deren Vertreter das Immersionsobjektiv von Brüche und Johannson<sup>1)</sup> genannt sei, liegen die Unterschiede gegenüber den optischen Mikroskopen tiefer. Auch hier ist die Strahlvereinigung im allgemeinen so wenig ausreichend, daß das Auflösungsvermögen stark von den Abbildungsfehlern abhängen wird. Dazu kommt aber bei den hier allein interessierenden Selbststrahlungsmikroskopen für Kathodenuntersuchungen noch eine weitere, den optischen

<sup>1)</sup> E. Brüche u. H. Johannson, Naturwiss. 20, 353, 1932.

Mikroskopen fremde Schwierigkeit. Die Elektronen verlassen die Kathode mit sehr kleiner Geschwindigkeit, beispielsweise bei Glühemission mit thermischen Energien. Daher müssen sie durch ein elektrisches Feld stark beschleunigt werden, wenn sie zu einer Abbildung verwendet werden sollen. Das Beschleunigungsfeld bündelt aber die Elektronen üblicherweise so sehr, daß alle Elektronen, auch die senkrecht zur Kathodennormalen ausgesandten, durch die Linsen hindurchgelangen. Eine Strahlbegrenzung durch Blenden im geometrisch-optischen Sinn tritt also gar nicht auf. Die optische Betrachtung, der zufolge die Auflösungsbegrenzung durch Beugung an den Blendenrändern entsteht, läßt sich daher zunächst gar nicht übertragen. Man weiß ja nicht, was der beugenden Linsenblende entspricht. Die Klärung dieser Frage erfordert eine wellenmechanische Untersuchung der Abbildung, die in der vorliegenden Arbeit gegeben wird.

Die Aufgabestellung der vorliegenden Arbeit läßt sich somit in die folgenden beiden Teilfragen fassen: In welcher Form wird das Auflösungsvermögen durch die Bildfehler begrenzt? Spielen die Blenden eine Rolle für das Auflösungsvermögen, selbst wenn eine geometrisch-optische Ausblendung nicht möglich ist? Zu der ersten Frage sei bemerkt, daß schon früher eine geometrisch-optische Theorie der Bildfehler beim Selbststrahlungs-Elektronenmikroskop gegeben und mit Hilfe dieser Rechnungen das Auflösungsvermögen abgeschätzt wurde<sup>1,2)</sup>. Eine genaue Theorie erfordert aber, wie es aus der Optik bekannt ist, eine wellenmechanische Berechnung der Abbildung. Es ist also eine *Wellentheorie* der Bildfehler zu entwickeln. Man wird ein ähnliches Ergebnis erwarten, wie es für Nichtselbststrahler oben dargestellt wurde. Bei der zweiten Frage zeigt sich, daß nach der Wellenmechanik ein Teil des Elektronenstromes außerhalb des geometrisch-optisch erlaubten Gebietes verläuft, und zwar um so mehr, je größer das Feld an der Kathode ist (Tunneleffekt). Auf diese Weise kann die mechanische Ausblendung schließlich doch eine auflösungsbegrenzende Rolle spielen.

*Grundlagen der Rechnung.* Bei der Wellentheorie der Bildfehler und der Auflösungsgrenze läßt sich eine Erfahrung ausnutzen, die sich bei der geometrisch-optischen Berechnung der Bildfehler ergeben hatte (I). In erster Linie wird das Auflösungsvermögen durch die grundsätzlich unvermeidbare sphärische und chromatische Aberration bestimmt. Diese Fehler ergeben geometrisch-optisch einen auf das Objekt bezogenen Zerstreuungs-

<sup>1)</sup> A. Recknagel, ZS. f. Phys. **117**, 689, 1941. Im folgenden als (I) zitiert.  
— <sup>2)</sup> W. Henneberg u. A. Recknagel, ZS. f. techn. Phys. **16**, 230, 1935.



kreis, dessen Radius  $r$  in Form einer Reihenentwicklung nach  $(\varepsilon/U)^{1/2}$  berechenbar ist:

$$r = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{U} \cdot l + \left( \frac{\varepsilon}{U} \right)^{3/2} \cdot C + \dots \quad (1)$$

Dabei ist  $U$  die Beschleunigungsspannung und  $\varepsilon$  diejenige Spannung, die der Austrittsenergie der Elektronen entspricht.  $l$  und  $C$  haben die Dimension von Längen. Da das Anfangsglied der Entwicklung mit  $\varepsilon/U$  multipliziert ist, wird man mit möglichst großen Beschleunigungsspannungen arbeiten, um die Fehler klein zu halten. In diesem Falle wird das Glied mit  $(\varepsilon/U)^{3/2}$  und die höheren gegen das erste Glied mit  $\varepsilon/U$  vernachlässigbar sein. Dann erhält man aber eine besonders einfache Formel, denn unabhängig von dem Feldverlauf im einzelnen ist der Radius des Zerstreuungskreises proportional zu  $\varepsilon/E$ , wo  $E = U/l$  die Feldstärke am Auftreffpunkt der optischen Achse auf die Kathodenoberfläche ist. Man muß also eine möglichst große Feldstärke an der Kathode erzwingen, um die Fehler klein zu halten. Durch dieses Ergebnis wird ein einfaches Schema zur Berechnung der Abbildungsfehler nahegelegt. Man denke sich das Immersionsobjektiv in zwei Teile zerlegt: Ein homogenes Feld  $E$ , das so groß ist wie das in Wirklichkeit an der Kathode herrschende Feld, und eine dahinter sitzende Elektronenlinse, die man als fehlerfrei betrachtet<sup>1)</sup>. Die Durchrechnung dieses Schemas führt in der Tat zu dem ersten Glied von (1).

Es ist erforderlich, sich wenigstens einen ungefähren zahlenmäßigen Überblick zu verschaffen, unter welchen Bedingungen dieses Schema der Wirklichkeit entspricht und wo es versagt. In Gleichung (1) bedeutet das erste Glied die sphärische Aberration des homogenen Feldes  $E$ , das zweite Glied enthält die sphärische Aberration der Linse und höhere Näherungsglieder des homogenen Feldes.  $C$  hängt in komplizierter Weise vom Feldverlauf ab. Man kann aber einen größenordnungsmäßig richtigen Überblick erhalten, wenn man für  $C$  einen bekannten Wert für die sphärische Aberration einer Linse einsetzt, z. B. den Wert für eine magnetische Linse<sup>2)</sup>. Sind die beiden Teilfehler von gleicher Größenordnung, d. h. gilt  $2l \approx (\varepsilon/U)^{1/2} \cdot C$ ,

<sup>1)</sup> Der Ersatz des abbildenden Feldes durch ein homogenes Beschleunigungsfeld und eine Linse war ursprünglich direkt benutzt worden, um das Auflösungsvermögen von Selbststrahlungs-Mikroskopen (Bildwandlern) abzuschätzen (W. Henneberg u. A. Recknagel, l. c.). Die allgemeinen Formeln von (I) erweisen also auch die Berechtigung dieser früheren Rechnung. — <sup>2)</sup> Die Veränderlichkeit der sphärischen Aberration mit der Elektronenenergie (chromatischer Fehler) ist durch die Abhängigkeit von  $\varepsilon$  ausgedrückt, der chromatische Fehler der Gaußschen Näherung (Abhängigkeit des Vergrößerungsmaßstabes von der Elektronenenergie) kann vernachlässigt werden.

dann ist das oben beschriebene einfache Schema des Emissionsmikroskops nicht anwendbar. Wählt man beispielsweise  $l = 1/50$  cm,  $U = 250$  Volt, und nimmt man glühelektrische Elektronenauslösung an ( $\varepsilon = 0,1$  Volt), so sind die beiden Fehlerglieder bei  $C = 2$  cm von gleicher Größe. So große sphärische Fehler sind aber durchaus möglich. Die Größe  $C$  ist nämlich dem Radius  $r_0$  der benutzten Linse proportional  $C = r_0 A$ . Der Proportionalitätsfaktor  $A$  seinerseits wächst stark mit dem Verhältnis aus Brennweite und Linsenradius. Er nimmt (bei einigen vollständig durchgerechneten Linsen) einen Wert der Größenordnung 1 an, wenn Brennweite und Linsendurchmesser gleich groß sind<sup>1)</sup>. Man braucht also unter den oben vorausgesetzten Umständen nur einen Linsendurchmesser von einigen cm und eine etwa ebenso große Brennweite zu wählen, um aus dem Gültigkeitsbereich des einfachen Schemas herauszutreten. Die hier gewählten Verhältnisse sind aber sehr extrem, die praktisch benutzten Immersionsobjektive, insbesondere die für übermikroskopische Abbildung, fallen sämtlich unter das Schema. Bei diesen ist nämlich  $l \approx 1/3$  cm, der Linsenradius  $r_0$  etwa  $1/10$  cm und die Beschleunigungsspannung steigt bis zu 40 kV an. Daher ergibt sich  $2l \gg (\varepsilon/U)^{1/2} C$ , der Fehler des homogenen Feldes überwiegt tatsächlich.

Nach diesen Überlegungen ist man berechtigt, das vorgegebene Potentialfeld additiv aus zwei sich eventuell räumlich überlagernden Teilfeldern zusammenzusetzen. Das eine Teilfeld, das Beschleunigungsfeld genannt werde, soll folgende Eigenschaften haben: Das Potential soll — ähnlich wie beim homogenen Feld — nur abhängen vom Abstand zwischen Aufpunkt und Kathode, es soll dagegen nicht vom Abstand zwischen Aufpunkt und optischer Achse abhängen. An der Kathode hat das Potential den Wert 0, im Bildraum, sehr weit von der Kathode entfernt, soll es dem konstanten Wert  $U$  (Beschleunigungsspannung) zustreben. Der Potentialanstieg soll monoton erfolgen. An der Kathode soll die Feldstärke mit derjenigen übereinstimmen, die im wirklichen Feld am Auftreffpunkt der optischen Achse auf die Kathode herrscht. Das Potential soll also den in Fig. 1, Kurve  $A$  oder  $B$ , angedeuteten Verlauf haben: Nach Abzug dieses Beschleunigungsfeldes von dem vorgegebenen Gesamtfeld bleibt ein Rest übrig, der rotationssymmetrisch zur optischen Achse ist. Dieser Anteil soll als Vergrößerungsfeld bezeichnet werden, weil er die eigentliche vergrößerte Abbildung leistet. Das Beschleunigungsfeld erzeugt nur eine

<sup>1)</sup> A. Recknagel, Jahrb. d. AEG.-Forschung 7, 15, 1940; J. Dosse, ZS. f. Phys. 117, 722, 1941. Die gelegentlich angegebenen viel größeren experimentellen Werte sind vermutlich durch andere Fehler gefälscht (B. v. Borries u. E. Ruska, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. 19, 262, 1940).

„Rückverlegung“ der Kathode, d. h. die Elektronen scheinen nach Durchlaufen des Feldes von einer weiter zurückliegenden Kathode zu kommen, die als abzubildendes Objekt für das Vergrößerungsfeld dient. Optisch könnte man die Wirkung des Beschleunigungsfeldes als Abbildung im Maßstab 1:1 bezeichnen. Gerade die Fehler dieser „Abbildung“ sind aber nach den obigen Ausführungen geometrisch-optisch maßgebend für den

Gesamtfehler. Auch in der wellenmechanischen Betrachtung wird man sich zunächst auf diese Fehler beschränken.

Die Kenntnis des Linsenfeldes genügt jedoch noch nicht, wenn das Verhalten der Elektronen wellenmechanisch eindeutig festgelegt werden soll. Die Wellenfunktion muß im ganzen Raum bestimmt werden, man muß also auch das Potential kennen, das die Elektronen im Metall vorfinden. Für diesen

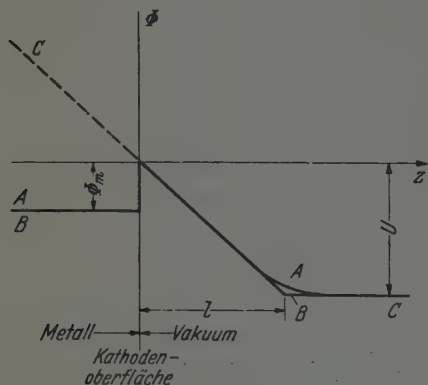


Fig. 1. Das Beschleunigungsfeld (schematisch).

Raum wird man natürlich möglichst einfache Annahmen machen, also beispielsweise das aus der Metalltheorie bekannte Topfmodell benutzen. Das Metall ist danach ein Raum mit konstantem positivem Potential  $\Phi_m$ . Am Metallrand, der Kathodenoberfläche, springt das Potential auf den Wert 0. Daran schließt sich im Außenraum das Beschleunigungsfeld an<sup>1)</sup> (Fig. 1, Kurven A, B).

In dem nunmehr festgelegten Potential werden die Bildfehler und das Auflösungsvermögen in folgender Weise bestimmt: Es wird eine punktförmige Elektronenquelle auf der Kathode angenommen und durch Lösen der Schrödingerschen Wellengleichung das Elektronenbündel dieser Quelle untersucht, nachdem es durch das Feld hindurchgegangen ist. Da nur der sphärische Fehler interessiert, soll der Quellpunkt dort liegen, wo die optische Achse auf die Kathodenoberfläche trifft. Diese Festlegung ist übrigens gleichgültig, solange nur das Beschleunigungsfeld betrachtet

<sup>1)</sup> Es berührt eigenartig, daß das Metallinnere Einfluß auf den Fokussierungsvorgang im Außenraum haben soll. In der Tat wird sich auch herausstellen, daß die Ergebnisse im allgemeinen weitgehend von der Wahl des Feldes im Metall unabhängig sind. Grundsätzlich muß man aber einen Einfluß des Metallinnern auf das Verhalten im Außenraum zulassen.

wird, weil dieses Feld unabhängig ist vom Abstand zwischen Aufpunkt und optischer Achse, d. h. weil es gar keine ausgezeichnete optische Achse besitzt. Die Größe des Zerstreuungskreises, über den der Elektronenstrom in der Bildebene verteilt ist, liefert ein Maß für die auflösbare Strecke. Zwei Punkte können nur dann aufgelöst werden, wenn sich bei der Überlagerung ihrer Zerstreuungskreise ein Intensitätsgebirge mit zwei deutlichen Gipfeln ergibt.

*Darstellung der Elektronenquelle.* Für die mathematische Durchrechnung wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem so in das Feld gelegt, daß die  $z$ -Achse mit der optischen Achse und die  $x$ - $y$ -Ebene mit der Kathodenebene zusammenfällt. Der Abstand von der optischen Achse wird  $r$  genannt:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Das elektrostatische Potential in irgendeinem Raumpunkt  $x, y, z$  wird mit  $\varphi(x, y, z)$  bezeichnet. Nach den Bedingungen, die das „Beschleunigungsfeld“ erfüllen soll, hängt  $\varphi$  nur von  $z$  ab:

$$\varphi(x, y, z) = \Phi(z).$$

Außerdem gilt die Normierungsbedingung

$$\Phi(0) = 0.$$

In diesem Feld lautet die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung für die zeitunabhängige<sup>1)</sup> Wellenfunktion

$$\Delta G + [\bar{\varepsilon} + \bar{\Phi}(z)] G = 0. \quad (2)$$

$\Delta$  ist der Laplacesche Operator. Mit dem Querstrich wird stets die Multiplikation einer Größe mit  $8\pi^2 m e / h^2$  gekennzeichnet, wo  $e$  und  $m$  Elektronenladung und -masse,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum ist. Es gilt also z. B.:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{8\pi^2 m e}{h^2} \cdot \varepsilon.$$

Der Querstrich tritt nur bei Potentialen auf und bezeichnet Größen, deren Dimensionen  $\text{cm}^{-2}$  ist. So ist

$$\bar{\varepsilon} = \frac{4\pi^2}{\lambda_k^2}, \quad (3')$$

$$\bar{\varepsilon} + \bar{U} = \frac{4\pi^2}{\lambda_b^2}, \quad (3'')$$

wo  $\lambda_k$  die Elektronenwellenlänge an der Kathode,  $\lambda_b$  diejenige der beschleunigten Elektronen ist.

Im Hinblick auf den allgemeinen Fall des rotationssymmetrischen Linsenfeldes werden Zylinderkoordinaten  $z, r, \psi$  benutzt. Durch Separation

<sup>1)</sup> Die zeitabhängige Wellenfunktion hat die Form  $u = G e^{-i\omega t}$  mit  $\omega = \frac{2\pi e \varepsilon}{h}$ .

in diesen Veränderlichen können sofort partikuläre Integrale angegeben werden. Beispielsweise sind die folgenden vom Drehwinkel  $\psi$  unabhängigen Funktionen Lösungen von (2):

$$W_{+-}(z, \alpha) \cdot J_0(\alpha r), \quad (4')$$

$$W_{-+}(z, \alpha) \cdot J_0(\alpha r). \quad (4'')$$

Dabei bedeutet  $J_0$  die Bessel-Funktion nullter Ordnung,  $\alpha$  ist ein Separationsparameter. Die Funktionen  $W_{+-}$  und  $W_{-+}$  sind zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + [\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}(z)] W = 0. \quad (5)$$

$W_{+-}$  soll eine von positiven Werten von  $z$  her einfallende Welle darstellen, sie soll also bei großen negativen  $z$ -Werten nur einen nach negativen  $z$  laufenden Anteil haben. Bei  $W_{-+}$  ist die Laufrichtung umgekehrt. Man hat anzumerken, daß die Lösungen  $W$  durchaus nicht für alle Werte von  $\alpha$  einen reellen Wellenvorgang darstellen. Wie gezeigt werden wird, können sich die Funktionen auch aus reellen Exponentialanteilen zusammensetzen. Die Lösungen (4) stellen natürlich keine bei  $z = r = 0$  sitzende Elektronenquelle dar, sie können aber benutzt werden, um eine solche aufzubauen. Man definiere eine Funktion  $D(\alpha)$  durch die Gleichung

$$2D(\alpha) = W_{-+} \cdot \frac{dW_{+-}}{dz} - W_{+-} \cdot \frac{dW_{-+}}{dz}. \quad (6)$$

$D(\alpha)$  ist von  $z$  unabhängig, wie durch Differentiation von (6) nach  $z$  und Berücksichtigung der Differentialgleichung (5) sofort gezeigt werden kann. Mit Hilfe dieser Funktion erhält man, wie im Anhang nachgewiesen ist, als Darstellung einer bei  $z = z_Q$ ,  $r = 0$  sitzenden Elektronenquelle die Formeln

$$G = \int_0^{\infty} W_{-+}(z, \alpha) W_{+-}(z_Q, \alpha) \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{D(\alpha)}, \quad \text{für } z > z_Q, \quad (7')$$

$$G = \int_0^{\infty} W_{+-}(z, \alpha) W_{-+}(z_Q, \alpha) \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{D(\alpha)}, \quad \text{für } z < z_Q. \quad (7'')$$

Diese allgemeinen Formeln können noch etwas vereinfacht werden, wenn man sich auf den hier allein interessierenden Fall beschränkt, daß das Potential bei großen positiven Werten von  $z$  dem konstanten Wert  $U$  zustrebt (Fig. 1). Dann können für große positive Werte von  $z$  sofort asymptotische Darstellungen der Wellenfunktionen angegeben werden. Es gilt:

$$W_{-+} \sim e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}} \cdot z}, \quad (8')$$

$$W_{+-} \sim e^{-i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}} \cdot z} + a \cdot e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}} \cdot z}; \quad (8'')$$

$\alpha$  ist ein Reflexionskoeffizient<sup>1)</sup>. Durch Einsetzen dieser Formeln in die Definitionsgleichung (6) findet man

$$D(\alpha) = -i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}},$$

eine Formel, die zwar aus den asymptotischen Darstellungen für große  $z$  abgeleitet wurde, die aber streng richtig sein muß, weil  $D$  unabhängig von  $z$  ist. So erhält man schließlich an Stelle von (7')

$$G = \int_{\bar{U}}^{\infty} W_{-+}(z, \alpha) W_{+-}(z_Q, \alpha) \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{-i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}}, \quad \text{für } z > z_Q \quad (9')$$

und eine entsprechende Gleichung für  $z < z_Q$ . Durch Übergang zu dem bekannten Grenzfall konstanten Potentials  $\Phi = 0$  kann die Richtigkeit der angegebenen Formeln wahrscheinlich gemacht werden. In diesem Grenzfall ist in (8'')  $\alpha = 0$  zu setzen, und man erhält durch Einsetzen von (8') und (8'') in (9') die Formel

$$G = \int_0^{\infty} e^{i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2} (z - z_Q)} \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{-i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2}} = \frac{e^{i \sqrt{\bar{\varepsilon}} \sqrt{(z - z_Q)^2 + r^2}}}{\sqrt{(z - z_Q)^2 + r^2}}, \quad z > z_Q,$$

also eine von  $z = z_Q$ ,  $r = 0$  ausgehende Kugelwelle<sup>2)</sup>.

*Quellenfunktion für spezielle Beschleunigungsfelder.* Die Auswertung von (9') für ein spezielles vorgegebenes Potential erfordert die Berechnung der Wellenfunktionen  $W_{-+}$  und  $W_{+-}$  aus der Differentialgleichung (5). Diese Rechnung wird zunächst für die Kurve  $B$  der Fig. 1 durchgeführt, zur Kennzeichnung dient, soweit erforderlich, der Index  $B$ . Je nach den Werten von  $z$  entstehen verschiedene Gleichungen aus (5):

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + [\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}] W = 0, \quad \text{für } l < z, \quad (10')$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + [\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m] W = 0, \quad \text{für } z < 0, \quad (10'')$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left[ \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \frac{U}{l} z \right] W = 0, \quad \text{für } 0 < z < l. \quad (10''')$$

<sup>1)</sup> Bei großen Werten des Separationsparameters  $\alpha$  tritt der bereits erwähnte Fall ein, daß die Wellenfunktionen  $W$  aus reellen Exponentialanteilen bestehen. In diesem Fall sind die Funktionen  $W$  derart definiert, daß  $W_{-+}$  bei großem positiven  $z$ ,  $W_{+-}$  entsprechend bei großem negativen  $z$  verschwindet. —

<sup>2)</sup> Vgl. z. B. G. N. Watson, Theory of Besselfunctions, S. 416. Cambridge 1922.



Die ersten beiden dieser Gleichungen können sofort durch Exponentialfunktionen gelöst werden. Die eine Lösung, die mit der asymptotischen Form (8') übereinstimmt, lautet:

$$W_{-+} = e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z}, \quad \text{für } l < z. \quad (11)$$

Diese Gleichung genügt zur vollständigen Kennzeichnung von  $W_{-+}$ , da das Verhalten der Elektronen nur in dem Gebiet interessiert, wo das Beschleunigungsfeld bereits abgeklungen ist. Dagegen muß die zweite Lösung  $W_{+-}$  im ganzen Raum festgelegt werden, da die Quelle bei  $z = 0$  liegen soll. Man findet zunächst

$$W_{+-} = e^{-i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z} + a_B e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z}, \quad \text{für } l < z, \quad (12')$$

$$W_{+-} = b_B \cdot e^{-i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}z}, \quad \text{für } 0 < z. \quad (12'')$$

Dabei sind der Reflexionskoeffizient  $a_B$  und der Durchlässigkeitskoeffizient  $b_B$  von  $z$  unabhängige Integrationskonstanten. Gleichung (12') stimmt mit der asymptotischen Formel (8'') überein. (12'') drückt aus, daß  $W_{+-}$  für große negative  $z$  einen nach negativen  $z$  laufenden Wellenvorgang darstellt, wie es definitionsmäßig sein muß.

Die noch verbleibende Differentialgleichung (10''') kann durch Bessel-Funktionen  $J_{\pm 1/3}(u)$  gelöst werden, deren Argument  $u$  folgendermaßen definiert ist:

$$u = \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} \left( \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l} \right)^{3/2}. \quad (13)$$

Man findet <sup>1)</sup>

$$W_{+-} = c_B \cdot u^{1/3} J_{1/3}(u) + d_B \cdot u^{1/3} J_{-1/3}(u), \quad \text{für } 0 < z < l. \quad (14)$$

<sup>1)</sup> Nach (13) ist das Argument  $u$  eine zweideutige Funktion von  $\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l}$ , trotzdem ist  $W_{+-}$  eindeutig. Das kann man z. B. sehen, wenn man die Reihenentwicklungen der Bessel-Funktionen benutzt, die bei  $u = 0$  gelten:

$$W_{+-} = c_B \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} \right)^{2/3} \left( \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l} \right) \sum c_r \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} \right)^{2r} \left( \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l} \right)^{3r} + \\ + d_B \sum d_r \cdot \left( \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} \right)^{2r} \left( \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l} \right)^{3r}. \quad (14a)$$

$c_r$  und  $d_r$  sind dabei die Koeffizienten in den Reihenentwicklungen der Bessel-Funktionen. Auf diese Reihenentwicklung kann man übrigens auch immer dann zurückgreifen, wenn  $\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l}$  sein Vorzeichen wechselt, wenn also  $u$  imaginär wird und man nicht sofort im klaren ist, wie sich  $W_{+-}$  bei diesem Übergang verhält.

In den Formeln (12) und (14) treten vier unbestimmte Konstanten  $a$  bis  $d$  auf, die solche Werte erhalten müssen, daß  $W_{+-}$  und  $dW_{+-}/dz$  an den Stellen  $z = 0$  und  $z = l$  stetig sind. Da die Elektronenquelle bei  $z = 0$  liegen soll, genügt es, den Koeffizienten  $b$  anzugeben, denn nach (12'') gilt

$$W_{+-}(0, \alpha) = b_B. \quad (15)$$

Die Durchrechnung ergibt

$$b_B = 4 \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\pi} \left( \frac{3}{2} \frac{\bar{U}}{l} \right)^{1/3} e^{-i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\varepsilon} l}} \cdot \frac{1}{N}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} N = u_0^{1/3} [ & \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2} J_{-2/3}(u_0) + i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m} J_{+1/3}(u_0) ] u_1^{1/3} \times \\ & \times [ J_{-1/3}(u_1) - i J_{2/3}(u_1) ] - \\ - u_0^{1/3} [ & - \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2} J_{2/3}(u_0) + i \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m} J_{-1/3}(u_0) ] u_1^{1/3} \times \\ & \times [ J_{1/3}(u_1) + i J_{-2/3}(u_1) ], \end{aligned} \quad (17)$$

$$u_0 = \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} (\bar{\varepsilon} - \alpha^2)^{3/2} = \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{\varepsilon}{E} \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\bar{\varepsilon}} \right)^{3/2}, \quad (18')$$

$$u_1 = \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} (\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U})^{3/2}. \quad (18'')$$

Die Wellenfunktionen, die durch (11) bis (18) festgelegt sind, hat man in (9') einzusetzen, um durch Integration über  $\alpha$  die Wellenfunktion der Elektronenquelle zu erhalten. Da diese Formeln für die Rechnung zu kompliziert sein würden, müssen einige Vernachlässigungen eingeführt werden. Der erste Grund für die Möglichkeit solcher Vernachlässigungen ist die Beziehung  $\bar{\varepsilon} \ll \bar{\Phi}_m$ . Die Spannung  $\varepsilon$  nämlich, die der Elektronenaustrittsenergie entspricht, beträgt für Glühemission größenordnungsmäßig 0,1 Volt, während für  $\Phi_m$ , das positive Potential im Metallinnern, ein Wert von der Größenordnung 10 Volt angenommen werden kann. Daher ist  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m} \gg |\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2}|$ , solange nicht  $\alpha^2$  wesentlich größer wird als  $\bar{\varepsilon}$ . Infolgedessen überwiegen die mit  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  multiplizierten Ausdrücke im allgemeinen<sup>1)</sup>. Diese Verhältnisse sollen dahingehend vergrößert werden, daß nur die mit  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  multiplizierten Glieder der Wellenfunktion beibehalten, die übrigen aber gestrichen werden. Es soll etwa der Grenzfall außerordentlich großer Werte von  $\Phi_m$  betrachtet werden. Die Begründung für diese Vernachlässigung versagt, wenn  $\alpha^2$  wesentlich

<sup>1)</sup> D. h. bis auf diejenigen Werte von  $\alpha$ , bei denen der Koeffizient von  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  verschwindet.

größer als  $\bar{\varepsilon}$  wird, also beispielsweise für  $\alpha^2 = \bar{\Phi}_m$ . Dann überwiegen die mit  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  multiplizierten Glieder der Wellenfunktion nicht mehr, man dürfte sich also eigentlich nicht auf sie allein beschränken. Daß man es trotzdem tun kann, beruht auf einem anderen Grund, der ebenfalls zur Erzwingung verschiedener Vereinfachungen ausgenutzt werden kann: Der Bereich großer Werte  $\alpha$  liefert überhaupt keinen wesentlichen Beitrag zu dem Integral (9'), so daß in diesem Bereich auch grobe Vernachlässigungen erlaubt sind. Das kann man folgendermaßen einsehen: Für  $\alpha^2 < \bar{\varepsilon}$  ist das Argument  $u_0$  reell, für  $\alpha^2 > \bar{\varepsilon}$  ist es imaginär. Daher ist  $J_{\pm 1/3}(u_0)$  eine oszillierende Funktion für  $\alpha^2 < \bar{\varepsilon}$ , eine exponentiell wie  $e^{|u_0|}$  ansteigende für  $\alpha^2 > \bar{\varepsilon}$ . Dieser Anstieg erfolgt nach (18') um so steiler, je größer  $\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{\varepsilon}{E}$  ist. Solange dieser Ausdruck nicht wesentlich unter 1 liegt, braucht  $\alpha^2$  nur ein kleines Vielfaches von  $\bar{\varepsilon}$  zu sein, um  $N$  außerordentlich groß und daher  $b$  außerordentlich klein werden zu lassen. Diese  $\alpha$ -Werte liefern also in der Tat keine wesentlichen Beiträge zu dem Integral (9')<sup>1)</sup>. Man kann sich also für alle Werte von  $\alpha$  auf diejenigen Glieder beschränken, die mit  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  multipliziert sind.

Der verschwindende Einfluß derjenigen Werte von  $\alpha$ , für die  $\alpha^2 \gg \bar{\varepsilon}$  gilt, erlaubt aber noch weitere Vernachlässigungen. Zunächst kann man den Faktor  $\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{\Phi}_m}$  durch  $\sqrt{\bar{\Phi}_m}$  ersetzen, ferner darf man an Stelle von  $u_1$  den Ausdruck  $\frac{2}{3} l \cdot \bar{U}^{1/2}$  setzen, wenn  $u_1$  nicht als Argument einer mit  $u_1$  schnell veränderlichen Funktion auftritt. Schließlich kann man für  $J_{\pm 1/3}(u_1)$  die bei großen Werten von  $u_1$  gültige asymptotische Entwicklung benutzen. Bei kleinen Werten von  $\alpha$  ist nämlich  $u_1$  sicher sehr groß und die asymptotische Formel daher genügend genau. Große Werte von  $\alpha$ , bei denen die asymptotische Formel versagt, spielen aber keine Rolle.

Unter Berücksichtigung aller dieser Vereinfachungen findet man

$$N = -i \sqrt{\bar{\Phi}_m} \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{5}{e^{12}} \pi i \left(\frac{2}{3} l \sqrt{\bar{U}}\right)^{-1/6} \times \\ \times e^{-i u_1} \cdot u_0^{1/3} \left\{ J_{-1/3}(u_0) + e^{\frac{2\pi i}{3}} J_{1/3}(u_0) \right\} \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Für den Fall  $4\varepsilon/E \ll \lambda_k$  versagt diese Überlegung. Der Durchmesser des Zerstreuungskreises, der sich auf Grund der geometrisch-optischen Fehlertheorie ergibt, darf nicht größenordnungsmäßig kleiner sein als die Elektronenwellenlänge an der Kathode. Bei Glühemission ist daher die Rechnung nur bis zu Feldern von etwa  $10^6 - 10^7$  Volt/cm gültig. — Für größte Werte von  $\alpha$ , bei denen auch  $u_1$  imaginär wird, muß die Überlegung etwas abgeändert werden. Das Ergebnis bleibt erhalten.

Somit erhält man schließlich aus (9') unter Fortlassung aller uninteressanten konstanten Faktoren<sup>1)</sup>

$$G_B = \int_0^{\infty} e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}(z-l)} \cdot e^{i\frac{2}{3}\frac{l}{\bar{U}}(\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U})^{3/2}} \times \frac{J_0(\alpha r) \cdot \alpha d\alpha}{u_0^{1/3} \left\{ J_{-1/3}(u_0) + e^{\frac{2\pi i}{3}} J_{1/3}(u_0) \right\}} \quad (20)$$

Das zweite Potentialfeld, das hier durchgerechnet werden soll, unterscheidet sich von dem eben behandelten Feld nur im Metallinnern. Dort verläuft das Potential so, wie es die Kurve *C* der Fig. 1 angibt. An Stelle von (5) treten zwei Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + [\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}] W = 0, \quad \text{für } l < z, \quad (21')$$

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left[ \bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \cdot \frac{z}{l} \right] W = 0, \quad \text{für } z < l. \quad (21'')$$

Die Lösungen lauten:

$$W_{-+} = e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z}, \quad \text{für } l < z, \quad (2-)$$

$$W_{+-} = e^{-i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z} + a_C \cdot e^{i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}z}, \quad \text{für } l < z, \quad (23')$$

$$W_{+-} = c_C \cdot u^{1/3} J_{1/3}(u) + d_C \cdot u^{1/3} J_{-1/3}(u), \quad \text{für } z < l. \quad (23'')$$

Die Integrationskonstanten  $a_C$ ,  $c_C$  und  $d_C$  sind hier so zu bestimmen, daß  $W_{+-}$  und  $dW_{+-}/dz$  an der Stelle  $z = l$  stetig sind und das  $W$  endlich bleibt bei  $z = -\infty$ . Die letzte Bedingung liefert sofort  $c_C = d_C$ . Bei dieser Wahl erhält man nämlich für negative Werte von  $\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U} \frac{z}{l}$  die aus (14a) ableitbare Formel

$$c_C \cdot [u^{1/3} J_{1/3}(u) + u^{1/3} J_{-1/3}(u)] = c_C \cdot \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} v^{1/3} K_{1/3}(v),$$

wobei als Definitionsgleichung gilt

$$v = \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} \left( \alpha^2 - \bar{\varepsilon} - \bar{U} \frac{z}{l} \right)^{3/2}.$$

Die Funktion  $K_{1/3}$  klingt aber für große Werte von  $v$  in der Tat exponentiell ab<sup>2)</sup>. Die Randbedingungen bei  $z = l$  liefern

$$c_C = 2 \cdot e^{-i\sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}}l} \cdot \frac{1}{M}, \quad (24')$$

$$M = u_1^{1/3} [J_{1/3}(u_1) + J_{-1/3}(u_1)] + i J_{-2/3}(u_1) - i J_{2/3}(u_1). \quad (24'')$$

<sup>1)</sup> Auch die Größe  $\bar{\Phi}_m$ , das Potential im Metallinneren, tritt nur als konstanter Faktor auf und übt daher keinen wesentlichen Einfluß auf die Wellenfunktion aus. — <sup>2)</sup> G. N. Watson, l. c., S. 78.

Die Lösungen (22) bis (24) sind nunmehr in (9') einzusetzen, wobei noch dieselben Vereinfachungen gemacht werden, die bereits bei dem oben behandelten Potential durchgeführt wurden. Man erhält so

$$G_C = \int_0^\infty e^{i l \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}} (z-l)} \cdot e^{i \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} (\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U})^{3/2}} \times \\ \times u_0^{1/3} [J_{1/3}(u_0) + J_{-1/3}(u_0)] J_0(\alpha r) \alpha d\alpha. \quad (25)$$

*Numerische Berechnung der Quellenfunktion.* Die Auswertung der Formeln (20) und (25) muß durch numerische Integration erfolgen. Dabei braucht man aber die Wellenfunktion nicht für den gesamten Raum, d. h. für eine große Zahl von  $z-r$ -Werten auszurechnen. Vielmehr genügt nach den am Anfang dieser Arbeit durchgeführten Überlegungen die Untersuchung des „Bildes“ der Kathode, das von dem einfachen Beschleunigungsfeld erzeugt wird. Die *geometrisch-optische* Rechnung ergibt, daß dieses „Bild“, die rückverlegte Kathode, etwa um die Länge  $l$  hinter der wirklichen Kathode liegt. Die genauere Betrachtung auf Grund der *Wellenmechanik* wird zu einem Ergebnis führen, das ähnlich demjenigen bei der entsprechenden optischen Frage ist. Danach liegt die beste Einstellenebene in der Nähe der Gaußschen Bildebene, fällt aber nicht genau mit ihr zusammen<sup>1)</sup>. Man muß die Verteilung der Elektronenintensität in mehreren Ebenen nahe der Gaußschen Bildebene berechnen und daraus diejenige Ebene aufsuchen, die den kleinsten Fehler liefert. Statt diese strenge Rechnung durchzuführen, würde zunächst eine Ebene in der Nähe der Gaußschen Bildebene so herausgesucht, daß die weitere Rechnung für diese Ebene möglichst einfach wurde. Damit wird nicht die günstigste Stellung getroffen sein. Das schadet aber nichts, man erhält einfach eine obere Grenze der auflösbaren Strecke. Das wirklich erreichbare Auflösungsvermögen kann sicher nicht schlechter sein als das errechnete. Bei einzelnen Fragen wurde die Rechnung übrigens für mehrere Ebenen durchgeführt.

Für die Auswertung der Integrale erweisen sich noch einige Umformungen als zweckmäßig. An Stelle von  $z$  wurde eine neue Veränderliche  $\zeta$  durch die Gleichung

$$-l - 2l \frac{\varepsilon}{\bar{U}} + 2l \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \cdot \zeta = z \quad (26)$$

<sup>1)</sup> Sie fällt übrigens auch nicht mit dem geometrisch-optisch berechenbaren engsten Querschnitt des Strahlbündels zusammen.

eingeführt. Bei dieser Wahl erhält man die Gaußsche Bildebene für  $\zeta = 1^1$ ). Als Integrationsveränderliche wurde die Größe

$$\kappa = \kappa_0 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\bar{\varepsilon}} \right) = u_0^{2/3}, \quad (27')$$

$$\kappa_0 = \left( \frac{4\pi}{3} \frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{\varepsilon}{\bar{E}} \right)^{2/3} \quad (27'')$$

benutzt. Dadurch vereinfacht sich die Rechnung für Punkte auf der optischen Achse. Für  $z$ -Werte in der Nähe der Gaußschen Bildebene kann man das Argument der Exponentialfunktion in (20) bzw. (25) in eine Reihe nach  $\alpha^2/(\bar{\varepsilon} + \bar{U})$  entwickeln und sich auf die ersten Glieder dieser Reihe beschränken. Man findet

$$\begin{aligned} & \sqrt{\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U}} (z - l) + \frac{2}{3} \frac{l}{\bar{U}} (\bar{\varepsilon} - \alpha^2 + \bar{U})^{3/2} \\ &= 2l \sqrt{\bar{\varepsilon} + \bar{U}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \left( -\frac{2}{3} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{\bar{U}}} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \zeta \right) - \\ & \quad - \frac{3}{2} \kappa_0^{3/2} \zeta \cdot \frac{\alpha^3}{\bar{\varepsilon}} + \frac{3}{4} \kappa_0^{3/2} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \left( \frac{\alpha^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

Von Interesse ist nur der von  $\alpha$  abhängige Teil, für den eine besondere Abkürzung eingeführt werden soll:

$$\chi = -\frac{3}{2} \kappa_0^{3/2} \zeta \cdot \frac{\alpha^3}{\bar{\varepsilon}} + \frac{3}{4} \kappa_0^{3/2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\bar{U}}} \left( \frac{\alpha^3}{\bar{\varepsilon}} \right)^2 + \dots \quad (28)$$

Ob in (28) die genügende Anzahl von Gliedern berücksichtigt ist, hat man im Einzelfall stets nachzuprüfen. Faßt man schließlich noch alle unwesentlichen Faktoren zu einer Konstanten  $C$  zusammen, so ergibt sich aus (20) und (25)

$$G_B = C_B \int_{-\infty}^{\kappa_0} e^{i\chi} \frac{J_0 \left( 2\pi \frac{r}{\lambda_k} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \right)}{\sqrt{\kappa} \left[ J_{-1/3}(\kappa^{3/2}) + e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot J_{1/3}(\kappa^{3/2}) \right]} d\kappa, \quad (29)$$

$$G_C = C_C \int_{-\infty}^{\kappa_0} e^{i\chi} \cdot J_0 \left( 2\pi \frac{r}{\lambda_k} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} \right) \sqrt{\kappa} [J_{1/3}(\kappa^{3/2}) + J_{-1/3}(\kappa^{3/2})] d\kappa. \quad (30)$$

Diese Formeln wurden für die endgültige Rechnung benutzt. Unter besonderen Umständen können sie noch dadurch vereinfacht werden, daß man  $\chi = 0$  setzt. Dazu muß man die Berechnung auf die Ebene  $\zeta = 0$  beschränken, die dicht bei der Gaußschen Bildebene liegt. Ferner muß die Beschleunigungsspannung  $U$  bzw. das Feld  $E$  sehr groß sein, damit das

<sup>1)</sup> W. Henneberg u. A. Recknagel, l. c.



zweite Glied auf der rechten Seite von (28) keinen Einfluß hat. Für die bisher gebauten Emissions-Übermikroskope ist diese Bedingung erfüllt.

Das Ergebnis der numerischen Rechnung ist in Fig. 2 bis 7 dargestellt. Dort ist der Realteil  $Re$  und der Imaginärteil  $J$  der Wellenfunktion  $G$ , ferner das Quadrat  $GG^*$  des Absolutbetrages als Funktion von  $2\pi \frac{r}{\lambda_k}$  aufgetragen<sup>1)</sup>. Die Wellenfunktionen wurden so normiert, daß auf der optischen Achse (für  $r = 0$ ) die Gleichung  $GG^* = 1$  gilt. Die Aufspaltung der Wellenfunktion in Real- und Imaginärteil ist nicht willkürfrei. Ein von  $r$  unabhängiger komplexer Faktor vom Absolutbetrag 1 kann willkürlich zugefügt werden, ohne daß sich  $GG^*$  ändert.

Als Ergänzung der numerischen Rechnung soll noch eine qualitative Betrachtung des Integrals (29) für den Fall angeschlossen werden, daß  $\kappa_0$  eine sehr große Zahl ist. Im größten Teil des Integrationsbereiches ist dann die asymptotische Entwicklung der Bessel-Funktionen genügend genau. Daher kann man in dem in Betracht kommenden Bereich das Integral als Differenz zweier Integrale der Form

$$\int f(\kappa) e^{i\kappa_0^{3/2} \cdot g} d\kappa$$

darstellen, wobei  $g$  folgende Bedeutung hat:

$$g = -\frac{3}{2} \zeta \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_0}\right) + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{U}} \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^2 - \left(\frac{\kappa}{\kappa_0}\right)^{3/2} \pm \frac{3}{2} \frac{r}{\varepsilon/E} \sqrt{1 - \frac{\kappa}{\kappa_0}}.$$

$f(\kappa)$  ist eine langsam veränderliche Funktion, während die Exponentialfunktionen wegen des großen Wertes von  $\kappa_0^{3/2}$  vielfach oszillierende Funktionen sind. In der Tabelle 1 ist die Größe  $g$  unter der Voraussetzung  $\zeta = 2/3$  dargestellt in Abhängigkeit von  $\kappa/\kappa_0$  und von  $3/2 r/(\varepsilon/E)$ . Dabei ist dasjenige Integral ausgewählt, bei dem das Glied mit  $r$  das negative Vorzeichen besitzt.

Tabelle 1.

	0	0,2	0,3	0,5	$\frac{3}{2} r \left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^{-1}$
0	-1	-1,2	-1,3	-1,5	
0,2	-0,889	-1,068	-1,157	-1,336	
0,4	-0,853	-1,008	-1,086	-1,241	
0,6	-0,865	-0,991	-1,055	-1,181	
0,8	-0,916	-1,005	-1,050	-1,140	
1,0	-1	-1	-1	-1	
$\kappa/\kappa_0$					

<sup>1)</sup> Mit  $G^*$  ist der konjugiert komplexe Wert von  $G$  bezeichnet.

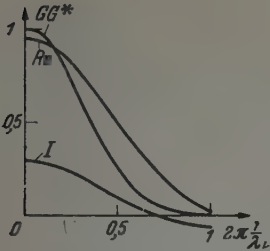


Fig. 2.  $x_0 = 0,075$ ;  $\zeta = 0$ .

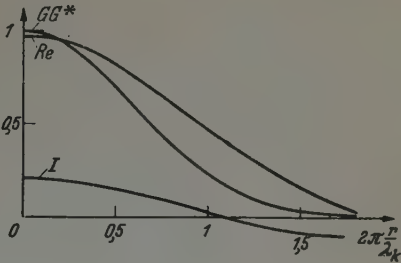


Fig. 3.  $x_0 = 0,3$ ;  $\zeta = 0$ .

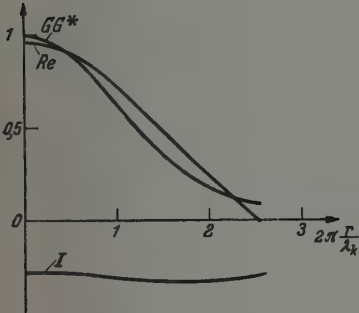


Fig. 4.  $x_0 = 1,2$ ;  $\zeta = 0$ .

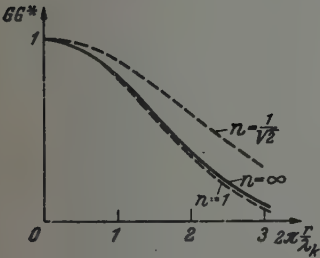


Fig. 6.  $x_0 = 6$ ;  $\zeta = \frac{2}{3}$ .

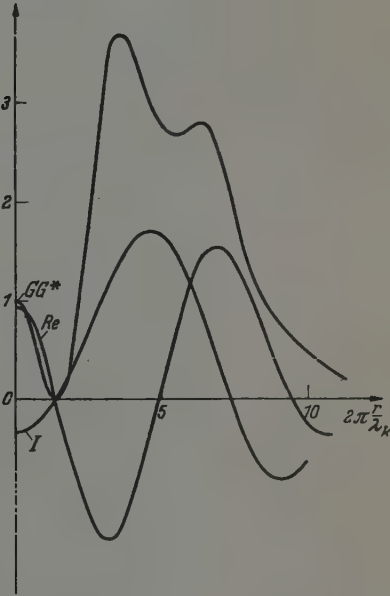


Fig. 5.  $x_0 = 3$ ;  $\zeta = 0$ .

Fig. 2 bis 7.  
Die Wellenfunktion bei  
verschiedenen Feld- und  
Einstellverhältnissen.

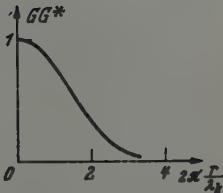


Fig. 7.  $x_0 = 3$ ;  $\zeta = \frac{2}{3}$ .

Für  $r = 0$  schwankt  $g$  in dem Bereich von  $\kappa/\kappa_0 = 1$  bis  $\kappa/\kappa_0 = 0,4$  um den Betrag 0,15, für  $r = 0,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \varepsilon/E$  dagegen nur etwa um  $\pm 0,009$ . Im letzten Fall ist also die Exponentialfunktion viel langsamer veränderlich als im ersten, infolgedessen das Integral viel größer. Daher hat man bei so großen Werten von  $r$  noch erhebliche Intensitäten zu erwarten, der Zerstreuungskreis ist von dieser Größenordnung.

*Asymptotische Entwicklung und Ablendung.* Zur Berechnung asymptotischer Darstellungen der Wellenfunktion, die bei großen Entfernungen zwischen Quellpunkt  $Q$  und Aufpunkt  $P$  gültig sind, kann die Kirchhoffsche Formel dienen:

$$G = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \frac{1}{\varrho} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \varrho} \cdot \text{grad}_Q G - G \text{grad}_Q \frac{1}{\varrho} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \varrho} \right\} df. \quad (31)$$

Hier steht auch unter dem Integralzeichen die unbekannte Funktion  $G$ , für die nur die Formeln (20) und (25) bekannt sind. Gleichung (31) läßt sich jedoch so umformen, daß man eine einfache asymptotische Darstellung für  $G$  erhält. Zu diesem Zweck wird als Fläche, über die das Integral zu erstrecken ist, die rückverlegte Kathode  $z_r$  oder eine benachbarte Ebene gewählt. Man findet dann zunächst

$$df \text{grad}_Q = -df \frac{\partial}{\partial z_r}.$$

Für den Abstand  $\varrho$  zwischen einem Punkt der Integrationsebene  $z_r$  und dem Aufpunkt  $z, x, y$  ergibt sich mit den in Fig. 8 angedeuteten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{R^2 + r_r^2 - 2Rr_r \cos(\gamma - \beta) \sin \vartheta} \\ &\approx R - r_r \sin \vartheta \cos(\gamma - \beta) + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

Diese letzte für  $r_r \ll R$  gültige Entwicklung ist eigentlich nicht statthaft, da das Integral (31) über die ganze Ebene  $z_r$  erstreckt werden soll, so daß

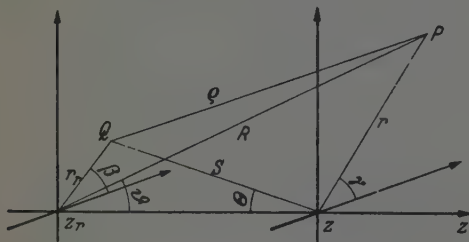


Fig. 8. Bezeichnungen zur Auswertung der Kirchhoffschen Formel.

auch  $r \gg R$  werden kann. Nun wird hier eine asymptotische Entwicklung für große  $R$  gesucht. Dies mag durch die Forderung  $R \gg l$  festgelegt werden, d. h. der Abstand zwischen Quellpunkt und Aufpunkt soll groß gegen die Länge des Beschleunigungsfeldes sein.

Dann versagt die Reihenentwicklung (32) nur bei solchen Werten von  $r_r$ , bei denen die Wellenfunktion praktisch auf Null abgeklungen ist. Diese

Teile der Ebene  $z_r$  liefern demnach keinen Beitrag zum Integral, die Entwicklung (32) ist in dem Integral (31) also für alle Werte von  $r_r$  erlaubt. Wegen der Bedingung  $R \gg l$  kann man sich auch auf die angeschriebenen Glieder der Entwicklung (Fraunhofersche Glieder) beschränken. Aus den gleichen Gründen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_r} \cdot \frac{1}{\varrho} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \varrho} &\approx -i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \frac{1}{\varrho} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \varrho} \cdot \frac{z_i - z_r}{\varrho} \\ &\approx -i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \cos \vartheta \frac{1}{\varrho} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \varrho}. \end{aligned}$$

Differenziert man (20) bzw. (25) nach  $z$  und ersetzt die unter dem Integralzeichen als Faktor auftretende Größe  $\sqrt{\varepsilon - \alpha^2 + \bar{U}}$  durch  $\sqrt{\varepsilon + \bar{U}}$ , was auf Grund früherer Überlegungen berechtigt ist, so findet man

$$\frac{\partial G}{\partial z_r} \approx i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} G. \quad (33)$$

Damit erhält man schließlich für kleine Werte von  $\vartheta$

$$\begin{aligned} G &\sim -\frac{i}{4\pi} \sqrt{\varepsilon + \bar{U}} (1 + \cos \vartheta) \frac{1}{R} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} R} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty r_r dr_r \int_0^{2\pi} d\beta e^{-i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} r_r \sin \vartheta \cos(\gamma - \beta)} \cdot G \\ &\sim -i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \frac{1}{R} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} R} \int_0^\infty r_r dr_r \cdot J_0(\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} r_r \sin \vartheta) \cdot G. \end{aligned}$$

In die letzte Gleichung setzt man den Wert von  $G$  aus (20) oder (25) ein — hier mögen nur die Formeln für die Funktion (20) angeschrieben werden — und wendet auf die entstehende Gleichung die Hankelschen Umkehrformeln<sup>1)</sup> an. Dadurch ergibt sich<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} G &\sim \frac{1}{R} e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} R} \times \\ &\quad \times e^{i\sqrt{\varepsilon + \bar{U}} \left[ (z_r - l) \cos \vartheta + \frac{2}{3} l \frac{U + \varepsilon}{U} \cos^3 \vartheta \right]} \\ &\quad \times \frac{1}{w^{1/2} \left[ J_{-1/3}(w^{3/2}) + e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot J_{1/3}(w^{3/2}) \right]} \cdot \quad (34') \\ w &= \kappa_0 \left( 1 - \frac{\sin^2 \vartheta}{\varepsilon/(U + \varepsilon)} \right). \quad (34'') \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, S. 369. Leipzig, Teubner, 1904. — <sup>2)</sup> Die Wellenfunktion verschwindet in großer Entfernung vom Quellpunkt und stellt dort eine vom Quellpunkt ausstrahlende Welle dar. Damit ist ein Beweisstück nachgetragen, das im Anhang aus-  
gelassen wurde.

Mit Hilfe dieser so gewonnenen asymptotischen Entwicklung läßt sich der Einfluß der Blenden auf das Bild verfolgen. Zur Abkürzung wird (34') in folgende Form gebracht:

$$G \sim \frac{1}{R} e^{i\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} R} \cdot F(\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} \sin \vartheta).$$

Nach Durchlaufen einer fehlerfreien Linse, die um den Faktor  $V$  vergrößert, konvergiert das Wellenbündel auf einen Bildpunkt. Es ist nun nicht nötig, dieses konvergierende Wellenbündel wirklich zu berechnen. Vielmehr genügt es, die von vornherein bekannte asymptotische Darstellung eines Bündels zugrunde zu legen, das die wesentlichen zu erwartenden Eigenschaften zeigt. Diese Darstellung lautet

$$G \sim \frac{1}{S} \cdot e^{-i\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} S} \cdot F(\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} V \sin \Theta).$$

Dabei ist jetzt  $S$  der Abstand zwischen Bildpunkt und Aufpunkt,  $\Theta$  der Winkel zwischen  $S$  und der optischen Achse. Aus der letzten Formel wird  $G$  für die Ebene der Austrittspupille entnommen, die als Integrationsebene bei der Auswertung der Kirchhoffschen Formel benutzt wird. Mit denselben Vereinfachungen wie oben findet man zunächst

$$G \sim \int e^{i\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} (\varrho - S)} \cdot F(\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} V \sin \Theta) df,$$

wobei uninteressante konstante oder wenig veränderliche Faktoren weggelassen wurden.  $\varrho$  ersetzt man nun durch die Formel

$$\varrho = S - r \sin \Theta \cos(\gamma - \beta),$$

die aus Fig. 8 entnommen werden kann, wenn jetzt unter  $z_r$  die Ebene der Austrittspupille und unter  $z$  die Bildebene verstanden wird<sup>1)</sup>. Die Integration über  $\beta$  läßt sich sofort durchführen und liefert, wenn noch mit  $r_a$  der Radius der Austrittspupille bezeichnet wird,

$$G \sim \int_0^{r_a} r_r dr_r \cdot J_0(\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} \sin \Theta \cdot r) \cdot F(\sqrt{\bar{\epsilon} + \bar{U}} V \sin \Theta).$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs (vgl. Fig. 8)

$$r_r = S \sin \Theta$$

sowie der Substitution

$$x = x_0 \left( 1 - \frac{\bar{U} + \bar{\epsilon}}{\bar{\epsilon}} \cdot \frac{V^2}{S^2} \cdot r_r^2 \right) = x_0 \left( 1 - \frac{x^2}{\bar{\epsilon}} \right)$$

<sup>1)</sup> In der Größe  $F$  behält  $z_r$  die alte Bedeutung.

ergibt sich schließlich, immer unter Weglassung konstanter Faktoren,

$$G \sim \int_{\kappa_u}^{\kappa_0} e^{i\chi} \cdot J_0\left(\frac{r}{V}\alpha\right) \kappa \left[ J_{1/3}(\kappa^{3/2}) + e^{\frac{2\pi i}{3}} J_{1/3}(\kappa^{3/2}) \right] d\kappa, \quad (35')$$

$$\kappa_u = \kappa_0 (1 - n^2). \quad (35'')$$

$$\sin \Theta_a = \frac{1}{V} \sqrt{\frac{\varepsilon}{U + \varepsilon}} \cdot n. \quad (35''')$$

Die Bedeutung von  $\chi$  ist aus (28) zu entnehmen,  $\Theta_a$  ist der halbe Öffnungswinkel, unter welchem die Austrittspupille vom Bildpunkt aus erscheint.

Die Größe  $\frac{1}{V} \sqrt{\frac{\varepsilon}{U + \varepsilon}}$  ist im Bildraum der Sinus des Grenzwinkels des geometrisch-optisch erlaubten Gebietes. Wegen der Kleinheit des Winkels kann man an Stelle des Sinus auch den Winkel selbst setzen. Somit gibt  $n$  an, um welchen Faktor der Öffnungswinkel der Austrittspupille größer ist als der geometrisch-optisch erlaubte Grenzwinkel. Sind beide Winkel gleich, so ist  $n = 1$  und die untere Integrationsgrenze in (35') ist Null. Je größer die Austrittspupille wird, d. h. je größer  $n$  wird, um so stärker rückt  $\kappa_u$  nach negativen Werten. Für  $\kappa_u \rightarrow -\infty$  geht (35') in (29), d. h. in die ohne Ausblendung gültige Formel über<sup>1)</sup>.

*Öffnungsfehler und Auflösungsvermögen des Beschleunigungsfeldes.* Die Berechnung der Wellenfunktion, soweit sie in den vorhergehenden Abschnitten durchgeführt wurde, gibt eine ausreichende Kenntnis der Intensität im Elektronenbild (in der rückverlegten Kathode). Aus der Wellenfunktion  $G$  ergibt sich die Dichte  $j$  des Elektronenstromes bekanntlich zu

$$j = \frac{\hbar}{4\pi i m} (G^* \text{grad } G - G \text{grad } G^*).$$

Hier interessiert nur diejenige Dichte des Elektronenstromes, die auf die Flächeneinheit einer senkrecht zur optischen Achse aufgestellten Ebene trifft, d. h. die  $z$ -Komponente der Stromdichte. Wie bereits in (33) gezeigt wurde, ist  $\frac{\partial G}{\partial z} = i \sqrt{\varepsilon + U} G$ , also gilt

$$j_z = \frac{\hbar}{2\pi m} \sqrt{\varepsilon + U} G G^*.$$

Die in Fig. 2 bis 7 dargestellte Größe  $G G^*$  gibt also die Intensitätsverhältnisse in der Nähe der Bildebene. Die meisten der angegebenen Bilder zeigen eine monotone Abnahme der Intensität von der Bildmitte  $r = 0$  nach außen

<sup>1)</sup> Aus (35''') folgt, daß  $n$  zwar sehr groß werden kann, aber nicht über alle Grenzen wachsen wird. Diese kleine, durch Vernachlässigungen der Rechnung bedingte Ungenauigkeit (Annahme kleiner Neigungswinkel gegen die optische Achse) ist jedoch belanglos.



hin ( $r > 0$ ). Dies ist jedoch keinesfalls die Regel. Beispielsweise ist in Fig. 5 die meiste Intensität weit nach außen verschoben, während in der Bildmitte verhältnismäßig wenig Elektronen auftreten. Diese Verteilung ändert sich aber sehr stark, wenn man eine etwas andere Ebene betrachtet, also praktisch, wenn man etwas anders einstellt. Fig. 7 zeigt die Intensitätsverteilung bei dem gleichen Feld, aber in einer anderen Einstellebene. Man erkennt nunmehr eine starke Konzentration der Elektronen auf die Bildmitte. Wie sich bei der Ausführung der numerischen Rechnungen ergab, dürfte in der Nähe dieser Ebene ( $\zeta = 2/3$ ) die beste Einstellebene liegen. Sie liegt also zwischen der Gaußschen Bildebene ( $\zeta = 1$ ) und dem geometrisch-optisch berechenbaren engsten Querschnitt ( $\zeta = 0,8$ ).

Aus dem Verlauf von  $GG^*$  kann sofort die Auflösungsgrenze abgeleitet werden. Folgende Größe wurde als auflösbare Strecke definiert: Man wähle für jedes Feld diejenige Einstellebene, bei der die Elektronen möglichst stark in der optischen Achse konzentriert sind. Dann suche man denjenigen Punkt, bei dem die Stromdichte auf den vierten Teil der größten Stromdichte abgeklungen ist. Die doppelte Entfernung  $2r_A$  zwischen diesem Punkt und der optischen Achse wird als auflösbare Strecke  $\delta$  definiert. Zwei Punkte, die um diese Strecke getrennt sind, ergeben zusammen ein Intensitätsgebirge mit einer deutlichen Einsattelung in der Mitte (die Intensität ist in der Mitte etwa halb so groß wie bei den Gipfeln) und auch die wahre Entfernung der beiden Punkte läßt sich gut aus dem Intensitätsverlauf festlegen. Die Intensitätsverteilung zweier nach obiger Definition noch trennbarer Punkte stimmt genügend genau mit derjenigen überein, die man aus der üblichen, aber hier nicht anwendbaren Definition erhält, nach der das Maximum der einen Beugungserscheinung in das erste Minimum der zweiten hineinfallen soll.

Für das reine Beschleunigungsfeld, also bei fehlerfreiem Vergrößerungsfeld und fehlender Strahlbegrenzung durch Blenden, sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob der geometrisch-optische Zerstreuungskreis groß gegen die Elektronenwellenlänge an der Kathode ist oder nicht. Im ersten Fall gilt nach (27'')  $\alpha_0 \gg 1$ , im anderen Fall liegt  $\alpha_0$  in der Größenordnung von 1 oder ist kleiner. Zum ersten Fall gehört das Immersionsobjektiv für niedrige Spannungen (etwa 1 kV), zum zweiten Fall gehört das Feldemissions-Übermikroskop. Die heute benutzten Selbststrahlungs-Übermikroskope liegen gerade auf der Grenze. Beispielsweise erhält man für  $\varepsilon = 0,1$  Volt und  $E = 100$  kV/cm den Wert  $\alpha_0 = 4,9$ . Für den Fall  $\alpha_0 \gg 1$  wurden hier nur qualitative Überlegungen durchgeführt, dagegen ist der Fall  $\alpha_0 \sim 1$  durch die numerischen Rechnungen erfaßt.

Ist die Elektronenwellenlänge klein gegen den geometrisch-optischen Zerstreuungskreis ( $\kappa_0 \gg 1$ ), so genügen im wesentlichen die Ergebnisse der geometrisch-optischen Rechnung. In (I) wurde aus dem sphärischen Fehler unter Berücksichtigung der endlichen Breite der Energieverteilung (Maxwell-Verteilung mit der wahrscheinlichsten Energie  $\varepsilon$ ) die auflösbare Strecke berechnet. Es ergab sich, daß die Größe

$$\delta_0 = 4 \frac{\varepsilon}{E} \quad (36')$$

als obere Grenze der auflösbaren Strecke betrachtet werden kann, d. h. als Strecke, die sicher aufgelöst werden muß. In der Tat haben inzwischen die Versuche zu einer Unterschreitung dieser Grenze geführt<sup>1)</sup>. In (I) wurden auch bereits Gründe angegeben, warum in Wirklichkeit kleinere Strecken auflösbar sind. Betrachtet man z. B. nicht die Gaußsche Bildebene, sondern den engsten Querschnitt, so erhält man eine etwa um den Faktor 4 kleinere Zahl<sup>2)</sup>. Auch die Ungleichmäßigkeit der Intensitätsverteilung innerhalb des Querschnitts wurde in (I) bereits betrachtet. Diese geometrisch-optischen Überlegungen liefern größenordnungsmäßige Anhaltspunkte. Die genaue Intensitätsverteilung in der Nähe des Bildpunktes kann aber nur durch wellenmechanische Betrachtungen ermittelt werden. Die in Tabelle 1 enthaltene Abschätzung zeigt, daß eine Auflösung der Größe

$$\delta_u = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{E_i} \quad (36'')$$

noch möglich erscheint. Es sei angemerkt, daß dieser Zahl nicht etwa die Bedeutung einer unteren Grenze der auflösbaren Strecke zukommt (vgl. auch Tabelle 2).

Zur Erreichung großer Auflösungen ist der bisher behandelte Fall großer Werte von  $\kappa_0$  ohne Interesse. Für diesen Zweck müssen die Versuchsbedingungen kleinen Werten von  $\kappa_0$  entsprechen, d. h. Werten, bei denen geometrisch-optischer Fehler und Elektronenwellenlänge an der Kathode die gleiche Größenordnung haben. Unter solchen Verhältnissen ist aber auf jeden Fall die Berücksichtigung der Wellenvorgänge erforderlich.

In der Tabelle 2 sind diejenigen auflösbaren Strecken  $\delta = 2r_A$  angegeben, die aus den Fig. 2 bis 7 abgelesen werden können. Die auflösbaren Strecken

<sup>1)</sup> Gelegentlich wurde in der Literatur mit Verwunderung vermerkt, daß die experimentell auflösbaren Strecken kleiner sind als die hier gegebene obere Grenze. Das ist gänzlich abwegig, das Gegenteil wäre verwunderlich. —

<sup>2)</sup> Dieser Faktor 4 wurde nochmals hervorgehoben durch J. Dosse u. H. O. Müller, ZS. f. Phys. 119, 415, 1942.

Tabelle 2. Die Auflösungsgrenze.

$\kappa_0$	0,075	0,3	1,2	3	6
$\frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{\varepsilon}{E}$	0,0049	0,0393	0,314	1,24	3,51
$2\pi \cdot \frac{r_A}{\lambda_k}$	0,51	0,97	1,72	2,17	2,40
$\delta$	0,16 $\lambda_k$	0,31 $\lambda_k$	0,55 $\lambda_k$	0,69 $\lambda_k$	0,76 $\lambda_k$
$\delta$	33 $\frac{\varepsilon}{E}$	7,9 $\frac{\varepsilon}{E}$	1,75 $\frac{\varepsilon}{E}$	0,56 $\frac{\varepsilon}{E}$	0,22 $\frac{\varepsilon}{E}$
$\delta \lambda_k^{-1} \left( \frac{1}{\lambda_k} \frac{\varepsilon}{E} \right)^{-1/4}$	0,61	0,69	0,74	0,66	0,56

sind dabei einmal durch die Elektronenwellenlänge an der Kathode, dann auch durch die sphärische Aberration, nämlich die Größe  $\varepsilon/E$ , ausgedrückt. Die auflösbare Strecke liegt etwa in der Größenordnung der Elektronenwellenlänge, die an der Kathode auftritt. Sie wird kleiner bei konstanter Wellenlänge und abnehmender sphärischer Aberration (fallendes  $\kappa_0$ ), sie wird größer bei konstanter sphärischer Aberration und steigender Wellenlänge (fallendes  $\kappa_0$ ). Die letzte Spalte der Tabelle zeigt, daß die Größe  $\delta \lambda_k^{-1} \left( \frac{1}{\lambda_k} \frac{\varepsilon}{E} \right)^{-1/4}$  eine verhältnismäßig wenig veränderliche Funktion ist. Man kann also eine ungefähr richtige, einfache Formel für die auflösbare Strecke erhalten, wenn man diese schwach veränderliche Funktion überhaupt durch eine Konstante ersetzt. Nach der Tabelle 2 liegt der Wert dieser Konstanten etwa bei 0,65. Um die endliche Breite der Energieverteilungskurve zu berücksichtigen, wurde statt dessen der Wert 1 gesetzt und unter  $\varepsilon$  die wahrscheinlichste Energie verstanden. In (I) hatte sich für eine Maxwell-Verteilung der Elektronenenergie dieses Verfahren als genügend gerechtfertigt erwiesen. Somit ergibt sich für die auflösbare Strecke in dem Wertebereich von  $\kappa_0$ , der durch Tabelle 2 angedeutet ist,

$$\delta = \lambda_k \sqrt[4]{\frac{1}{\lambda_k} \cdot \frac{\varepsilon}{E}}, \quad (37)$$

$\varepsilon$  ist die wahrscheinlichste Energie,  $\lambda_k$  ist aus  $\varepsilon$  zu berechnen. Ersetzt man in (37) die Anfangsspannung  $\varepsilon$  durch die Wellenlänge  $\lambda_k$ , so findet man, daß die auflösbare Strecke  $\delta$  wie  $\lambda_k^{1/4}$  abnimmt. Diese Abhängigkeit von der Wellenlänge, oder anders ausgedrückt, die Abhängigkeit von der Anfangsenergie, ist aber wegen des Exponenten  $1/4$  (bzw.  $-1/8$  für die Abhängigkeit von der Energie) sehr geringfügig. Man kann dies als weitere Rechtfertigung für die summarische Berücksichtigung der Energieverteilung betrachten.

Gleichung (37) entspricht der von Durchstrahlungs-Elektronenmikroskopen her bekannten Formel für die auflösbare Strecke, die ebenfalls durch Berücksichtigung von sphärischer Aberration und Beugung gewonnen wurde. Um diese Parallele zu zeigen, wurde in (37) auch nicht  $\lambda$  durch  $\varepsilon$  ausgedrückt.

Die Zahlenwerte, die man aus (37) erhält, liegen noch unterhalb der heute experimentell erreichbaren Werte. Als Beispiel sei eine Anordnung von Mecklenburg betrachtet, mit der das bisher beste Auflösungsvermögen erreicht wurde, nämlich 20  $\mu$ . Setzt man dieser Anordnung entsprechend  $\varepsilon = 0,1$  Volt,  $E = 80$  kV/cm, so ergibt sich als auflösbare Strecke nach (37)  $\delta = 5 \mu$ . Es bleibt abzuwarten, wie weit sich die experimentellen Werte diesem theoretischen annähern werden.

Um auch für das Feldemissionsmikroskop einen Anhalt zu bekommen, setze man zunächst einmal  $\varepsilon = 1,5$  Volt,  $E = 3 \cdot 10^7$  Volt/cm. Dann findet man  $\delta = 0,8 \mu$ . Dosse und Müller (l. c.) benutzen eine theoretische Formel für die mittlere Anlaufsspannung der tangentialen Geschwindigkeitskomponente, nach der  $\varepsilon = 0,97 \cdot 10^{-8} E/\sqrt{w_0}$  sein soll. Dabei ist  $E$  in Volt/cm, die Austrittsarbeit  $w_0$  sowie  $\varepsilon$  in Volt zu messen. Mit Hilfe der geometrisch-optischen Formeln finden sie, daß das Auflösungsvermögen unabhängig von der Feldstärke sein sollte. Dagegen gibt (37) mit diesem Werte  $\varepsilon$

$$\delta = 6,5 \cdot 10^{-5} \frac{w_0^{1/16}}{E^{3/8}};$$

$\delta$  ist dabei in cm zu messen. Für  $E = 3 \cdot 10^7$  Volt/cm und  $w_0 = 4,5$  Volt, entsprechend  $\varepsilon = 0,14$  Volt, erhält man  $\delta \approx 1 \mu$ . Dieser Wert ist um den Faktor 10 größer als die von Dosse und Müller abgeschätzte Zahl<sup>1)</sup>. Ein Vergleich dieser Zahlenangaben mit experimentellen Werten ist nicht möglich, da die Experimente bisher mit kugelsymmetrischen Anordnungen durchgeführt wurden, nicht mit ebenen, wie es hier vorausgesetzt wurde. Bei vergleichbaren Feldverhältnissen ergab sich experimentell eine auflösbare Strecke von etwa 1 bis 3  $\mu$ , man erhält also aus der hier abgeleiteten Formel die richtige Größenordnung.

Nach (37) nimmt die auflösbare Strecke ab, wenn man die Feldstärke erhöht. Diese Abnahme erfolgt aber sehr viel langsamer als diejenige, die sich auf Grund der geometrisch-optischen Formel (36') bzw. von (36'') ergibt. Die Steigerung des Auflösungsvermögens durch Feldstärkenerhöhung

<sup>1)</sup> Die Diskrepanz zwischen geometrisch-optischer und wellenmechanischer Rechnung ist hier so erheblich, daß man der wellenmechanischen Formel (37) den Vorzug geben wird.

über die heute beim Emissions-Ültermikroskop benutzten Feldstärken hinaus begegnet daher großen Schwierigkeiten. Die Steigerung der Feldstärke nimmt man durch Spannungserhöhung vor, nicht durch Verkleinerung der Feldlänge. Bei Spannungsvergrößerung werden nämlich die Fehler des Vergrößerungsfeldes, die hier vernachlässigt wurden, verhältnismäßig stärker kleiner als die des Beschleunigungsfeldes. Verringert man dagegen die Feldlänge, so wird der Fehler des Vergrößerungsfeldes verhältnismäßig wenig beeinflusst. Es können dann die Fehler des Vergrößerungsfeldes über die des Beschleunigungsfeldes überwiegen, wie es eingangs untersucht wurde. Die obigen Überlegungen würden dann ihre Gültigkeit verlieren.

*Einfluß der Blenden.* Die Vergrößerung des Auflösungsvermögens mit zunehmendem Feld läßt die Frage berechtigt erscheinen, welche anderen Effekte außer den bisher berücksichtigten Bildfehlern als auflösungsbegrenzende Faktoren noch wirksam werden können. Diese Frage ist zur Zeit für das praktisch vorliegende Emissions-Ültermikroskop nicht wichtig, sie hat aber auf jeden Fall grundsätzliches Interesse. Eine prinzipielle Auflösungsbeschränkung erfolgt durch die Blenden, selbst wenn geometrisch-optisch keine Ausblendung möglich ist, d. h. selbst wenn die Beschleunigungsspannung so groß ist, daß alle von einem Punkt ausgehenden Elektronen geometrisch-optisch durch die Blenden hindurchkommen. Wie die Tabelle 2 für die unmittelbare Nähe der Bildebene zeigt, ist bei sehr kleinem  $\kappa_0$  (also praktisch bei großen Feldern) die auflösbare Strecke weit größer als der Zerstreuungskreis des sphärischen Fehlers. Der letztere hat für die Gaußsche Bildebene (rückverlegte Kathode) den Durchmesser  $4 \varepsilon/E$ . Dagegen ist bei dem größten in Tabelle 2 angeführten Feld (bei dem kleinsten  $\kappa_0$ ) die wellenmechanisch bestimmte auflösbare Strecke  $33 \varepsilon/E$ . Ein beträchtlicher Teil des Elektronenstromes verläuft also außerhalb des geometrisch-optischen Bereiches (Tunneleffekt). Nun erfolgt aber die Ausblendung nicht in der Bildebene. Zur Sicherheit soll daher auch noch gezeigt werden, daß auch außerhalb der Bildebene der geometrisch-optisch erlaubte Bereich durch die Elektronen überschritten wird. Hierzu dienen die oben abgeleiteten asymptotischen Formeln (34'), (34'') für große Entfernung zwischen Bildebene und rückverlegter Kathode. In diesen Formeln zeichnet sich der Grenzwinkel des geometrisch-optisch berechneten Strahlungskegels dadurch aus, daß  $w$  von positiven zu negativen Werten übergeht. Also geht  $J_{\pm 1/3}$  aus einer oszillierenden Form in eine exponentiell ansteigende über. Die gesamte Wellenfunktion geht daher als Funktion von  $\vartheta$  in eine exponentiell abfallende Form über. Dieser Abfall erfolgt um so langsamer, je kleiner  $\kappa_0$  ist, d. h. für unseren Fall, je größer die Feldstärke ist. Der geometrisch-optisch erlaubte



Strahlungskegel wird also mit wachsender Feldstärke immer stärker überschritten. Diese Verhältnisse sind quantitativ in den Fig. 9 und 10 dargestellt. Aufgetragen ist darin in einem Polardiagramm der Elektronenstrom in Abhängigkeit vom Polarwinkel. Der Grenzwinkel  $\sin \vartheta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{U + \varepsilon}}$  des geometrisch-optisch erlaubten Strahlungskegels ist durch die punktierten Geraden angedeutet. Der Öffnungswinkel ist stark übertrieben. Man findet also folgendes Ergebnis: Erhöht man die Feldstärke, um die Auflösung zu

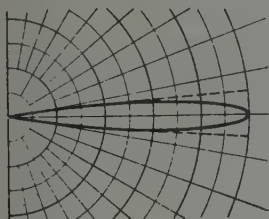


Fig. 9. Strahlungsdiagramm  
für  $x_0 = 1,2$ .

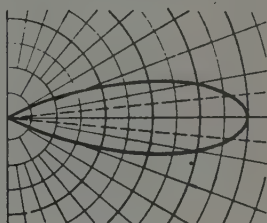


Fig. 10. Strahlungsdiagramm  
für  $x_0 = 0,075$ .

steigern, so überschreiten die Elektronen den geometrisch-optisch erlaubten Bereich mehr und mehr. Dadurch tritt schließlich auf jeden Fall eine Ausblendung und, damit verbunden, eine Auflösungsbegrenzung ein.

Wie groß diese prinzipielle Grenze sein wird, ist ohne weiteres zu sehen. Im äußersten Grenzfall eines unendlich starken Feldes erlangen die Elektronen unmittelbar nach Verlassen der Kathode ihre volle Endgeschwindigkeit. Die geometrisch-optische Begrenzung der Strahlung ist vollkommen verwischt, die Strahlung erfolgt in den ganzen Halbraum. Maßgebend für die Auflösung ist also die Elektronenwellenlänge  $\lambda_b$ , die der Endgeschwindigkeit entspricht, sowie der geometrische Öffnungswinkel der Blende. Man erhält danach als auflösbare Strecke die bekannte Formel  $\delta = 0,61 \lambda_b / \sin \alpha$ . Von einer Erreichbarkeit dieser prinzipiellen Grenze kann wegen der hierfür erforderlichen Feldstärken allerdings keine Rede sein.

Man könnte auch daran denken, auf Grund folgender Überlegung eine Auflösungsgrenze zu berechnen<sup>1)</sup>: Beim Immersionsobjektiv tragen auch die streifend aus der Kathode austretenden Elektronen auf Grund der starken Immersionswirkung zum Bild bei. Die Kathode ist also gewissermaßen die Blende, die den Öffnungswinkel zu  $90^\circ$  bestimmt. Da Blende und Objekt identisch sind, würde man auf eine numerische Apertur vom Betrag 1

<sup>1)</sup> W. Henneberg, ZS. f. Instrkde. 55, 300, 1935.



und daher auf eine auflösbare Strecke  $\delta = 0,61 \lambda_k$  schließen. Man kann das auch so ausdrücken, daß der geometrische Öffnungswinkel durch den Grenzwinkel  $\sqrt{\epsilon/(U + \epsilon)}$  des geometrisch-optischen Strahlungskegels gegeben ist, daß durch die Immersionswirkung sonach die numerische Apertur den Wert 1 erhält. Auf diese Weise ergibt sich zwar ein ungefähr richtiger Wert für die Auflösung, der eigentliche Mechanismus der Auflösungsbegrenzung ist aber nicht richtig erfaßt. Bei dem Feld z. B., das der Tabelle 2 zugrunde liegt, können ebenfalls die streifend aus der Kathode austretenden Elektronen noch zum Bild beitragen. Trotzdem ergibt sich eine Auflösungsgrenze, die weit unter  $0,61 \lambda_k$  heruntergeht. Daß die Beschränkung der Emission auf einen Halbraum nicht der wesentliche auflösungsbegrenzende Faktor ist, zeigt auch die Durchrechnung des Feldes *C* der Fig. 1, deren Ergebnis in (25) dargestellt ist. In diesem Feld können alle, auch die nach rückwärts emittierten Elektronen zum Bild beitragen. Man muß natürlich Unterschiede dieses Feldes gegenüber dem Feld *B* der Fig. 1 erwarten. In dem hier interessierenden Bereich  $\kappa_0 = 1$  kommt jedoch kein wesentlicher Unterschied der Auflösungsgrenze heraus: Wie Fig. 11 für  $\kappa_0 = 1,2$  als Beispiel zeigt, ist der Unterschied der Intensitätsverteilung für die beiden Felder nur unwesentlich.

Die Wirkung der Blenden kann auch noch in anderer Hinsicht bedeutungsvoll werden, nämlich als *auflösungssteigernder* Faktor. Zieht man eine zunächst weite Blende immer stärker zusammen, so verkleinert man die geometrisch-optischen Fehler und erhöht damit das Auflösungsvermögen zumindest in dem Bereich, in dem der Zerstreuungskreis der sphärischen Aberration groß ist gegen das Beugungsscheibchen, das durch die Ausblendung entsteht. Eine Abschätzung, die Boersch<sup>1)</sup> für sein Emissions-Übermikroskop vorgenommen hatte, ergab in der Tat die Möglichkeit einer erheblichen Verbesserung des Auflösungsvermögens durch Abblendung. Nun liegen die heutigen Emissions-Übermikroskope gerade an der Grenze, wo die Wellenlänge an der Kathode in die Größenordnung des geometrisch-optischen Zerstreuungskreises kommt. Es erscheint daher berechtigt, auch an Hand der Wellenfunktion die Blendenwirkung zu untersuchen. Hierzu dient die Formel (35').

Fig. 6 zeigt die Intensität des Elektronenstromes für einen Wert von  $\kappa_0$ , der den Emissions-Übermikroskopen entspricht, für verschiedene Blendengröße. Die besten Verhältnisse liegen hier für  $n = 1$  vor (geometrisch-optisch tritt gerade noch keine Abblendung ein). Selbst dieser Fall bringt kaum eine Verbesserung des Auflösungsvermögens gegenüber dem Fall

<sup>1)</sup> H. Boersch, ZS. f. techn. Phys. 23, 129, 1942.

fehlender Blenden. Wird der Aperturwinkel dagegen um den Faktor  $1/12$  gegenüber dem Öffnungswinkel des geometrisch-optisch erlaubten Strahlungskegels eingeschränkt, so entsteht eine erhebliche Verschlechterung der Auflösung. Dagegen bringt die Abblendung eine Verbesserung, wenn nicht gerade auf die günstigste Ebene eingestellt ist. Fig. 12 zeigt dies für die Feld- und Einstellverhältnisse, die der Fig. 5 entsprechen. Der Aperturwinkel bei Fig. 12 beträgt wieder  $1/\sqrt{2} \cdot \sqrt{\varepsilon/U}$ . Man erkennt die starke Elektronenkonzentration in der Bildmitte im Vergleich zur Fig. 5

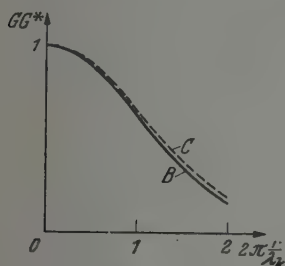


Fig. 11. Wellenfunktion verschiedener Potentiale nach Fig. 1.

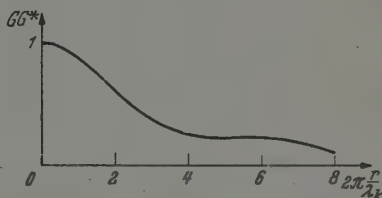


Fig. 12. Wellenfunktion bei Abblendung ( $x_0 = 3$ ;  $x_u = 1,5$ ;  $\xi = 0$ ).

und die so erzielte Verbesserung der Auflösung für diese spezielle Einstellung. Es läßt sich also durch die Abblendung zwar keine erhebliche Auflösungssteigerung an sich erzielen, dagegen wird die Scharfstellung weniger kritisch als ohne Blende. Dieses Ergebnis darf jedoch nicht unzulässig erweitert werden, man darf nicht behaupten, daß in keinem Fall eine Auflösungsverbesserung durch Blenden erzielbar ist.

*Schlußbemerkung.* Die experimentell erreichte Auflösung ist noch nicht so groß wie der theoretische Wert, der in dieser Arbeit als möglich nachgewiesen wurde. Nach der bisherigen Entwicklung erscheint es jedoch durchaus möglich, daß der theoretische Wert noch erreicht wird. Daher ist es vorerst unnötig, die Theorie wegen des Unterschiedes zum Experiment abzuändern. Sollte jedoch die experimentelle Entwicklung eine Verbesserung der Theorie erfordern, so gibt es hierzu mehrere Ansatzpunkte, deren Besprechung zugleich die Grenzen der vorliegenden Betrachtungen aufzeigt.

Das hier benutzte Potential hat einen Sprung an der Metalloberfläche, die Feldstärke hat außerdem einen Sprung am Ende des Beschleunigungsfeldes (Fig. 1, Kurve B). In Wirklichkeit treten solche Sprünge natürlich nicht auf. Es ist aus der Wellenmechanik bekannt, daß Unstetigkeiten des Potentials zu Eigenarten der Wellenfunktion Anlaß geben, die bei stetigem

Potential nicht auftreten. Man könnte also für eine zukünftige Entwicklung daran denken, den Einfluß der Potentialunstetigkeiten zu untersuchen.

Eine Willkür haftet ferner der Elektronenquelle an, die hier so gewählt wurde, daß sie bei verschwindendem Beschleunigungsfeld eine einfache Kugelwelle darstellt. Unberücksichtigt ist damit z. B. die Richtungsabhängigkeit der Emission geblieben, wie sie etwa bei Glühkathoden auftritt. Unmittelbar im Zusammenhang damit steht die Frage, daß die endliche Breite der Energieverteilung nur sehr summarisch berücksichtigt ist. Dadurch könnte folgende Erscheinung verursacht sein: Ersetzt man in Gleichung (37), die zunächst für eine einzige scharfe Energie gilt, die Wellenlänge  $\lambda_k$  durch die Austrittsspannung  $\varepsilon$ , so findet man eine schwache Abnahme der auslösbaren Strecke mit wachsender Spannung  $\varepsilon$ . Das bedeutet folgendes: Mit wachsendem  $\varepsilon$  wächst zwar der geometrisch-optische Fehler, dagegen wird die Wellenlänge und damit der Einfluß der Wellenerscheinungen kleiner. Die Abnahme der wellenmäßig bedingten Einflüsse überwiegt dabei. Deutet man nun  $\varepsilon$  summarisch als mittlere Breite des Energiespektrums, so erhält man eine schwache Abnahme der auflösbaren Strecke mit der Breite der Energieverteilung. Es ist denkbar, daß sich die letztere Erscheinung verwischt, wenn die Energieverteilung genauer berücksichtigt wird.

Von den Bildfehlern wurde nur die auch auf der optischen Achse vorhandene sphärische (und die chromatische) Aberration berücksichtigt, weil diese Fehler grundsätzlich unvermeidbar sind und daher auf jeden Fall das Auflösungsvermögen begrenzen. In Wirklichkeit können aber die nicht berücksichtigten Bildfehler größer sein, also stärkeren Einfluß auf die Auflösung ausüben. Diese Fehler müßten also berücksichtigt werden, wenn sich das theoretische Auflösungsvermögen experimentell nicht erreichen lassen würde. Auch die Abblendung könnte sich viel günstiger auswirken, als es hier gefunden wurde, wenn die vernachlässigten Fehler groß sind. Ferner können diese Fehler eine Abhängigkeit des Auflösungsvermögens von Einzelheiten des Feldverlaufs bedingen. Diese letzte Vernachlässigung hat also möglicherweise erhebliche praktische Bedeutung. Trotzdem muß festgehalten werden, daß bisher kein Grund dafür erkennbar ist, daß die nichtberücksichtigten Bildfehler unvermeidbar sind. Daher ist ihre Vernachlässigung gerechtfertigt, solange es sich um die Berechnung einer grundsätzlich wichtigen Auflösungsgrenze handelt.

*Anhang.* Es ist nachzuweisen, daß durch die Gleichungen (7) bzw. (9) das Verhalten einer punktförmigen Elektronenquelle im Beschleunigungsfeld beschrieben wird.

Eine Quellenfunktion der Differentialgleichung (2) läßt sich nach folgendem Schema gewinnen. Man betrachte die Gleichung

$$\Delta G + [\bar{\varepsilon} + \bar{\Phi}] G = \sigma, \quad (\text{A}, 1)$$

wo  $\sigma$  außerhalb eines kleinen Gebietes  $\tau$  in unmittelbarer Umgebung des Quellpunktes  $z = z_Q$ ,  $r = 0$  verschwindet und in dem Gebiet  $\tau$  von Null verschieden ist derart, daß

$$\int \sigma d\tau = -4\pi, \quad (\text{A}, 2)$$

gleichgültig, wie klein der Bereich  $\tau$  gewählt wird. Statt der punktförmigen Quelle soll also ein kleines Quellgebiet mit der endlichen Quelldichte  $\sigma$  gegeben sein. Läßt man das Quellgebiet  $\tau$  unter der Voraussetzung (A, 2) immer kleiner werden, so erhält man die gesuchte Punktquelle. Bekanntlich ist die Forderung (A, 2) gleichwertig mit

$$\int_{\tau} \frac{\partial G}{\partial n} df = -4\pi, \quad (\text{A}, 3)$$

wo die Integration über die Oberfläche von  $\tau$  zu erstrecken ist und  $n$  die äußere Normale der Oberfläche ist.

Wegen des Aufbaues der Funktion (7) aus partikulären Lösungen, die durch Separation der Differentialgleichung (2) in Zylinderkoordinaten erhalten wurden, soll zunächst der eindimensionale Fall der Gleichung (5) betrachtet werden. An Stelle von (A, 3) tritt hier die Bedingung

$$\left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z_Q+0} - \left. \frac{\partial G}{\partial z} \right|_{z_Q-0} = -4\pi. \quad (\text{A}, 4)$$

Man erhält diese Bedingung aus (A, 3), wenn man als Quellbereich ein *Flächenstück* vom Inhalt 1 in der Ebene  $z = z_Q$  wählt. Eine Lösung von (5), die die Bedingung (A, 4) erfüllt, lautet unter Benutzung der im Anschluß an Gleichung (5) gegebenen Definitionen

$$W_{-+}(z, \alpha) W_{+-}(z_Q, \alpha) \cdot \frac{2\pi}{D}, \quad \text{für } z > z_Q, \quad (\text{A}, 5')$$

$$W_{+-}(z, \alpha) W_{-+}(z_Q, \alpha) \cdot \frac{2\pi}{D}, \quad \text{für } z < z_Q. \quad (\text{A}, 5'')$$

Außer (A, 4) erfüllt diese Funktion noch folgende Bedingungen: Sie ist stetig bei  $z = z_Q$ , sie ist endlich bei sehr großen Werten von  $z$  (Endlichkeitsbedingung bei unendlichem Bereich) und sie stellt einen von  $z = z_Q$  ausstrahlenden Wellenvorgang dar (Ausstrahlungsbedingung).

Zu dem dreidimensionalen Fall kann man übergehen, wenn man die Funktion (A, 5) mit  $\alpha \cdot J_0(\alpha r)$  multipliziert. Man findet dann

$$G' = W_{-+}(z, \alpha) W_{+-}(z_Q, \alpha) \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{2\pi\alpha}{D}, \quad \text{für } z > z_Q \quad (\text{A}, 6')$$

und entsprechend für  $z < z_Q$ . Diese Funktion erfüllt die Bedingung

$$\left. \frac{\partial G'}{\partial z} \right|_{z_Q+0} - \left. \frac{\partial G'}{\partial z} \right|_{z_Q-0} = -4\pi\alpha \cdot J_0(\alpha r).$$

Sie stellt also eine Lösung von (A, 1) dar mit einer flächenhaften Quelldichte  $-4\pi\alpha J_0(\alpha r)$  in der Ebene  $z = z_Q$ .

Multipliziert man die Lösung (A, 6) mit dem Gewichtungsfaktor  $\chi(\alpha)$  und integriert über  $\alpha$  von 0 bis  $\infty$ , so erhält man eine Lösung

$$G'' = \int_0^{\infty} G' \cdot \chi(\alpha) d\alpha. \quad (\text{A, 7})$$

Sie entspricht einer flächenhaften Quelldichte

$$\sigma(r) = -4\pi \int_0^{\infty} \alpha \cdot J_0(\alpha r) \cdot \chi(\alpha) d\alpha.$$

Nach den Hankelschen Umkehrformeln (Nielsen, l. c.) gilt

$$\chi(\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} r \cdot J_0(\alpha r) \sigma(r) dr.$$

Wählt man speziell  $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$  für  $0 < r < r_0$  und  $\sigma = 0$  für  $r_0 < r$ , so ergibt die Integration

$$\chi(\alpha) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{r_0}{\alpha} \cdot \sigma_0 \cdot J_1(\alpha r_0).$$

Nun läßt man noch  $r_0$  gegen Null gehen und erhöht gleichzeitig  $\sigma_0$  derart, daß  $\pi r_0^2 \sigma_0 = -4\pi$  erhalten bleibt. Anschaulich bedeutet dieser Grenzübergang, daß man von der Flächenquelle zu einer Punktquelle der in (A, 2) vorgeschriebenen Stärke übergeht. Man findet dann

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}. \quad (\text{A, 8})$$

Somit kommt man nach (A, 6) bis (A, 8) zu den Endformeln

$$G = \int_0^{\infty} W_{-+}(z, \alpha) W_{+-}(z_Q, \alpha) \cdot J_0(\alpha r) \cdot \frac{\alpha d\alpha}{D(\alpha)}, \quad \text{für } z > z_Q \quad (\text{A, 9})$$

und entsprechend für  $z < z_Q$ .

An dieser Stelle müßte strenggenommen noch die Endlichkeitsbedingung im Unendlichen und die Ausstrahlungsbedingung untersucht werden. Dies mag unterbleiben, es sei einfach auf den leicht überblickbaren Grenzfall konstanten Potentials hingewiesen, aus dem die Formeln (A, 9) in sinngemäßer Verallgemeinerung abgeleitet werden können. Im übrigen ist diese Frage nochmals bei den speziellen durchgerechneten Beispielen behandelt.

# Über die Sekundäremission reiner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand und deren Durchlässigkeit für Sekundärelektronen.

Von R. Suhrmann und W. Kundt<sup>1)</sup>.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942.)

Auf einer gekühlten Glasunterlage ( $83^{\circ}$  abs.) werden im Vakuum dünne, zum Teil undurchsichtige kompakte Schichten von Cu, Ag, Au und Be kondensiert und die Sekundärelektronenausbeute bei  $83^{\circ}$  abs. in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung der Primärelektronen gemessen. Durch vorübergehende Erwärmung auf Zimmertemperatur gehen die Metallschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand über. Im geordneten Zustand ist die Sekundärausbeute besonders für schnelle Primärelektronen kleiner als im ungeordneten. Zur Klärung dieser Beobachtung wird die Durchlässigkeit dünner Metallfilme für Sekundärelektronen untersucht, indem auf einer gekühlten ( $83^{\circ}$  abs.) hoch emittierenden Be-Kathode Cu-, Ag- oder Be-Dampf als dünner Film kondensiert wird, den die an der Be-Kathode ausgelösten Sekundärelektronen durchdringen müssen. Der im ungeordneten Zustand kondensierte Metallfilm geht durch Erwärmen auf Zimmertemperatur in den geordneten Zustand über. Seine Durchlässigkeit für die an der hoch emittierenden Unterlage ausgelösten Sekundärelektronen nimmt hierdurch zu, und zwar für die von schnellen Primärelektronen frei gemachten stärker als für die durch langsame ausgelösten. Auf Grund der Durchdringungsversuche ergibt sich, daß die Abnahme der Sekundäremission kompakter Metallschichten beim Übergang in den geordneten Zustand nur zum Teil auf das bessere Eindringungsvermögen der Primärelektronen zurückgeführt werden kann. Zur Deutung der Erscheinung muß außerdem angenommen werden, daß die Zahl der Primärelektronen absorbierenden oder die Zahl der Sekundärelektronen emittierenden Zentren im geordneten Zustand kleiner ist als im ungeordneten.

## 1. Problemstellung.

Um in den Emissionsmechanismus sekundärer Elektronen, die an der reinen Oberfläche eines Metalls ausgelöst werden, Einblick zu gewinnen, erscheint es zweckmäßig, den Einfluß der kristallinen Struktur auf die Größe des Ausbeutefaktors  $I_s/I_p$  von Sekundärelektronenstrom  $I_s$  zu Primärelektronenstrom  $I_p$  zu untersuchen. Dahingehende Versuche wurden von R. Kollath<sup>2)</sup> durchgeführt, der im besten Vakuum auf einem bei  $1500^{\circ}$  C ausgeheizten Wolframblech bei Zimmertemperatur Beryllium in kompakter Schicht kondensierte und im Maximum der Ausbeute als Funktion des Beschleunigungspotentials  $V$  der Primärelektronen für  $I_s/I_p$  zunächst

<sup>1)</sup> D 85. Eine kurze Veröffentlichung erfolgte in den Naturwissensch. 27, 548, 707, 1939. — <sup>2)</sup> R. Kollath, Ann. d. Phys. 33, 285, 1938.



einen Wert von 0,4 bis 0,6 erhielt. Wurde das W-Blech und damit die Be-Schicht vorübergehend bis auf 700° C erhitzt, so war keine Änderung der Sekundäremission festzustellen; eine Erhitzung auf 750° C und darüber ließ die Emission jedoch anwachsen, so daß die bei Zimmertemperatur gemessene Ausbeute schließlich Werte über 4 aufwies. Kollath vermutet, daß strukturelle Umlagerungen in der Schicht, z. B. Kristallisationserscheinungen, diese starke Zunahme der Ausbeute hervorrufen, daß also die Sekundäremission auch bei einkomponentigen Systemen von der kristallinen Struktur des betreffenden reinen Metalls beträchtlich abhängt.

Die Struktur einer aus dem Dampfzustand kondensierten Metallschicht kann nun wesentlich beeinflußt werden, wenn man den Metaldampf im Hochvakuum auf einer stark (z. B. mit flüssiger Luft) gekühlten Unterlage niederschlägt<sup>1)</sup>. Die Schicht kondensiert dann im ungeordneten Zustand und geht mit Erhöhung der Temperatur bis auf Zimmertemperatur irreversibel in einen geordneteren Zustand über. Wie groß die strukturellen Unterschiede zwischen den beiden Zuständen sind, geht am besten daraus hervor, daß die elektrische Leitfähigkeit eines gut leitenden Metalls auf das Vielfache, das Lichtreflexionsvermögen für  $\mathcal{E}||$  auf das Doppelte beim Übergang aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand anwachsen kann. Die ungeordnete Metallschicht besitzt einen extrem hohen Zusatzwiderstand, wie er an kristallinem Material durch Kaltverformung bisher nicht erreicht wurde. Die Unordnung in der frisch kondensierten Metallschicht wirkt sich also in der gleichen Weise, aber wesentlich stärker aus wie abnorm große, durch Kaltverformung hervorgerufene Verzerrungen des Kristallgitters beim kristallinen Material.

Da man also die Struktur der bei 83° abs. kondensierten Metallschichten in so hohem Maße verändern kann, ohne sie auf Temperaturen erhitzen zu müssen, bei denen chemische Veränderungen eine Rolle spielen können, haben wir im folgenden die Sekundäremission von Cu-, Ag-, Au- und Be-Schichten untersucht, die wir im Hochvakuum bei 83° abs. aus dem Dampfzustand kondensierten und nach und nach bis auf Zimmertemperatur erwärmten. Zur Messung kühlten wir die Schicht jedesmal wieder auf 83° abs. ab. Um die Ergebnisse deuten zu können, war es erforderlich, die Elektronendurchlässigkeit aufgedampfter dünner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand zu untersuchen. Zu diesem Zwecke konden-

<sup>1)</sup> R. Suhrmann u. G. Barth. Phys. ZS. **35**, 971, 1934; **36**, 843, 1935; ZS. f. Phys. **103**, 133, 1936; R. Suhrmann u. W. Berndt. ebenda **115**, 17, 1940; R. Suhrmann u. H. Schnackenberg. ebenda **119**, 287, 1942. Dort auch weitere Literaturhinweise.

sierten wir in einer weiteren Versuchsreihe dünne für langsame Elektronen durchlässige Cu-, Ag- oder Be-Schichten auf einer vorher hergestellten und auf 830 abs. gekühlten Unterlage hoher Sekundärelektronenausbeute und ermittelten die Veränderung der Ausbeute beim vorübergehenden Erwärmen dieses Systems auf Zimmertemperatur.

## 2. Versuchsanordnung.

a) *Untersuchungsgefäß.* Nach einigen Vorversuchen mit einer Dreielektrodenröhre wurde die in Fig. 1 dargestellte Versuchszelle aus Wolframglas benutzt. Das untere Ansatzrohr enthielt die zur Erzeugung eines scharfen Elektronenstrahls erforderliche Elektronenkanone mit der Wolframwendel  $K$  und den Blenden  $B_1$  und  $B_2$  aus vakuumgeschmolzenem Nickelblech.  $K$  bestand aus 0,1 mm dickem Draht, der mit etwa 0,75 Amp. geheizt wurde. Die Öffnung des Wehnelt-Zylinders  $B_1$  betrug 5 mm, die der Blende  $B_2$  2 mm. Ihre Längen waren 25 bzw. 8 mm.

Der Elektronenkanone gegenüber befand sich das untere abgeflachte Ende  $P$  eines Glasrohres  $R$ , in das flüssige Luft eingefüllt werden konnte. Auf  $P$  konnte von den Heizwendeln  $S_1$ ,  $S_2$  und  $S_3$  aus das zu untersuchende Metall aufgedampft werden. Um die Widerstandsänderung der

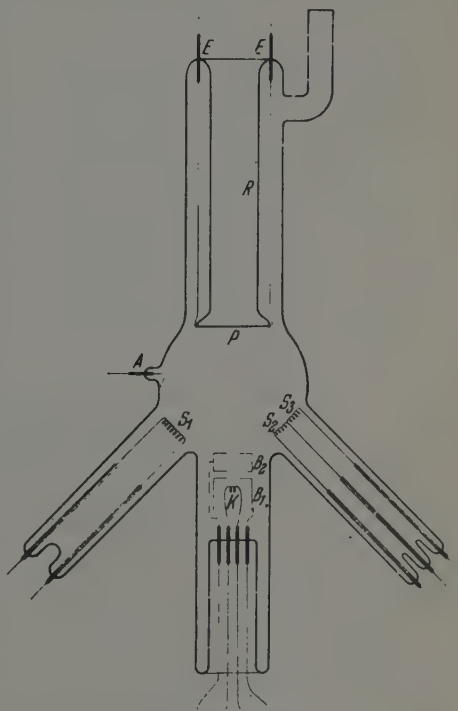


Fig. 1. Versuchszelle.

auf  $P$  kondensierten als Prallelektrode dienenden Metallschicht verfolgen zu können, liefen zwei Drähte aus vakuumgeschmolzenem Nickel von den oberen beiden Wolfram-Einschmelzungen  $E$  an den Rand der kreisförmig ausgebildeten Glasfläche  $P$ . Einer der Drähte wurde gleichzeitig als Zuführung für das Prallanodenpotential benutzt.

Die beim Aufdampfen der Prallelektrode auf der Innenseite der Kugel kondensierte Metallschicht diente als Sauganode. Zwei Einschmelzungen  $A$  sorgten für elektrischen Kontakt.

Um eine große Wärmekapazität der Prallelektrode zu erhalten und störende Aufladungen durch die flüssige Luft zu vermeiden, wurde das Rohr  $R$  mit Kupferspänen gefüllt, die an Erde lagen. Ihre Temperatur konnte durch ein Thermoelement kontrolliert werden.

*b) Meßmethode.* Zur Messung des Primärelektronenstromes  $I_p$  und des Sekundärelektronenstromes  $I_s$  wurde eine elektrometrische Meßmethode

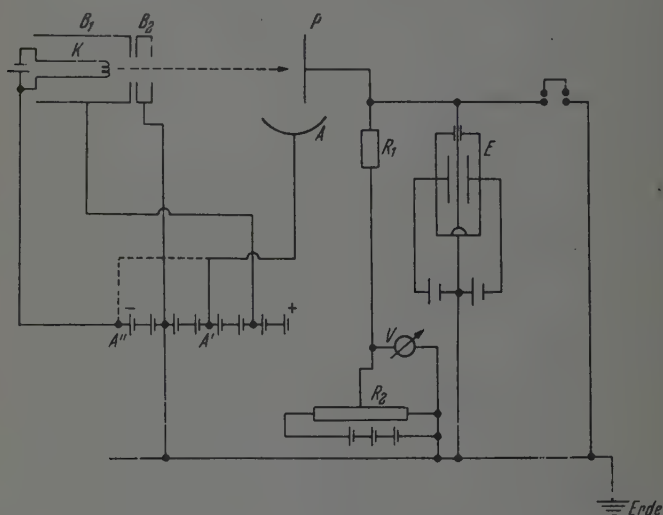


Fig. 2. Schaltung zur Messung des Primärstromes  $I_p$  und des Sekundärstromes  $I_s$ .

benutzt. Wie aus Fig. 2 zu erschen ist, lagen die Blende  $B_2$  und die Prallanode  $P$  an Erde. Der Wehnelt-Zylinder  $B_1$  war positiver als  $B_2$  und die Sauganode  $A$  bei der Messung von  $I_s - I_p$  um etwa 20 Volt positiver als  $P$  ( $A'$ ). Zur Messung von  $I_p$  war  $A$  etwa 30 Volt negativer als  $P$  ( $A''$ ). Die Strommessung erfolgte durch Ermittlung des Spannungsabfalls längs des Hochohmwiderstandes  $R_1$  von  $10^{10} \Omega$ . Die Kompensationsspannung wurde mit dem Präzisionsvoltmeter  $V$  gemessen; es war  $R_2 \ll R_1$ . Als Nullinstrument diente ein hochempfindliches Fadenelektrometer  $E$ .

Die benutzte Meßmethode gestattete, Primärströme in der Größenordnung von  $10^{-9}$  bis  $10^{-10}$  Amp. anzuwenden, wodurch eine unzulässige örtliche Erwärmung der Prallanode vermieden wurde.

Das Potential des Wehnelt-Zylinders  $B_1$  mußte derart eingestellt werden, daß alle durch  $B_2$  hindurchtretenden Primärelektronen auf die Prallanode gelangten. Dies geschah, indem man das Optimum des Ausbeutefaktors an einer kompakten Silberschicht bei Änderung des Potentials von  $B_1$  unter Konstanthaltung der Potentiale von  $K$ ,  $B_2$ ,  $P$  und  $A$  ermittelte. Das Potential der Sauganode  $A$  lag hierbei im Sättigungsgebiet für die Sekundärelektronen. Bei einer Beschleunigungsspannung der Primärelektronen von 400 Volt lag das für einen scharfen Elektronenstrahl erforderliche Potential von  $B_1$  zwischen 50 und 60 Volt. Als Saugspannung zwischen Anode  $A$  und Parallelektrode  $P$  genügten bereits 20 Volt, wie Fig. 3 erkennen läßt.

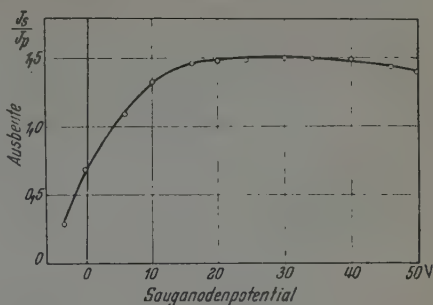


Fig. 3.  $I_s/I_p$  in Abhängigkeit vom Sauganodenpotential. Beschleunigungsspannung der Primärelektronen 400 Volt. Ag als Prallanodenmaterial.

c) *Ausführung der Messungen.* Für die Durchführung der Versuche wurden vakuumgeschmolzene Metallproben verwendet. Ehe man sie in die eigentliche Versuchszelle einführte, heizte man in einer besonderen Vakuumapparatur zunächst die Wolframwendel und dann die in ihr befindliche Metallprobe aus, bis das Metall zu verdampfen begann. Cu, Ag und Au wurden hierbei zu einem Kügelchen zusammengeschmolzen. Darauf wurden die Rohre mit den Verdampfungswendeln an die Versuchszelle angeschmolzen und die letztere an der Hochvakuumapparatur 4 bis 5 Stunden bei 350° C ausgeheizt. Die Metallteile der Elektronenkanone wurden durch Elektronenbombardement ausgeglüht und die Verdampfungswendeln bis kurz vor dem Beginn des Verdampfens der Metallproben geglüht.

Nachdem man das Glasrohr  $R$  mit flüssiger Luft gefüllt hatte, dampfte man das zu untersuchende Metall auf  $P$  auf. Der etwa 15 Minuten dauernde Aufdampfprozeß wurde durch Messung des Widerstandes der kondensierten Metallschicht kontrolliert. Nun ermittelte man die Sekundärelektronenausbeute in Abhängigkeit vom Beschleunigungspotential an der „ungeordneten“ Metallschicht und ließ darauf die flüssige Luft in  $R$  verdampfen. Nachdem sich die Metallschicht auf eine Temperatur zwischen 83° abs. und Zimmertemperatur erwärmt und hierbei in einen weniger ungeordneten Zustand übergegangen war, wie man aus der Abnahme des Widerstandes ersah, kühlte man wieder auf 83° abs. ein und nahm die Ausbeutekurve von

neuem auf. Schließlich ließ man die Metallschicht sich bis Zimmertemperatur erwärmen, kühlte wieder ein und ermittelte die Ausbeutekurve im „geordneten“ Zustand.

### 3. Sekundärelektronenausbeute von Cu-, Ag-, Au- und Be-Schichten im ungeordneten und geordneten Zustand.

a) Kupfer. Fig. 4a und 4b zeigen das Verhalten von Cu-Schichten in zwei verschiedenen Versuchen. In beiden Fällen betrug der anfängliche Schichtwiderstand  $21\ \Omega$  nach der Kondensation bei  $83^\circ$  abs. Nach vorübergehender Erwärmung auf  $243^\circ$  abs. und Wiedereinkühlung auf  $83^\circ$  abs. betrug

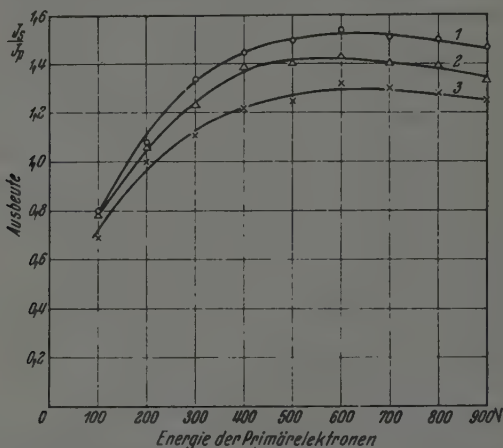


Fig. 4a. Sekundärelektronenausbeute der Cu-Schicht I nach der Kondensation bei  $83^\circ$  abs. (1) im ungeordneten Zustand und 1 bei zunehmender Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf  $243^\circ$  abs. (2) und Zimmertemperatur (3); Anfangswiderstand bei  $83^\circ$  abs.:  $21\ \Omega$ .

der Widerstand von Cu I (Fig. 4a)  $15\ \Omega$ . Die Ausbeutekurve 2 liegt im Maximum um etwa 7% niedriger als 1. Der Ordnungsvorgang ist jedoch noch nicht beendet. Nachdem die Schicht einige Stunden bei Zimmertemperatur geblieben war und wieder eingekühlt wurde, war die Ausbeute noch weiter gesunken<sup>1)</sup> (Kurve 3); insgesamt nahm die Ausbeute bei 700 Volt von Kurve 1 auf 3 mit zunehmender Ordnung von 1,53 auf 1,30 ab, also um 15%.

Die gute Wiederholbarkeit der Erscheinung ersieht man aus Fig. 4b. Bei diesem Versuch wurde nach Ermittlung von Kurve 1 unmittelbar nach

<sup>1)</sup> Die weitere Widerstandsabnahme konnte nicht mehr ermittelt werden, da eine der beiden Elektroden beim Wiedereinkühlen abgeplatzt war, was im Laufe der Versuche öfters vorkam; für die Messung der Sekundärelektronenausbeute war dieser Umstand wegen des Vorhandenseins der zweiten Elektrode bedeutungslos.

der Kondensation bei 83° abs. direkt auf Zimmertemperatur erwärmt und nach einiger Zeit wieder eingekühlt und gemessen (Kurve 2). Da die Schicht zu Anfang eine etwas kleinere Ausbeute (1,44) zeigt als bei Cu I, beträgt die Abnahme von 1,44 auf 1,33 nur 8%. Wahrscheinlich war die anfängliche Unordnung, die sehr von den Aufdampfbedingungen (Aufdampfgeschwindigkeit, Temperatur der Aufdampfspirale) abhängt<sup>1)</sup>, beim ersten Versuch größer als beim zweiten.

Nach der Aufnahme von Kurve 2 wurde nochmals auf Zimmertemperatur erwärmt und die Ausbeute bei dieser Temperatur ermittelt. Wie die eingetragenen Punkte (Dreiecke) zeigen, stimmen die Werte innerhalb

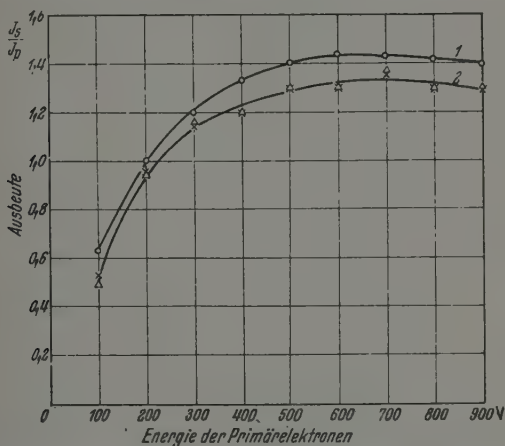


Fig. 4b. Sekundärelektronenausbeute der Cu-Schicht II nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei größerer Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur [(2) Kreuze: gemessen bei 83° abs.; Dreiecke: gemessen bei 293° abs.]; Anfangswiderstand bei 83° abs.: 21  $\Omega$ .

der Meßfehlergrenzen mit den bei 83° abs. gemessenen überein. Ein bemerkbarer Temperatureinfluß ist also nach dem Übergang in den geordneten Zustand zwischen 83° abs. und 293° abs. nicht vorhanden<sup>2)</sup>.

Die an Cu im geordneten Zustand erhaltenen Ausbeutewerte  $I_s/I_p$  von 1,30 und 1,33 an dem bei  $V_m = 700$  Volt gelegenen Maximum stimmen mit den neueren Literaturwerten gut überein: Warnecke<sup>3)</sup> findet  $I_s/I_p = 1,27$  bei  $V_m = 600$  Volt; Bruining und De Boer<sup>4)</sup> geben an  $I_s/I_p = 1,29$  bei  $V_m = 600$  Volt.

<sup>1)</sup> Vgl. R. Suhrmann u. H. Schnackenberg, l. c. — <sup>2)</sup> Auch bei den übrigen Metallen wurde bei reinen Oberflächen, nachdem die betreffende Metallschicht in den geordneten Zustand übergegangen war, kein Temperatureinfluß zwischen 83 und 293° abs. festgestellt. — <sup>3)</sup> R. Warnecke, Journ. de phys. et le Radium 7, 270, 1936. — <sup>4)</sup> H. Bruining u. J. H. De Boer, Physica 5, 17, 1938.



b) *Silber*. Die Fig. 5a, b und c lassen das Verhalten von Ag-Schichten verschiedener Dicke erkennen, deren Anfangswiderstände bei 83° abs. 28  $\Omega$ , 61  $\Omega$  und 1000  $\Omega$  betrugen. In Fig. 5a wurde jede Kurve zweimal hintereinander gemessen; man erkennt, daß die doppelt gemessenen Punkte innerhalb der Meßfehler streuen. Während Kurve 1 unmittelbar nach der Kondensation bei 83° abs. gemessen wurde, erhielt man Kurve 2 nach Erwärmung auf Zimmertemperatur und anschließender Wiedereinkühlung; der Widerstand bei 83° abs. betrug jetzt 10,2  $\Omega$ . Nach dieser Messung

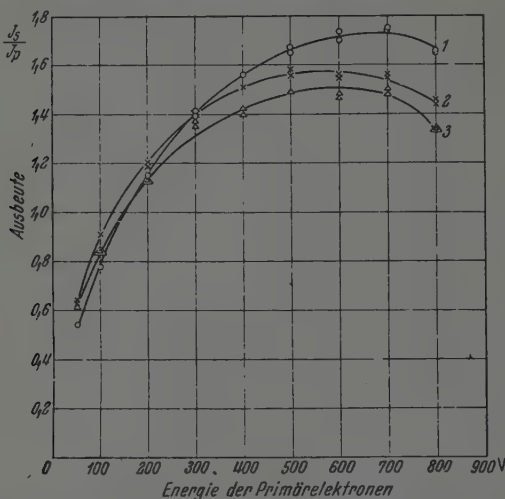


Fig. 5a. Sekundärelektronenausbeute der Ag-Schicht I nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei zunehmender Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur (2) und 325° abs. (3); Anfangswiderstand bei 83° abs.: 28  $\Omega$ .

erwärmte man die Schicht auf etwa 325° abs. und ließ sie einen Tag stehen; der Widerstand bei 83° abs. betrug hiernach 6,6  $\Omega$ . Nach der Rückkühlung auf 83° abs. wurde Kurve 3 aufgenommen. Auch hier erkennt man, wie mit zunehmender Ordnung nicht nur der Widerstand sinkt, sondern auch die Sekundärelektronenausbeute abnimmt, und zwar von 1,73 auf 1,48, also um 14% bei 600 Volt. Das Ausbeutemaximum verschiebt sich mit zunehmender Ordnung etwas nach kleineren Spannungen; die langsameren Primärelektronen werden also bei größerer Ordnung begünstigt.

In Fig. 5b war die Schichtdicke geringer als in Fig. 5a, der Anfangswiderstand bei 83° abs. betrug 61  $\Omega$ . Nachdem die Schicht vorübergehend auf 223° abs. erwärmt und wieder eingekühlt war, erhielt man Kurve 2 und nach zweitägiger Erwärmung auf Zimmertemperatur und Wiedereinkühlen Kurve 3; der Widerstand betrug nun 13  $\Omega$ . Die Ausbeute hat

bei 600 Volt um 19% von 1,63 auf 1,49 abgenommen. Auch bei dieser Ag-Schicht ist eine deutliche Verschiebung des Ausbeutemaximums nach kleineren Spannungen zu beobachten.

Die dünnste Ag-Schicht in Fig. 5c zeigte nach dem Erwärmen auf Zimmertemperatur und Wiedereinkühlen auf 83° abs. (Kurve 2) eine Abnahme der Ausbeute bei 700 Volt um 17%, von 1,82 auf 1,52. Eine Verschiebung des Maximums und damit eine Bevorzugung der langsamen Primärelektronen im geordneten Zustand ist bei dieser dünnsten Schicht

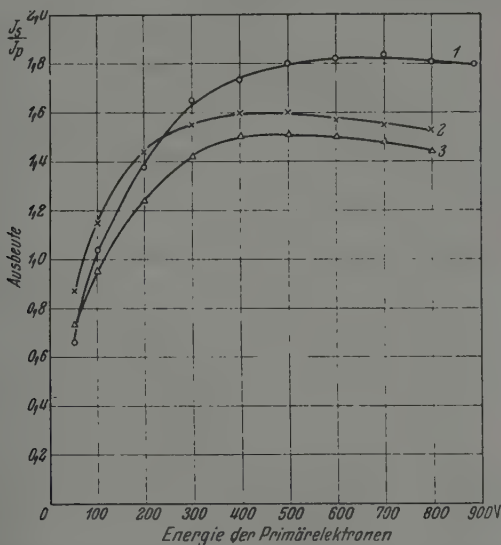


Fig. 5b Sekundärelektronenausbeute der Ag-Schicht II nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei zunehmender Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf 223° abs. (2) und Zimmertemperatur (3); Anfangswiderstand bei 83° abs.: 61  $\Omega$ .

nicht mehr zu erkennen (Kurve 1 und 2). Auf dieser Schicht wurde nun eine sehr dicke Ag-Schicht bei 83° abs. kondensiert und ihre Ausbeute bei tiefer Temperatur vor (Kurve 1a) und nach dem Erwärmen auf Zimmertemperatur (Kurve 2a) gemessen. Man sieht, daß auch die Ausbeute an dieser zusätzlich kondensierten kompakten Schicht durch die vorübergehende Erwärmung auf Zimmertemperatur gesunken ist, und zwar beim Ausbeutemaximum  $V_m = 750$  Volt von 1,84 auf 1,46, also um 21%. Trotz des Vorhandenseins der dünnen geordneten ersten Schicht kondensiert demnach die zweite Schicht bei 83° abs. im ungeordneten Zustand. Eine Benachteiligung der langsamen Primärelektronen im ungeordneten Zustand kann man auch hier feststellen, wenn man Kurve 1a und 1 einserseits, Kurve 2a' und 2 andererseits miteinander vergleicht.

Zum Vergleich der Lage des Maximums  $V_m = 750$  Volt und des Ausbeutewertes  $I_s/I_p = 1,46$  der kompakten Ag-Schicht im geordneten Zustand seien wieder die Werte von Warnecke ( $V_m = 800$  Volt,  $I_s/I_p = 1,47$ ) und Bruining und De Boer ( $V_m = 800$  Volt,  $I_s/I_p = 1,56$ ) herangezogen.

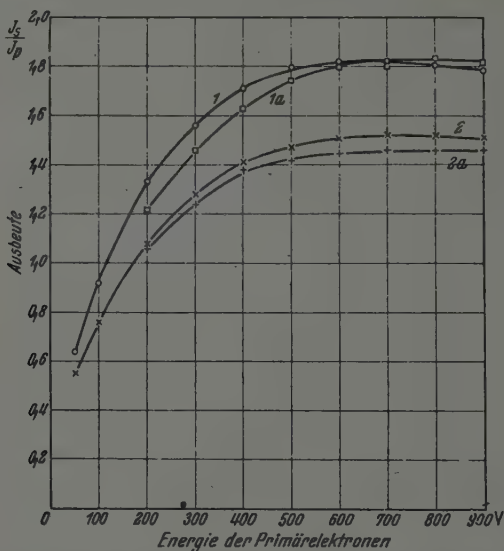


Fig. 5c. Sekundärelektronenausbeute der Ag-Schicht III nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei größerer Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur (2); Anfangswiderstand bei 83° abs.: 1000  $\Omega$ . — Sekundärelektronenausbeute an einer bei 83° abs. zusätzlich kondensierten, kompakten Ag-Schicht von einem sehr kleinen innerhalb der Meßfehlergrenze liegenden Widerstand: nach der Kondensation bei 83° abs. (1a) ungeordnet; nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur (2a) bei größerer Ordnung.

c) Gold. Die Versuchsergebnisse an Au-Schichten sind in Fig. 6 wiedergegeben. Die Ausbeute bei 650 Volt fiel nach vorübergehendem Erwärmen auf 243° abs. von 1,78 auf 1,63, also um 8% (Kurve 2). Nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur betrug sie bei 83° abs. 1,52 (Kurve 3); sie war also insgesamt durch den Übergang in den geordneten Zustand um 15% gefallen.

In einem anschließenden Versuch wurde auf dieser Schicht bei 83° abs. eine weitere, dicke Au-Schicht kondensiert. Die Ausbeutewerte der neuen Schicht (Kurve 1a) fallen mit denen der ersten im ungeordneten Zustand zusammen. Nachdem die Schicht vorübergehend auf Zimmertemperatur erwärmt und wieder eingekühlt worden war (Kurve 3a), hatte die Ausbeute bei 650 Volt von 1,78 auf 1,47, also um 17% abgenommen.

Auch die Au-Kurven lassen wie die Ag-Kurven erkennen, daß die langsamen Primärelektronen im Verhältnis zu den schnellen im geordneten Zustand mehr Sekundärelektronen frei machen als im ungeordneten. Die Werte von 1,52 und 1,47 beim Maximum von 650 Volt stimmen mit dem

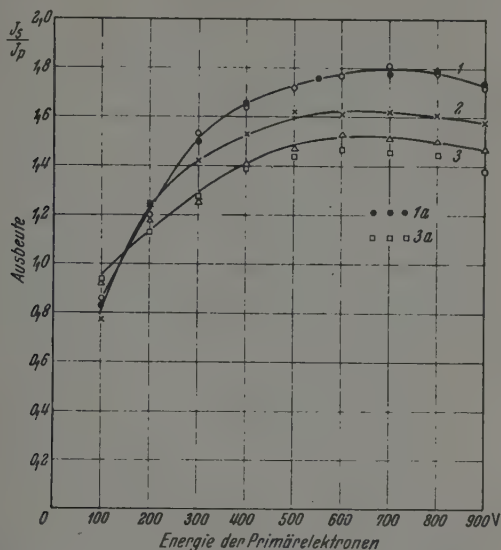


Fig. 6. Sekundärelektronenausbeute einer Au-Schicht nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei zunehmender Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf 243° abs. (2) und Zimmertemperatur (3); Anfangswiderstand bei 83° abs.: 25,8  $\Omega$ . -- Sekundärelektronenausbeute an einer zusätzlich bei 83° abs. kondensierten dicken Au-Schicht nach der Kondensation bei 83° abs. (1a) im ungeordneten und nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur (3a) geordneten Zustand.

von Warnecke erhaltenen ( $V_m$  800 Volt,  $I_s/I_p = 1,46$ ) gut überein. Die Werte für  $I_s/I_p$  am Ausbeutemaximum für Cu-, Ag und Au-Schichten betragen bei gleicher Herstellungsweise und unter Berücksichtigung nur der dickeren Schichten 1,31 für Cu, 1,46 für Ag und 1,47 für Au; sie liegen also in dieser Gruppe des periodischen Systems wie die Atomvolumina, deren Werte 7,1; 10,3 und 10,2 betragen.

d) *Beryllium*. Die Sekundäremission einer Be-Schicht von 50  $\Omega$  Widerstand unmittelbar nach der Kondensation bei 83° abs. zeigt Kurve 1 in Fig. 7. Nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur ist der Widerstand bei 83° abs. auf 20,6  $\Omega$  gesunken. Die Ausbeute (Kurve 2), deren Maximum bei 200 Volt liegt, hat sich an dieser Stelle durch den Übergang der Schicht zu größerer Ordnung von 0,655 bis 0,630 vermindert, also nur um 4%. Für die schnellen Primärelektronen hingegen ist die Abnahme der Ausbeute wesentlich größer: Bei 800 Volt z. B. 26%. Auch hier werden

demnach die langsamen Primärelektronen beim Übergang in den geordneten Zustand bevorzugt.

An aufgedampften Be-Schichten fanden Bruining und De Boer  $V_m = 200$  Volt,  $I_s/I_p = 0,53$ ; Kollath  $V_m = 300$  Volt,  $I_s/I_p = 0,42$ ;

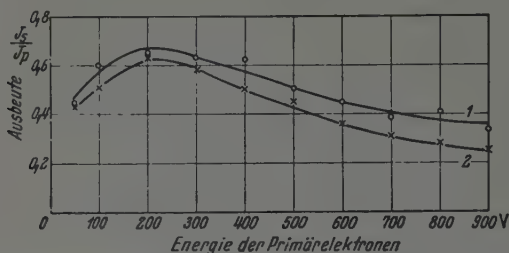


Fig. 7. Sekundärelektronenausbeute einer Berylliumschicht nach der Kondensation bei 83° abs. (1) im ungeordneten Zustand und bei größerer Ordnung nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur (2); Anfangswiderstand bei 83° abs.: 50  $\Omega$ .

Schneider<sup>1)</sup>  $V_m = 200$  Volt,  $I_s/I_p = 0,90$ ; Görlich<sup>2)</sup>  $V_m = 280$  Volt,  $I_s/I_p = 0,8$ . Die obigen Werte ordnen sich also gut in die der genannten Autoren ein.

#### 4. Durchlässigkeit aufgedampfter dünner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand für Sekundärelektronen.

Nach Versuchen von Katz<sup>3)</sup> nimmt die Durchlässigkeit dünner Metallfolien besonders für langsame Elektronen zu, wenn diese Folien durch Erwärmen rekristallisiert werden. Die Begünstigung der langsamen Primärelektronen gegenüber den schnelleren, nach Überführung der bei 83° abs. kondensierten ungeordneten Metallschicht in einen geordneteren Zustand, könnte also durch das tiefere Eindringungsvermögen der langsamen Primärelektronen in die geordnete Schicht erklärt werden. Man sollte nun erwarten, daß erst recht die Sekundärelektronen, deren Energie nach dem Verlassen der Prallelektrode bei nur etwa 10 e-Volt liegt<sup>4)</sup>, durch die geordnete Metallschicht besser hindurchdringen könnten als durch die ungeordnete, daß also die Ausbeute mit zunehmender Ordnung anwachsen würde. Da die Versuche eine Abnahme der Sekundäremission beim Übergang der Schicht aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand ergaben, mußte man, um hierfür eine Deutung finden zu können, zunächst die Durchlässigkeit für Sekundärelektronen von Metallschichten, die bei 83° abs. kondensiert

<sup>1)</sup> E. G. Schneider, Phys. Rev. **54**, 185, 1938. — <sup>2)</sup> P. Görlich, Phys. ZS. **42**, 129, 1941. — <sup>3)</sup> H. Katz, Phys. ZS. **38**, 981, 1937. — <sup>4)</sup> E. Rudberg, Proc. Roy. Soc. London (A) **127**, 111, 1930.

wurden, nach vorübergehender Erwärmung auf Zimmertemperatur untersuchen.

Solche Versuche führten wir an dünnen Cu-, Ag- und Be-Schichten in folgender Weise durch. Wir stellten zunächst eine hoch emittierende Sekundärkathode als Prallelektrode her, indem wir eine Be-Schicht auf die Glasunterlage aufdampften und diese in Sauerstoff von vermindertem Druck auf etwa 3500 C erwärmten<sup>1)</sup>, etwa 2 Stunden lang. Dann wurde der Sauerstoff abgepumpt und die Zelle gründlich ausgeheizt. Die maximale Ausbeute derartiger Schichten lag um  $I_s/I_p = 4$ . Auf dieser sensibilisierten Schicht kondensierten wir nun bei 830 abs. die dünne Metallschicht, deren Durchlässigkeit für Sekundärelektronen geprüft werden sollte, und nahmen die Ausbeutekurve bei 830 abs. auf, einmal unmittelbar nach der Kondensation, ein andermal nach vorübergehender Erwärmung bis zu Zimmertemperatur. An der Höhe der Ausbeutekurve und ihrer Form hatten wir ein Kriterium dafür, ob die in der darunterliegenden sensibilisierten Be-Schicht ausgelösten Sekundärelektronen die aufliegende Metallschicht noch zu durchdringen vermochten, und ob sich ihr Durchdringungsvermögen beim Übergang der Metallschicht in einen geordneteren Zustand änderte.

a) *Kupfer*. In Fig. 8 stellt Kurve 1 die Ausbeute der mit Sauerstoff behandelten Be-Oberfläche dar. Das Maximum dieser Kurve liegt etwas oberhalb 300 Volt. Nachdem bei 830 abs. auf dieser hoch emittierenden Schicht eine dünne Cu-Schicht kondensiert worden war, wurde Kurve 2 erhalten, deren Maximum bei etwa 400 Volt liegt. Da das Emissionsmaximum einer kompakten auf Glas kondensierten Cu-Schicht bei etwa 700 Volt gelegen ist, sind die in Kurve 2 gemessenen Sekundärelektronen offensichtlich der Berylliumunterlage zuzuschreiben, von der aus sie die dünne Cu-Schicht durchdringen.

Nachdem die Schicht auf 2430 abs. erwärmt und wieder rückgekühlt worden war, erhielten wir Kurve 3, und nach dem Erwärmen auf 2930 abs. und Wiedereinkühlen Kurve 4. Schließlich wurde die Schicht 12 Stunden auf 2930 abs. erwärmt und wieder auf 830 abs. eingekühlt. Die Messung ergab jetzt Kurve 5. Man erkennt, daß sich die Ausbeutekurve der die Cu-Schicht durchdringenden Be-Elektronen mit zunehmender Ordnung der Cu-Schicht nach höheren Ausbeutewerten verlagert, während das Maximum an der gleichen Stelle bleibt. Die Durchlässigkeit der Cu-Schicht für die Be-Sekundärelektronen wächst also mit zunehmendem Ordnungsgrad an. Auch die Höhe des Ausbeutemaximums  $I_s/I_p = 2,0$  gegenüber

<sup>1)</sup> R. Kollath, Ann. d. Phys. **33**, 290. 1938.



$I_s/I_p$  1,3 einer geordneten kompakten Cu-Schicht auf Glas läßt erkennen, daß die gemessenen Sekundärelektronen im wesentlichen der Be-Schicht entstammen.

Insgesamt nimmt die Ausbeute durch den Übergang der aufgedampften Cu-Schicht in den geordneten Zustand bei 400 Volt von  $I_s/I_p = 1,58$  auf

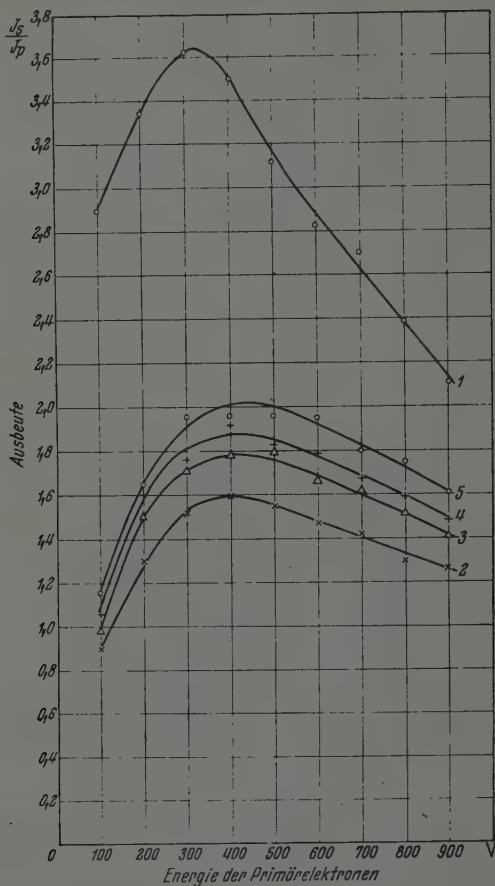


Fig. 8. Sekundärelektronenausbeute einer sensibilisierten Be-Kathode (1) nach der Kondensation einer dünnen Cu-Schicht bei 83° abs. im ungeordneten Zustand (2) und nach dem Übergang dieser Cu-Schicht in Zustände größerer Ordnung durch vorübergehende Erwärmung auf 243° abs. (3), 293° abs. (4) und 12 Stunden dauernde Erwärmung auf 293° abs. (5).

2,00, also um 27%, zu. Bei 800 Volt wächst sie von  $I_s/I_p = 1,30$  auf 1,72, also um 32% an.

b) Silber. Die Versuche an zusätzlich bei 83° abs. aufgedampften Ag-Schichten bestätigen die voranstehenden Ergebnisse an zusätzlichen

Cu-Schichten. Kurve 1 in Fig. 9 zeigt wieder die Ausbeute der als Unterlage dienenden sensibilisierten Be-Schicht, deren maximale Ausbeute noch etwas höher liegt als in Fig. 8.

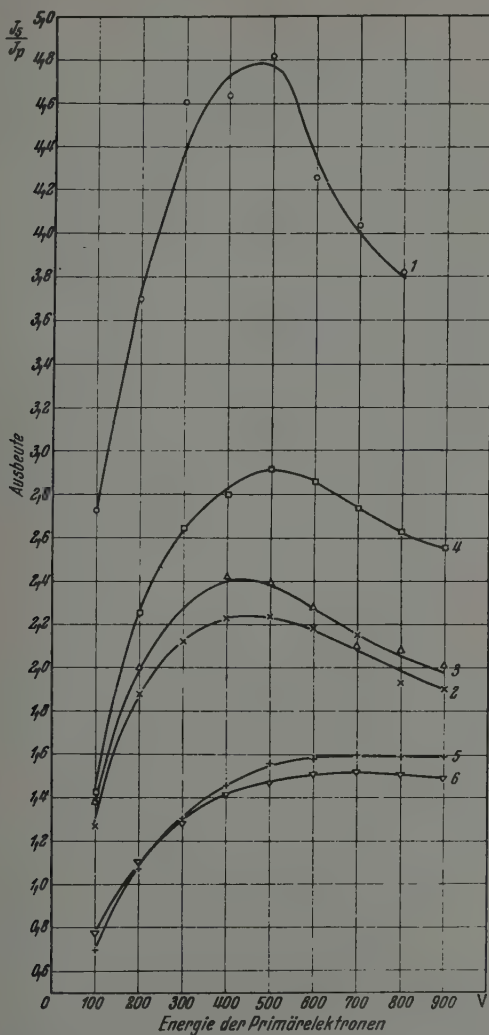


Fig. 9. Sekundärelektronenausbeute einer sensibilisierten Be-Kathode (1) nach der Kondensation einer dünnen Ag-Schicht bei 83° abs. im ungeordneten Zustand (2) und nach dem Übergang dieser Ag-Schicht in Zustände größerer Ordnung durch vorübergehende Erwärmung auf 243° abs. (3) und 293° abs. (4). — Kurve 5: Nach der zusätzlichen Kondensation einer ungeordneten dicken Ag-Schicht bei 83° abs.; Kurve 6: Nach dem Übergang dieser Ag-Schicht in einen geordneteren Zustand durch vorübergehende Erwärmung auf 273° abs.

Nachdem auf dieser bei  $830^\circ$  abs. eine dünne Ag-Schicht kondensiert worden war, wurde Kurve 2 in Fig. 9 gemessen. Wir erwärmten die Schicht nun vorübergehend auf  $2480^\circ$  abs., kühlten wieder ein und erhielten Kurve 3. Nach abermaligem Erwärmen, jetzt auf  $2930^\circ$  abs. und Wiedereinkühlung ergab sich Kurve 4. Die Ausbeute bei 500 Volt hat infolge des Ordnungsvorganges von 2,24 auf 2,89, also um 29% zugenommen; bei 800 Volt ist sie von 1,97 auf 2,64, also um 34% angewachsen. Wiederum liegt das Maximum der Ausbeutekurve in der Nähe des Maximums der sensibilisierten Be-Schicht und jedenfalls bei weitem unterhalb des Maximums einer kompakten geordneten Ag-Schicht, das bei 750 Volt gefunden worden war. Auch die Höhe der Ausbeutekurven ist wesentlich größer als die einer kompakten Ag-Schicht mit  $I_s/I_p = 1,46$ .

Bemerkenswert ist, daß ebenso wie bei der Cu-Schicht auch bei der Ag-Schicht  $I_s/I_p$  für die schnellen Primärelektronen stärker anwächst als für die langsameren, wenn die von den Be-Sekundärelektronen durchdrungene Metallschicht aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand übergeht. Die Erklärung hierfür ist wohl darin zu suchen, daß bei den von den *schnellen* Primärelektronen in der Be-Kathode ausgelösten Sekundärelektronen die stärker abgebremsten wegen der größeren Eindringtiefe der schnellen Elektronen überwiegen. Für diese macht sich also die größere Durchlässigkeit, welche die aufgedampfte Metallschicht im geordneten Zustand besitzt, besonders auffällig bemerkbar.

Um ein weiteres Kriterium dafür zu haben, daß der Anstieg der Ausbeutekurven bei den Versuchen in Fig. 8 und 9 auf eine Zunahme der Durchlässigkeit und nicht etwa auf unbekannte Versuchsfehler zurückzuführen ist, kondensierten wir auf der dünnen Ag-Schicht, nachdem sie in den geordneten Zustand übergegangen war (Kurve 4), eine weitere aber dicke Ag-Schicht bei  $830^\circ$  abs., also im ungeordneten Zustand. Die Ausbeutekurve dieser Schicht zeigt Kurve 5 in Fig. 9. Ihr Maximum liegt bei 700 bis 800 Volt, also so, wie es in den ersten Versuchen an kompakten Ag-Schichten gefunden worden war. Nach kurzzeitiger Erwärmung auf  $2730^\circ$  abs. und Wiedereinkühlung liegt die Ausbeute (Kurve 6) nun tiefer; sie ist wie bei kompakten Ag-Schichten durch die Zunahme des Ordnungsgrades gesunken, und zwar für schnelle Primärelektronen stärker als für langsame: Wie in Fig. 5a die Kurven 1 und 3, überschneiden sich daher auch die Ausbeutekurven 5 u. 6 bei kleineren Voltzahlen. Die Ausbeute der noch nicht vollständig geordneten Ag-Schicht beträgt 1,52, während oben 1,46 erhalten wurde. Diese dicke Ag-Schicht konnte offensichtlich von etwaigen in der Be-Schicht noch ausgelösten Sekundärelektronen nicht mehr durchdrungen werden.

c) *Beryllium*. Auch die Versuche mit einer dünnen auf einer für Sekundärelektronen sensibilisierten Be-Kathode bei 880° abs. kondensierten Be-Schicht zeigen, daß die Durchlässigkeit der dünnen Metallschicht für Sekundärelektronen im ungeordneten Zustand geringer ist als im geordneten.

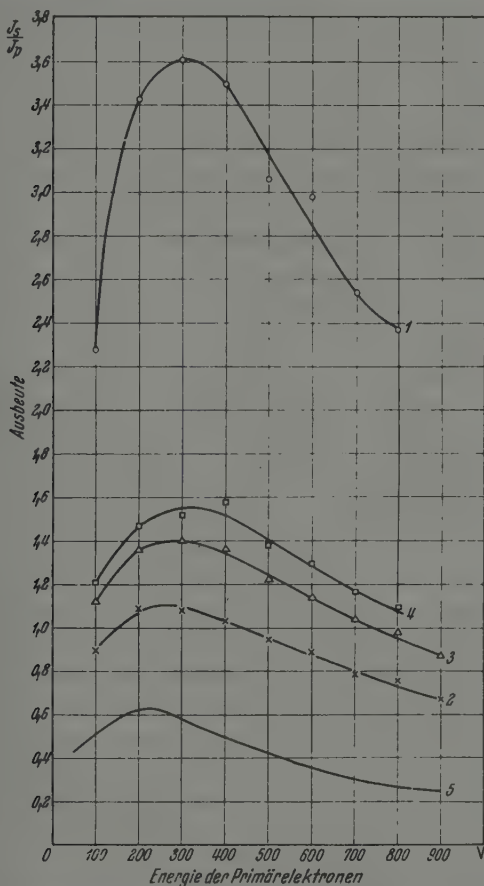


Fig. 10 Sekundärelektronenausbeute einer sensibilisierten Be-Kathode (1); nach der Kondensation einer dünnen Be-Schicht bei 88° abs. (2) im ungeordneten Zustand und nach dem Übergang dieser Schicht in Zustände größerer Ordnung durch vorübergehende Erwärmung auf 243° abs. (3) und Zimmertemperatur (4). — Ausbeute einer kompakten geordneten Be-Schicht (5).

Bei dem in Fig. 10 wiedergegebenen Versuch wurde auf die Schicht hoher Ausbeute von  $I_s/I_p = 3.6$  bei 880° abs. Be-Dampf kondensiert, so daß die Ausbeute auf 1.1 zurückging, ein Wert, der noch oberhalb des für eine kompakte geordnete Be-Schicht erhaltenen Wertes 0.63 liegt (Kurve 5). Die Schicht war also noch durchlässig für einen Teil der von der sensibili-

sierten Unterlage emittierten Sekundärelektronen, wie man auch an der Lage des Maximums bei 270 Volt, das zwischen dem der kompakten Schicht (Kurve 5; 200 Volt) und der unbedampften sensibilisierten Schicht (Kurve 1; 300 Volt) gelegen ist.

Geht die bei 830° abs. aufgedampfte Be-Schicht durch vorübergehendes Erwärmen auf 2430° abs. (Kurve 3) und Zimmertemperatur (Kurve 4) in geordnetere Zustände über, so wächst die beobachtete Sekundäremission an, und zwar von 1,10 auf 1,56 bei 300 Volt, d. h. um 42%. Gleichzeitig verschiebt sich das Maximum bis an die Stelle, an der die sensibilisierte Unterlage ihr Ausbeutemaximum aufweist. Die Durchlässigkeit der aufgedampften Schicht wächst also mit zunehmender Ordnung an, und zwar bei 300 Volt um 42% und bei 800 Volt um 48%. Auch hier macht sich die größere Durchlässigkeit der geordneten Schicht für Sekundärelektronen stärker bemerkbar, wenn die Energie der auslösenden Primärelektronen groß ist.

### 5. Deutung der Versuchsergebnisse.

Zunächst ist die Frage zu diskutieren, ob die beobachtete Zunahme der *Elektronendurchlässigkeit* beim Übergang der Metallschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand nicht vielleicht auf das bessere Durchdringungsvermögen der *Primärelektronen* zurückzuführen ist. Wäre dies der Fall, so müßten die langsamen Primärelektronen durch die aufgedampfte ungeordnete Schicht stärker gebremst werden als die schnellen. Die Ausbeute sollte also beim Übergang in den geordneten Zustand für die schnellen Primärelektronen nur wenig, für die langsamen dagegen stark anwachsen. Tatsächlich wird das Gegenteil beobachtet: Die Ausbeute nimmt entweder gleichmäßig über den ganzen Energiebereich oder für die schnellen Primärelektronen etwas stärker zu als für die langsamen (Fig. 10 Kurve 2 und 4; Fig. 8, Kurve 2 und 5; Fig. 9, Kurve 2 und 4). Gebremst werden durch die Aufdampfschicht also vor allem die im Verhältnis zu den Primärelektronen sehr langsamen *Sekundärelektronen*, deren *Anfangsenergie* unabhängig von der Primärelektronenenergie ist. Nur wenn sie aus größerer Tiefe der sensibilisierten Kathode stammen, wie dies bei Auslösung durch energiereichere Primärelektronen zutrifft, haben die Sekundärelektronen schon beim Durchdringen der sensibilisierten Unterlage Energieverluste erlitten und besitzen daher vor dem Eintritt in die Aufdampfschicht im Durchschnitt eine geringere Geschwindigkeit als die durch langsamere Primärelektronen ausgelöst. Für sie wirkt sich die Zunahme der Durchlässigkeit der Aufdampfschicht beim Übergang in den geordneten

Zustand besonders stark aus und äußert sich in einem stärkeren Anwachsen der durch schnellere Primärelektronen ausgelösten Sekundärelektronen, wie z. B. in Fig. 9, Kurve 2 und 4 zu erkennen ist.

Da die Durchlässigkeit der *Aufdampfschicht* für *Sekundärelektronen* im geordneten Zustand *größer* ist als im ungeordneten, kann die *Abnahme* der Sekundäremission *kompakter* Metallschichten beim Übergang in den geordneten Zustand, wie sie in Abschnitt 3 geschildert wurde, nicht etwa auf eine *Abnahme* der Durchlässigkeit dieser Schichten für Sekundärelektronen zurückgeführt werden. Auch die Durchlässigkeit der *kompakten* Metallschichten für Sekundärelektronen muß auf Grund der Durchdringungsversuche im geordneten Zustand größer sein als im ungeordneten.

Man könnte zunächst versuchen, die geringere Sekundäremission der geordneten kompakten Metallschicht auf die größere Eindringtiefe der *Primärelektronen* zurückzuführen, aus der die erzeugten Sekundärelektronen nicht mehr bis zur Oberfläche gelangen können. Diese Ursache allein kann aber nicht maßgebend sein, denn auch die *Sekundärelektronen* können die geordnete Schicht besser durchdringen. Beide Einflüsse sollten sich also etwa am Ausbeutemaximum kompensieren, denn dieses wird ja durch das zunehmende Eindringungsvermögen der Primärelektronen bis zu Tiefen, aus denen die (langsamen) Sekundärelektronen nicht mehr an die Oberfläche gelangen können, erklärt. Die in einigen Fällen (Fig. 5a, 5b) beobachtete Verlagerung des Maximums nach kleineren Primärelektronenenergien mit zunehmender Ordnung kann auf diese Weise gedeutet werden. Die gefundene *Abnahme* der Sekundäremission jedoch bedarf noch einer weiteren Ursache, die nur in einer *Abnahme* der Primärelektronen absorbierenden oder Sekundärelektronen liefernden *Zentren* beim Übergang in den geordneten Zustand gesucht werden kann<sup>1)</sup>.

Die Begünstigung der langsamen Primärelektronen gegenüber den an Energie reicheren beim Übergang der kompakten Metallschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand, die sich in einer *Überschneidung* der Ausbeutekurven bzw. einer *Verschiebung* des Ausbeutemaximums äußerte (Fig. 5a, 5b, 6), kann nur durch die bessere Durchlässigkeit der geordneten kompakten Metallschicht sowohl für Primärelektronen als auch für Sekundärelektronen erklärt werden. Die langsamen Primärelektronen dringen in die geordnete Schicht tiefer ein als in die ungeordnete. Obwohl die Zahl emittierender Zentren pro Volumeneinheit beim Übergang in den

<sup>1)</sup> Die Richtigkeit dieser Schlußfolgerung wird durch lichtelektrische Versuche an Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand bestätigt, über die in einer späteren Veröffentlichung berichtet wird.



geordneten Zustand abnimmt, nimmt die Zahl der von langsamen Primärelektronen ausgelösten Sekundärelektronen zu, weil durch das tiefere Eindringen der Primärelektronen ein größeres Volumen durchstrahlt wird und außerdem die im Innern ausgelösten Sekundärelektronen die Metallschicht besser durchdringen können. Die schnellen Primärelektronen durchstrahlen zwar auch ein größeres Volumen, wenn sich die Metallschicht im geordneten Zustand befindet. Sie dringen aber so tief ein, daß die im Innern frei gemachten Sekundärelektronen auf ihrem Wege an die Oberfläche zu einem großen Teil wieder absorbiert werden, so daß sich die Abnahme der Zentrenzahl pro Volumeneinheit in einer Verminderung der Sekundäremission beim Übergang in den geordneten Zustand äußert.

Wie die im 3. Abschnitt beschriebenen Versuche zeigen, wird die Sekundäremission aufgedampfter Metallschichten durch deren Struktur wohl beeinflußt, aber verhältnismäßig wenig. Obgleich durch die Art der Schichtherstellung und -behandlung eine strukturelle Verschiedenheit erzielt wird, die durch Kaltverformung bisher nicht erreicht werden konnte, beträgt die Änderung der Sekundäremission einer reinen kompakten Metallschicht durch die Strukturänderung maximal nur 20 bis 30 % am Emissionsmaximum.

Bei den Versuchen von Kollath an den Berylliumschichten auf Wolfram hingegen wuchs die Emission durch vorübergehendes Erwärmen auf 7500° C auf das Vielfache des Ausgangswertes an. Da sich außerdem dieser Einfluß der Erwärmung bei 7000° noch nicht bemerkbar machte, möchten wir ihn nicht auf eine Strukturänderung zurückführen. Wir vermuten vielmehr, daß an der Oberfläche oder im Innern des vorher auf 15000° C ausgeheizten Wolframbleches noch Spuren von Sauerstoff etwa in Form eines Oxyds zurückgeblieben waren, die oberhalb von 7000° C frei wurden und die Berylliumschicht mit Spuren von Berylliumoxyd versahen. Hierdurch entstanden in ihr hoch emittierende Zentren, wie dies auch bei schwacher Oxydation einer Berylliumoberfläche bei gleichzeitiger Erwärmung zu beobachten ist.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie der Firma Telefunken (Fernschröhlrenlaboratorium) sind wir für die materielle Unterstützung dieser Versuche zu Dank verpflichtet.

*Breslau*, Physikalisch-chemisches Institut der Technischen Hochschule und der Universität.

(Mitteilung aus dem Hochfrequenzlaboratorium der  
Siemens-Reiniger-Werke A.-G., Erlangen.)

## Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet.

Von **Heinz Born**, zur Zeit Luftwaffe.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 7. November 1942.)

Nach dem Hinweis auf das Bestehen ziemlich ausgedehnter Interferenzfelder vor konphas schwingenden mechanischen Flächen wird ihre Existenz im Ultraschallgebiet experimentell nachgewiesen und ihr Einfluß auf Absorptionsmessungen erörtert. Es wird eine Korrekturbeziehung abgeleitet, die es gestattet, sowohl den Einfluß der Interferenzfelder als auch den der räumlichen Ausdehnung des Schwingers bei Absorptionsmessungen längs der Mittelnormalen zu eliminieren.

In der Akustik ist die Kenntnis der Energieverteilung vor schall-erzeugenden Flächen in sehr vielen Fällen von besonderer Bedeutung, und zwar deshalb, weil man es in der Akustik im allgemeinen mit Strahlerflächen zu tun hat, deren Durchmesser in die Größenordnung der erzeugten Wellenlänge fällt und deren einzelne Elemente mindestens zum Teil konphas erregt werden. Diese Tatsache gibt im Gegensatz zur Optik, wo man es z. B. bei einer leuchtenden Fläche mit einer praktisch unendlich großen Zahl einzelner Strahler zu tun hat, die mit beliebiger räumlicher und zeitlicher Phase schwingen, in der Akustik zu Interferenzfeldern Anlaß.

Besonders bei Absorptionsmessungen dürften diese Interferenzfelder einen störenden und fälschenden Einfluß ausüben. Es ist daher das Ziel der vorliegenden Betrachtungen, zu klären, unter welchen Umständen und Voraussetzungen bei der Existenz derartiger Interferenzerscheinungen Absorptionsmessungen speziell im Ultraschallgebiet durchgeführt werden können.

Die Kenntnis der Energieverteilung vor schwingenden mechanischen Flächen ist heute durch eine Reihe von Arbeiten hinreichend bekannt. Das Problem, das Schallfeld und damit die Energieverteilung vor einer schwingenden Membran zu berechnen, läuft darauf hinaus, die von den einzelnen Flächenelementen des Schwingers ausgehenden „Schallstrahlen“ phasenrichtig im Aufpunkt zu summieren. Den Ausgangspunkt für der-

artige Rechnungen bildet das von Rayleigh [1] für das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  angegebene Integral

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_F \frac{e^{ikr}}{r} dF. \quad (1)$$

Da jedoch bereits bei einfachen Strahleranordnungen eine vollständige mathematische Darstellung der auftretenden Interferenzerscheinungen zu sehr umfangreichen Rechnungen führt, sei hier nur auf die entsprechenden Originalarbeiten von Backhaus [2], Stenzel [3] und auf die zusammenfassende Darstellung von Stenzel [4] verwiesen. Aus diesen Arbeiten ergibt sich für einen konphas erregten kreisförmigen mechanischen Schwinger ein kegelförmig aufgebautes Interferenzfeld mit der Strahlerfläche als Basis, wobei die Zahl der räumlich verteilten Maxima und Minima mit Annäherung an die Strahlerfläche sowohl in Strahlrichtung als auch senkrecht dazu zunimmt.

In eindrucksvoller Weise zeigen die in neuerer Zeit von Hiedemann [5] mittels einer von ihm entwickelten Methode auf optischem Wege aufgenommenen Amplitudenfelder vor schwingenden Quarzen den oben erwähnten Aufbau. Einmal lassen diese Aufnahmen die komplizierte Feldstruktur vor einem Schwinger gut erkennen, und zum anderen zeigen die Bilder, wie mit zunehmender Größe des Strahlers die Interferenzfelder räumlich wachsen.

In einem Falle läßt sich jedoch, wie Backhaus und Trendelenburg [6] darlegen, das von Rayleigh angegebene Integral elementar auswerten. Unter der Voraussetzung eines kreisförmigen Kolbenschwingers erhalten sie für die relative Intensitätsamplitude  $J$  längs der Mittelnormalen des Schwingers in einem nicht absorbierenden Medium den einfachen Ausdruck

$$J = \sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z]. \quad (2)$$

Hierbei bedeutet  $R$  den Radius des Strahlers,  $\lambda$  die Schallwellenlänge im Ausbreitungsmedium,  $k = 2\pi/\lambda$  und  $z$  die Aufpunktsentfernung vom Strahler. Hinsichtlich Einzelheiten, insbesondere des Rechnungsganges, sei auf die Originalarbeit verwiesen.

Auf Grund dieser einfachen Beziehung wollen wir für unsere weiteren Betrachtungen ausschließlich die Energieverhältnisse längs der Mittelnormalen zugrunde legen und uns den vereinfachenden Annahmen, wie sie von Backhaus und Trendelenburg für ihre Rechnungen getroffen

worden sind, anschließen. Diese Einschränkung mindert den Wert der Rechnung für unsere Betrachtungen nicht, da wir einmal die gestellten Forderungen — kreisförmiger und konphas erregter Schwinger — bei Absorptionsmessungen leicht erfüllen können, und zum anderen Absorptionsmessungen, wie wir später sehen werden, praktisch überhaupt nur längs der Mittelnormalen ausgeführt werden können.

Nach Formel (2) schwankt also die relative Schallintensität längs der Mittelnormalen zwischen Null und eins, wobei sich besonders in Schwingernähe die Maxima und Minima häufen. In Fig. 1 ist die relative Intensität als Funktion von  $z$  aufgetragen, wobei für  $R$  und  $\nu$  Werte aus dem uns speziell interessierenden Ultraschallbereich zugrunde gelegt sind, nämlich

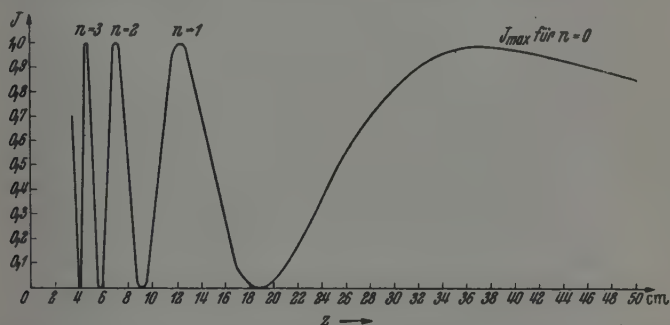


Fig. 1. Verlauf der relativen Schallintensität  $J$  längs der Mittelnormalen eines Kolbenschwingers in Wasser. (Radius  $R$  des Schwingers 4 cm;  $\nu = 350$  kHz.)

$R = 4$  cm,  $\nu = 350$  kHz, und als Ausbreitungsmedium Wasser mit einer Schallgeschwindigkeit von 1480 m/sec. Die Nullstellen  $z_0$  der Funktion sind hierbei durch die Gleichungen

$$\frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] = n \cdot \pi \quad (3a)$$

und daraus

$$z_0 = \frac{R^2 - n^2 \cdot \lambda^2}{2n \cdot \lambda} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3 \dots \quad (3b)$$

gegeben, während die Maxima  $z_{max}$  bei

$$\frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z] = [2n + 1] \cdot \pi/2 \quad (4a)$$

liegen und sich somit durch

$$z_{max} = \frac{4R^2 - \lambda^2 [2n + 1]^2}{4\lambda [2n + 1]} \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (4b)$$

darstellen lassen. Erst von einer bestimmten Entfernung  $z = z_{\max}$  für  $n = 0$  an nimmt die Intensität stetig gegen Null zu ab. Aus der Beziehung (4b) folgt weiter, daß die Lage der einzelnen Energiemaxima allein vom Strahlerradius  $R$  und der Schallwellenlänge  $\lambda$  abhängen.

Um einen Überblick über die im Ultraschallgebiet zu erwartende Größe des Interferenzfeldes zu bekommen, dessen Ausdehnung wir mit dem letzten Maximum ( $n = 0$ ) begrenzen wollen, ist in Fig. 2 der Abstand des letzten Interferenzmaximums auf der Mittelnormalen vom Strahler als Funktion der Frequenz aufgetragen. Parameter ist der Strahlerradius  $R$ .

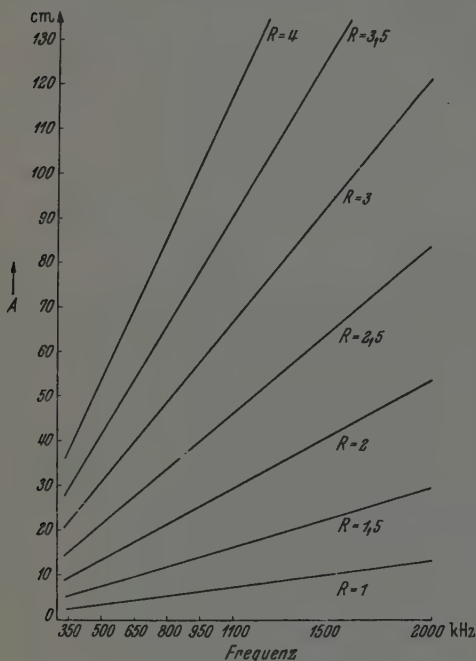


Fig. 2. Abstand  $A$  des letzten Interferenzmaximums ( $n = 0$ ) vom Schwinger in Abhängigkeit von der Frequenz für verschiedene Größen von Schwingern ( $R$  = Radius in cm).

Mit zunehmender Frequenz und wachsendem  $R$  schiebt sich also das Interferenzfeld immer weiter hinaus und erreicht Ausdehnungen, die ein Vielfaches des Strahlerdurchmessers betragen.

Während also Formel (2) die Energieverhältnisse auf der Mittelnormalen bis zum Strahler selbst, d. h. auch innerhalb des Nahfeldes, streng wiedergibt, existiert für die relative Querverteilung im Nahfeld kein derartig einfacher Ausdruck. Jedoch gelang es Stenzel [4], für die Querverteilung im Fernfeld, also jenseits des letzten Maximums auf der Mittelnormalen, aus dem schon oben erwähnten Integral von Rayleigh den Begriff eines Richtfaktors  $D$

abzuleiten, der es ermöglicht, im Fernfeld die relative Querverteilung der Energie innerhalb eines Schallstrahles rechnerisch zu erfassen. Für einen kreisförmigen Kollenschwinger ergibt sich der Richtfaktor  $D$  zu

$$D = \frac{2J_1[y]}{y}, \quad (5)$$

wobei  $J_1$  die Besselsche Funktion erster Ordnung und  $y$  die Abkürzung für  $\frac{2\pi \cdot R}{\lambda} \cdot \sin \beta$  bedeutet. Als  $\beta$  ist der Winkel zwischen Mittelnormalen und Verbindungslinie Strahlermitte—Aufpunkt einzusetzen. Nach Formel (5) ergibt sich eine Energieverteilung ähnlich der innerhalb eines Beugungsscheibchens der Optik (s. auch Fig. 5).

Da es sich bei Schall um einen Wellenvorgang handelt, lassen sich für große Entfernungen vom Strahler analoge Betrachtungen und Beziehungen aus der Optik übernehmen. So verläuft z. B. das durch eine Lochblende abgebeugte Licht in großer Entfernung von dieser Blende nach den Formeln der Beugungstheorie in einem Strahl, dessen halber Öffnungswinkel durch die bekannte Beziehung

$$\sin \gamma = \frac{0,61 \cdot \lambda'}{R'} \quad (6)$$

gegeben ist, wobei  $\lambda'$  die Lichtwellenlänge und  $R'$  den Radius der kreisförmigen Öffnung bedeutet. In gleicher Weise ist in der Akustik eine ähnliche Ausbreitung von Schallenergie in größerer Entfernung vom Strahler zu erwarten, da ein kreisförmig begrenzter Schwinger einer kreisförmigen Blende in der Optik gleichgesetzt werden kann.

In den Formeln (2), (5) und (6) haben wir sehr einfache Ausdrücke zur Hand, um die Energieverteilung einmal längs der Mittelnormalen bis zum Strahler selbst, dann die Querverteilung und den Öffnungswinkel des sich in größerer Entfernung von der Schallquelle ohne Interferenzerscheinungen ausbreitenden Schallstrahles zu berechnen. Bereits Backhaus und Trendelenburg machten den Versuch, experimentell im Hörgebiet die zu erwartenden Erscheinungen nachzuweisen. In neuer Zeit ist auf dem gleichen Gebiet die Arbeit von Fox und Rock [7] zu erwähnen, die bei 2,5 MHz gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung für die Energieverteilung längs der Mittelnormalen finden. Auch vom Verfasser wurde der Versuch unternommen, im unteren Ultraschallbereich die Gültigkeit der drei oben erwähnten Ausdrücke experimentell nachzuprüfen und insbesondere die sich für Absorptionsmessungen daraus ergebenden Schlüsse herzuleiten.

Mittels einer kleinen Quarzsonde wurde die Energieverteilung vor schwingenden Quarzen vermessen, wobei der Schwingquarz durch eine dünne Trennfolie aus Kunststoff seine Energie aus Öl in einen mit absorbierenden Stoffen ausgekleideten und mit Wasser gefüllten Meßtrög von  $40 \times 40 \times 100 \text{ cm}^3$  Rauminhalt einstrahlte. Besondere Schwierigkeiten



bereitete anfangs bei den Messungen die in Wasser stets gelöste Luft. Erst nach ihrer Entfernung durch Auskochen konnten jeweils auf Stunden reproduzierbare Meßwerte erhalten werden. Im Gegensatz zu vielen anderen Arbeiten wurde vom Verfasser statt der Messung des Schallstrahlungsdruckes die Messung des Schallwechseldruckes gewählt. Diese Methode gewährt bei einer um Größenordnungen höheren Empfindlichkeit eine gesteigerte Meßgenauigkeit bei Vermeidung der bei Gleichdruckmessungen immer mehr oder weniger auftretenden unangenehmen Begleiterscheinungen. Auf Grund der hohen Empfindlichkeit (es konnten noch bequeme Energiedichten von etwa  $1 \cdot 10^{-3}$  Watt/cm<sup>2</sup> gemessen werden) konnte auch in größerer Entfernung vom Strahler mit sehr kleinen Schalleistungen gearbeitet werden, was eine Reihe von Vorteilen mit sich bringt.

Fig. 3 zeigt den Aufbau der benutzten Quarzsonde. Ein beiderseitig metallisierter Schwingquarz von 2 mm Dicke und 24 mm Durchmesser,

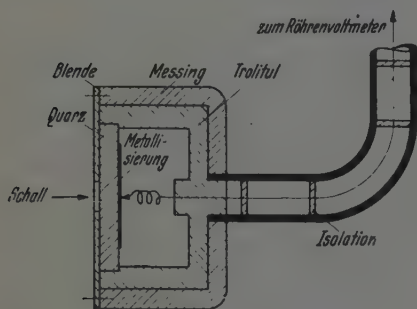


Fig. 3. Aufbau des Empfangsquarzes.

dessen eine elektrische Achse senkrecht zur Oberfläche orientiert ist, war in eine mit Metall umhüllte Trolituldose eingekittet. Die an die Flüssigkeit angrenzende wirksame Empfangsfläche konnte durch eine dicht am Quarz liegende Begrenzung aus 1 mm Messingblech verkleinert werden. Ihre Öffnung hatte für die Messungen einen Durchmesser von 5 mm. Die Eigen-

frequenz dieses Quarzes lag weit außerhalb der zu empfangenden Meßfrequenz. Damit war ein aperiodisches Arbeiten gewährleistet. Der Empfänger war zur Vermeidung von stehenden Wellen um einige Grad zur Mittelnormalen des Sendequarzes gedreht: um ganz sicher zu gehen, wurde außerdem die Sendefrequenz (350 kHz) um einen kleinen Betrag ( $\pm 2000$  Hz) gewobelt und damit die Phase der sich unter Umständen noch ausbildenden stehenden Wellen am Empfangsort um mindestens  $2/2$  verschoben. Von der innerhalb der Dose an Luft angrenzenden Oberfläche wurden die zu messenden Wechsellspannungen mittels einer Feder abgenommen und über eine kurze, abgeschirmte und kapazitätsarme Leitung über einen Kondensator dem Gitter eines Röhrenvoltmeters zugeführt. Die bis zu den höchsten vorkommenden Meßspannungen quadratische Gleichrichtung sicherte nach Kompensation des Ruhestromes einen linearen Zusammenhang zwischen

der gemessenen Intensität und der Anzeige des benutzten Instrumentes. Die Abschirmung gegen die relativ hohen, dem Sendequarz zugeführten Spannungen bereitete bei diesem Aufbau keinerlei Schwierigkeiten.

In Fig. 4 ist eine längs der Mittelnormalen vom Verfasser gemessene Energieverteilung wiedergegeben und die dazugehörigen, zunächst ohne Berücksichtigung einer Dämpfung im Ausbreitungsmedium errechneten relativen Intensitätswerte gleichzeitig mit dargestellt. Obwohl die hier zugrunde liegenden Messungen nur Voruntersuchungen entstammen, die orientierenden Charakter trugen<sup>1)</sup>, erkennt man bereits die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, die auf eine geringe Absorption

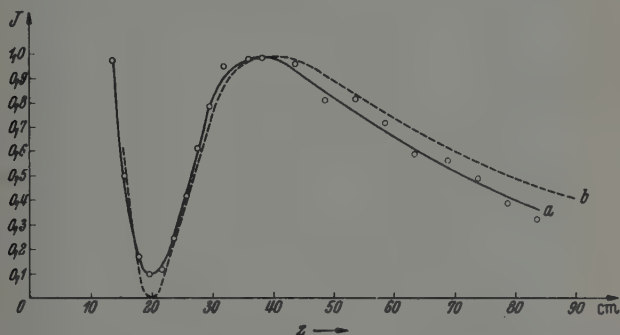


Fig. 4. Verlauf der relativen Intensität  $J$  längs der Mittelnormalen eines Quarzes ( $R = 4$  cm) in Wasser bei  $\nu = 365$  kHz).  $a$  = gemessen,  $b$  = berechnet.

schließen läßt. Wenn sich in Fig. 4 die gemessene nicht mit der theoretischen Kurve deckt, so liegt das nur zum geringsten Teil an der nicht berücksichtigten Absorption. Während die theoretische Kurve nach den tatsächlichen Abmessungen des Schwingquarzes berechnet wurde, ist für die gemessene infolge der Halterung des Quarzes ein kleinerer wirksamer Strahlerradius anzusetzen, so daß sich die gemessene Kurve notwendigerweise in ihrem Gesamtverlauf um eine kleine Strecke auf den Strahler zu verschieben bzw. zusammenschieben muß.

Selbstverständlich werden die erhaltenen Meßergebnisse auch durch die Ausdehnung des Meßempfängers etwas gefälscht. Jedoch sind die hierbei auftretenden Fehler, solange man außerhalb des letzten Maximums mißt und einen Empfänger verwendet, dessen wirksame Empfangsfläche im

<sup>1)</sup> Ursprünglich geplante weitere Messungen hierzu mußten infolge der Zeitumstände leider unterbleiben.

Durchmesser nicht viel größer als eine Wellenlänge ist, im allgemeinen zu vernachlässigen. Denn während die Rechnung nur für Aufpunkte längs der Mittelnormalen gilt, erfaßt der Empfänger stets einen größeren Bereich und verwischt dadurch die gemessenen Werte. So wird es auch verständlich, daß mit dem benutzten Empfänger niemals ein exaktes Minimum gemessen werden kann. Ebenso war infolge der Ausdehnung des Empfängers eine Erfassung der nach den Formeln (4), (5) zu erwartenden Extremwerte für höhere  $n$ -Werte als 1 nicht möglich. Nur mit im Vergleich zur Wellenlänge

sehr kleinen Schallempfängern läßt sich hier die Theorie quantitativ nachprüfen.

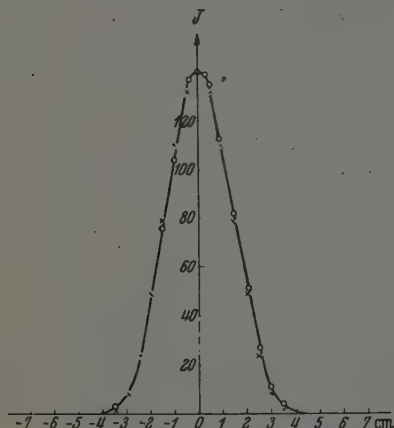


Fig. 5. Verlauf der relativen Schallintensität  $J$  senkrecht zur Mittelnormalen in 30 cm Abstand vom Schwinger ( $R = 1,9$  cm,  $\nu = 360$  kHz, Medium Wasser).  
 o gemessen, x berechnet.

Auch für die Querverteilung ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung, wie Fig. 5 zeigt. Hier wurde die relative Schallenergie senkrecht zur Mittelnormalen in 30 cm Abstand vom Schwinger ( $R = 1,9$  cm,  $\nu = 360$  kHz) gemessen. Gleichzeitig gestattet auch Fig. 5 den Ausdruck (6) nachzuprüfen. Während die Rechnung nach (6) für  $\gamma$  den Wert  $70^{\circ}35'$  liefert, ergibt die Tangensbeziehung  $\operatorname{tg} \gamma = 4,1/30$  den Wert  $70^{\circ}45'$ .

Die bisherigen Ausführungen und Messungen lassen also erkennen, daß vor schwingenden Flächen und besonders Ultraschallquarzen mit dem Auftreten von Interferenzfeldern beträchtlicher Ausdehnung gerechnet werden muß. Diese Tatsache ist jedoch leider in sehr vielen Fällen bei Absorptionsmessungen im Ultraschallgebiet bisher unberücksichtigt geblieben. Ja, zum Teil wird auch die Wellennatur des Schalles geradezu übersehen und mit Vorstellungen einer „geometrischen Akustik“ gearbeitet, die nicht mehr zulässig sind. So ist es z. B. bei 500 kHz nicht angängig, die Parallelität eines Schallstrahles in Wasser durch Blenden erzwingen zu wollen. Hat doch schon in diesem Fall eine Öffnung von 20 mm Durchmesser auf einen Schallstrahl etwa dieselbe Wirkung, wie eine Öffnung von  $\frac{4}{1000}$  mm auf einen Lichtstrahl. Dem Versuch, von vornherein für Meßzwecke durch ein möglichst großes  $R$  entsprechend der Formel (6) eine möglichst kleine

Divergenz des Schallstrahles zu erzielen, steht die zunehmende Ausdehnung des Interferenzfeldes hindernd gegenüber, die in der Praxis, will man außerhalb des Interferenzfeldes messen, zu nicht mehr tragbaren Abmessungen der Meßapparatur führt.

Es tritt daher bei fast allen Arbeiten, die sich mit Absorptionsmessungen befassen, die Frage auf, inwieweit eine geometrische Abnahme der Energiedichte längs der Meßstrecke zu berücksichtigen ist, und nach welchem Gesetz eine eventuelle derartige Korrektur zu erfolgen hat, bzw. inwieweit die Ausdehnung des Strahlers eine Abweichung vom quadratischen Abstandsgesetz hervorruft. Bei einer ganzen Reihe von Arbeiten, wie z. B. bei der von Claeys, Errera und Sack [8], liegt die Annahme eines parallelen Strahlenbündels zugrunde, und nur bei wenigen wird, soweit es sich um Messungen bei niedrigen Frequenzen und verhältnismäßig kleinen Strahlern handelt, wie z. B. bei Grossmann [9], die geometrische Abnahme der Energiedichte nach einem quadratischen Gesetz berücksichtigt. Zwischen diesen beiden Extremen — Kugelwelle oder ebene Welle — liegen aber nun in der Praxis die meisten Untersuchungen. Dazu kommt, daß besonders bei Flüssigkeiten im Ultraschallgebiet die zu erwartenden Absorptionswerte sehr klein sind. Betrachten wir z. B. den Absorptionskoeffizienten  $\alpha$ , wie er sich nach der klassischen Theorie für Wasser ergibt, so liegt dieser Wert für die Frequenz von 350 kHz bei 0,00001 und für 5 MHz bei 0,002. Das würde bedeuten, daß unter der Annahme exakt paralleler Strahlung bei einer Meßstrecke von 10 cm die Energiedichte im ersten Fall nur um 0,1 %, im zweiten nur um etwa 2 % auf Grund der Absorption abnehmen würde. Man erkennt, daß diese Tatsache bereits außerordentlich hohe Anforderungen an die Meßgenauigkeit stellt, die noch beträchtlich anwachsen, wenn, wie es die tatsächlichen Verhältnisse verlangen, kein paralleles Schallfeld zugrunde gelegt werden kann. Es muß daher versucht werden, für die Übergangsverhältnisse zwischen ebener und Kugelwelle ein geeignetes Abstandsgesetz zu finden, das die geometrische Abnahme der Energiedichte zu eliminieren gestattet. Hierzu bietet der von Backhaus und Trendelenburg vorgeschlagene Lösungsgang des Rayleighschen Integrals einen geeigneten Ansatz.

Die aus dem Rayleighschen Integral für die Energieverteilung längs der Mittelnormalen vor einem kreisförmigen Kolbenschwinger abgeleitete Beziehung (2) besitzt nur unter der Annahme der Schallausbreitung in einem dämpfungsfreien Medium Gültigkeit. Führt man die Dämpfung in das Integral (1) mit dem Ausdruck  $e^{-\alpha r}$  ein, so erhält man jetzt nach sonst

gleichem Rechnungsgang von Backhaus und Trendelenburg für das Geschwindigkeitspotential  $q$  den Ausdruck

$$q = \frac{1}{\alpha + ik} \frac{\partial q}{\partial n} [e^{-\sqrt{R^2 + z^2}[\alpha + ik]} - e^{-z[\alpha + ik]}], \quad (7)$$

dessen absoluter Betrag nach der Einführung von  $v \cdot e^{-i\omega t}$  für  $\partial q / \partial n$  unter Benutzung der Beziehung  $p = -\sigma (\partial q / \partial t)$  den Druck  $p$  zu ermitteln gestattet. Man erhält

$$p = -\frac{v \cdot \sigma \cdot \omega}{\alpha^2 + k^2} \cdot \sqrt{e^{-2\alpha\sqrt{R^2 + z^2}} + e^{-2\alpha z} - 2e^{-\alpha[\sqrt{R^2 + z^2} - z]} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + z^2} - z]} \quad (8)$$

und daraus wieder für die Intensität  $J$  längs der Mittelnormalen

$$J = \frac{v^2 \cdot \sigma^2 \cdot \omega^2}{\alpha^2 + k^2} \cdot [e^{-2\alpha\sqrt{R^2 + z^2}} + e^{-2\alpha z} - 2e^{-\alpha[\sqrt{R^2 + z^2} - z]} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + z^2} - z]]. \quad (9)$$

Zur genauen Bestimmung von  $\alpha$  unter Berücksichtigung der auf der endlichen Ausdehnung der Schallquelle beruhenden Interferenzerscheinungen genügt es jetzt, die relativen Intensitäten  $J_z$  und  $J_{z+x}$  an der Stelle  $z$  und  $z+x$  zu betrachten. Zur Bestimmung von  $\alpha$  erhält man dann den Ausdruck

$$\frac{J_z}{J_{z+x}} = \frac{e^{-2\alpha\sqrt{R^2 + z^2}} + e^{-2\alpha z} - 2e^{-\alpha[\sqrt{R^2 + z^2} - z]} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + z^2} - z]}{e^{-2\alpha\sqrt{R^2 + (z+x)^2}} + e^{-2\alpha(z+x)} - 2e^{-\alpha[\sqrt{R^2 + (z+x)^2} - (z+x)]} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + (z+x)^2} - (z+x)]}, \quad (10)$$

der bei Messungen längs der Mittelnormalen  $\alpha$  zu ermitteln gestattet. Trotz der strengen Gültigkeit der soeben aufgestellten Formel auch innerhalb des Interferenzfeldes selbst, d. h. bis zur Strahlerfläche, ist es zweckmäßig, außerhalb des Interferenzfeldes zu messen. Denn infolge der Steilheit der Energiekurven in Schwingernähe (s. Fig. 1) führt eine ungenaue  $x$ -,  $z$ - oder Frequenzbestimmung in diesem Falle zu großen Abweichungen bei der Errechnung von  $\alpha$ . Dazu kommt, daß es infolge von Halterungseinflüssen meistens nicht möglich sein wird, den wirksamen Strahlerradius  $R$  genau zu definieren. Auch diese Unsicherheit wird sich bei kleinem  $z$  viel stärker auswirken. Die Voraussetzung eines großen  $z$  führt jedoch für unsere

Formel (10) zu weiteren Vereinfachungen, die gestatten, den Faktor  $e^{-\alpha z}$  bzw.  $e^{-\alpha(z+x)}$  abzuspalten, so daß jetzt (10) in

$$\frac{J_z}{J_{z+x}} = \frac{J_0}{J_x} = e^{2\alpha x} \cdot \frac{1 + e^{-\frac{\alpha R^2}{\lambda \cdot z}} - 2e^{-\frac{\alpha R^2}{2\lambda \cdot z} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + z^2} - z]}}{1 + e^{-\frac{\alpha R^2}{\lambda(z+x)}} - 2e^{-\frac{\alpha R^2}{2\lambda(z+x)} \cdot \cos k[\sqrt{R^2 + (z+x)^2} - (z+x)]}} \quad (11)$$

übergeht. Unter den oben schon genannten Annahmen eines großen  $z$  kann bei kleinem  $\alpha$ , wie es bei Flüssigkeiten im Ultraschallgebiet wohl auch meistens der Fall sein wird,  $e^{-\frac{\alpha R^2}{\lambda \cdot z}}$  bzw.  $e^{-\frac{\alpha R^2}{2\lambda(z+x)}}$  gleich eins gesetzt werden und (11) geht damit nach trigonometrischer Umformung in

$$\frac{J_0}{J_x} = e^{2\alpha x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z]}{\sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + (z+x)^2} - (z+x)]} = e^{2\alpha x} \cdot F \quad (12)$$

über. Mit der Abkürzung  $m = \frac{\pi \cdot R^2}{2\lambda}$  ergibt sich zur Bestimmung von  $\alpha$  der einfache Ausdruck

$$\alpha = \frac{\ln \frac{J_0}{J_x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{m}{z+x}}{\sin^2 \frac{m}{z}}}{2x} \quad (13)$$

Läßt man  $z$  noch weiter wachsen, d. h. nimmt man die Messung in noch größerer Entfernung von der Schallquelle vor, so kann in (13) der Sinus durch den Bogen ersetzt werden und die Gleichung enthält nur noch das quadratische Abstandsgesetz, d. h. die Schallquelle ist ohne Rücksicht auf ihre Form und Größe jetzt als punktförmig zu betrachten. Bei gegenüber  $z$  hinreichend kleinem  $x$  kann dann auch noch der Ausdruck  $(1 + x/z)^2$  gleich eins gesetzt werden, d. h. für die Messung genügt dann und nur dann die Annahme eines parallelen Strahlenfeldes.

Aus den vorliegenden Betrachtungen erkennt man jedoch, daß die Berechtigung zur Annahme eines parallelen Strahlenfeldes nur für sehr große  $z$  Gültigkeit hat und zudem noch von der absoluten Höhe von  $\alpha$  abhängt. Bei den besonders kleinen  $\alpha$ -Werten, wie sie bei Flüssigkeiten kleiner Viskosität zu erwarten sind, dürfte in keinem praktischen Falle die Annahme eines parallelen Strahlenfeldes gerechtfertigt sein.



Zur Übersicht über diese Verhältnisse sind in Fig. 6 für einen bestimmten Fall die Werte sowohl für den Ausdruck  $F$

$$F = \frac{\sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + z^2} - z]}{\sin^2 \frac{k}{2} [\sqrt{R^2 + (z+x)^2} - (z+x)]},$$

als auch für das quadratische Abstandsgesetz  $(1 + x/z)^2$  kurvenmäßig für  $x = 10$  cm und  $R = 1, 2, 3, 4$  cm als Funktion von  $z$  dargestellt. Man erkennt aus den gezeichneten Kurven sehr gut, wie das aus dem Rayleighschen Ansatz gewonnene Abstandsgesetz für große  $z$  in das quadratische Abstandsgesetz übergeht, und zwar um so früher, je kleiner bei konstanter Frequenz  $R$  ist.

Unter diesen Umständen gewinnen nun die von den verschiedenen Autoren bisher durchgeführten Absorptionsmessungen jetzt ein ganz anderes Gewicht. Betrachtet man z. B. die für Flüssigkeiten in der Literatur bekannten  $\alpha$ -Werte einmal kritisch, so ist dreierlei festzustellen:

1. Die gemessenen Werte weichen zum Teil um mehrere Größenordnungen von den theoretisch berechneten ab, und zwar immer im Sinne zu großer  $\alpha$ -Werte.

2. Die von den verschiedenen Autoren bei gleichen Substanzen und gleichen Frequenzen gemessenen Absorptionswerte streuen sehr stark.

3. Der nach der Theorie frequenzunabhängige Ausdruck  $\alpha/\nu^2$  ist nicht konstant, sondern nimmt durchweg mit zunehmender Frequenz ab.

Trotz aller Versuche, diese Widersprüche zwischen der Kirchhoffschen Theorie und der Messung

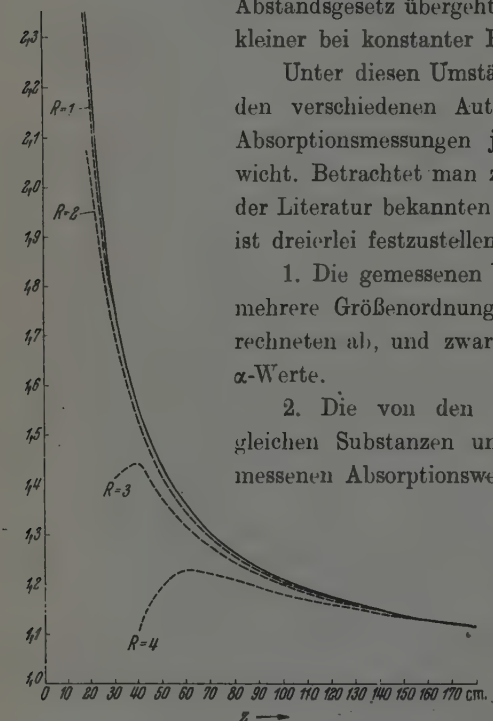


Fig. 6. Verlauf der Funktionen  $F$  und  $(1 + x/z)^2$  in Abhängigkeit von  $z$  für  $x = 10$  cm und  $R = 1, 2, 3, 4$  cm ( $\nu = 350$  kHz, Medium Wasser).

zu deuten, ist es bis heute noch nicht gelungen, brauchbare Erklärungen für diese Diskrepanzen zu finden. Zum Teil mögen die sehr verschiedenen Meßverfahren mit ihren teilweise recht großen Fehlergrenzen für die unter 2. angeführten Unsicherheiten den Anlaß gegeben haben. Die

Tatsache aber, daß allgemein die ermittelten Werte erheblich über den theoretischen liegen und daß die „frequenzunabhängige Absorption  $\alpha/\nu^2$ “ mit zunehmender Frequenz abnimmt, lassen die Vermutung eines überhaupt nicht bzw. nicht ausreichend berücksichtigten prinzipiellen Meßfehlers zu.

Wie schon oben erwähnt, ist nur in wenigen Fällen bereits eine Berücksichtigung der Interferenzerscheinungen bzw., besser gesagt, der endlichen Ausdehnung des Strahlers bei der Auswertung der Meßwerte erfolgt. In vielen anderen Fällen wird daher nicht der tatsächliche Verlauf der Absorption, sondern überwiegend der interferenzmäßig bedingte Abfall der Energiedichte gemessen worden sein. Diese Tatsache läßt jetzt auch die gegenüber der Theorie zu großen  $\alpha$ -Werte plausibel erscheinen.

Wertet man z. B. den vom Verfasser längs der Mittelnormalen vor einem Schwingquarz gemessenen und in Fig. 4 dargestellten Energieverlauf in Wasser unter der falschen Annahme eines parallelen Strahlenbündels hinsichtlich der Absorption in Wasser aus, so erhält man für  $z = 50$  und  $x = 80$  cm den  $\alpha$ -Wert 0,012. Unter Berücksichtigung der Interferenzerscheinungen ergibt sich jedoch nach Formel (13) der fünfmal kleinere Wert 0,00242. Ja, selbst für  $J_0 = J_x$  ( $z = 29$ ,  $x = 25$ ), wo die Zugrundelegung eines parallelen Strahlenfeldes den sinnlosen Wert  $\alpha = 0$  ergeben würde, liefert der Ausdruck (13) in relativ guter Übereinstimmung mit dem schon oben genannten Wert 0,00319. Es soll damit nicht gesagt werden, daß diese Werte schon als genaue Schallabsorptionskoeffizienten des Wassers gelten sollen. Dafür streuen die erhaltenen Meßpunkte noch viel zu stark. Außerdem ist das immer mehr oder weniger große Quantum an gelöster Luft ein sehr unsicherer Faktor bei derartigen Messungen. Es genügen schon Spuren, wie orientierende Messungen zeigten, die Absorption sprunghaft ansteigen zu lassen. Diesem Punkt kann bei Absorptionsmessungen an Flüssigkeiten mit kleinem  $\alpha$  nicht genügend Aufmerksamkeit geschenkt werden.

Durch eine wesentliche Erhöhung der Meßgenauigkeit, die nach unseren Erfahrungen noch durchaus möglich ist, dürfte eine weitergehende Annäherung der Meßergebnisse, wenigstens bei höheren Frequenzen, an die von der Theorie geforderten  $\alpha$ -Werte erzielbar sein. Denn da nach der Theorie mit zunehmender Frequenz die Absorption quadratisch ansteigt, besitzen Messungen bei höheren Frequenzen unter sonst gleichen Umständen eine größere absolute Genauigkeit. Zur Erhärtung dieser Tatsache kann angeführt werden, daß bei den bisher ausgeführten Messungen der Wert für die „frequenzunabhängige Absorption“ nicht konstant ist, sondern

durchweg mit wachsender Frequenz abnimmt, sich also den Werten der Kirchhoffschen Formel nähert.

Inwieweit heute mit der augenblicklich zur Verfügung stehenden Meßgenauigkeit überhaupt eine experimentelle Nachprüfung der aus der klassischen Theorie sich ergebenden kleinen Absorptionswerte bei Flüssigkeiten, wie z. B. Wasser, sinnvoll ist, sollte vor jeder Messung auf Grund der durch Interferenz bedingten Inhomogenität des Schallstrahles unter Berücksichtigung der Versuchsbedingungen ermittelt werden. Hierzu mögen die oben abgeleiteten Beziehungen den Weg zeigen.

#### *Literaturnachweis.*

- 1] Lord Rayleigh, The theorie of sound. — 2] H. Backhaus, Ann. d. Phys. **5**, 1, 1930. — 3] H. Stenzel, E. N. T. **12**, 1, 1935. — 4] H. Stenzel, Leitfaden zur Berechnung von Schallvorgängen. Berlin, Springer, 1939. — 5] E. Hiedemann, Grundlagen und Ergebnisse der Ultraschallforschung, S. 106. Berlin 1939. — 6] H. Backhaus u. F. Trendelenburg, ZS. f. techn. Phys. **7**, 630, 1926. — 7] F. E. Fox u. G. D. Rock, Phys. Rev. **54**, 1938, — 8] J. Claeys, J. Errera u. H. Sack, Trans. Faraday **33**, 136—141, 1937. Nr. 189. — 9] E. Grossmann, Ann. d. Phys. (5) **13**, 1932, Nr. 2, S. 681.

## Elektronenmikrokinematographie mit dem Universal-Elektronenmikroskop.

Von **Manfred von Ardenne.**

Mit 13 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Oktober 1942.)

Durch die vom Verfasser vorgenommenen Entwicklungen der Objekterhitzungseinrichtung, der Objektreaktionskammer und der Objektabschattungsvorrichtung hat die Untersuchung *bewegter Objekte* in der Elektronen-Übermikroskopie seit kurzem aktuelles Interesse gewonnen. Konstruktion und Ausführung einer *Vakuumfilmkamera* sowie praktische Erfahrungen mit ihr werden mitgeteilt. Durch Druckunterteilung im Mikroskop und weitere beschriebene Maßnahmen wird erreicht, daß *keine kritische Austrocknung des Filmes* eintritt und er auf diese Weise seine normalen mechanischen Eigenschaften behält. Die Kamera, die seitlich an das Gehäuse der Plattenkamera des Universal-Elektronenmikroskops angesetzt wird, erlaubt während der Leuchtschirmbeobachtung kinematographische Aufnahmen auf Normalfilm bei bis zu 25 Bildern/sec. Außerdem gestattet sie bei bis zu 2 Bildern/sec die Aufnahme langer Bildreihen mit Leicaformat. Abschließend werden Ausschnitte aus *mit der Anlage erhaltenen Filmen* wiedergegeben, die im Oktober 1942 vom Verfasser im Harnackhaus vorgeführt worden und mit 2000 bis 5000facher elektronenoptischer Vergrößerung (*förderliche Vergrößerung 10 000- bis 25 000fach*) gewonnen sind.

Bis vor kurzem waren *bewegte Objekte* bei übermikroskopischen Untersuchungen eine Seltenheit. Das Auftreten von Bewegungen im Präparat galt sogar meist als wenig erwünschter Vorgang. Zeigte sich doch auf diese Weise das bei großer Strahlintensität eintretende Reißen der Objektträgerfolie und die Überlastung des Objektes an (z. B. Blasenbildung bei Faseruntersuchungen, Schmelzen und Verdampfen von Stoffen hoher Wärmeempfindlichkeit usw.). Das Studium von Bewegungserscheinungen in Präparaten der Übermikroskopie gewann erst in neuerer Zeit durch die Entwicklung des *Erhitzungs-Übermikroskops*<sup>1)</sup> aktuelles Interesse. Die nähere Untersuchung der Präparatveränderungen erhielt noch eine zusätzliche Bedeutung durch die etwa gleichzeitig erfolgte Ausbildung der *Objektreaktionskammereinrichtung*<sup>2)</sup> und der *Objektabschattungsvorrichtung*<sup>3)</sup>. — Von einer photographischen Fixierung dieser Bewegungserscheinungen durch kinematographische Aufnahme des Endbildleuchtschirmes wurde mit Rücksicht auf die bekannte erhebliche Minderung der Bildqualität und

---

<sup>1)</sup> M. von Ardenne, Kolloid-ZS. **97**, 257, 1941. — <sup>2)</sup> M. von Ardenne, ZS. f. phys. Chem. (B) **52**, 61, 1942. — <sup>3)</sup> M. von Ardenne, ZS. f. Phys. **117**, 657, 1941.

die starke Verschlechterung der Intensitätsverhältnisse (Verzicht auf übermikroskopische Vergrößerungen; Aufnahme mit sehr viel weniger als 25 Bildern/sec: kritische Zunahme der Objektbelastung; undefinierte Objekttemperatur) abgesehen. Trotz der ganz wesentlich größeren Schwierigkeiten, die der praktischen Verwirklichung zunächst entgegenstanden, wurde als weitaus günstigerer Weg die unmittelbare Belichtung des Films mit Elektronen unter Anwendung einer in den Vakuumraum eingebrachten Filmkamera gewählt. Die Entwicklung einer Filmaufnahmekamera ist bekanntlich allein schon eine konstruktive und feinmechanische Aufgabe von erheblichem Umfang. Im vorliegenden Falle wurde sie nicht nur durch Abdichtungs- und Evakuierungsfragen erschwert, sondern vor allem durch

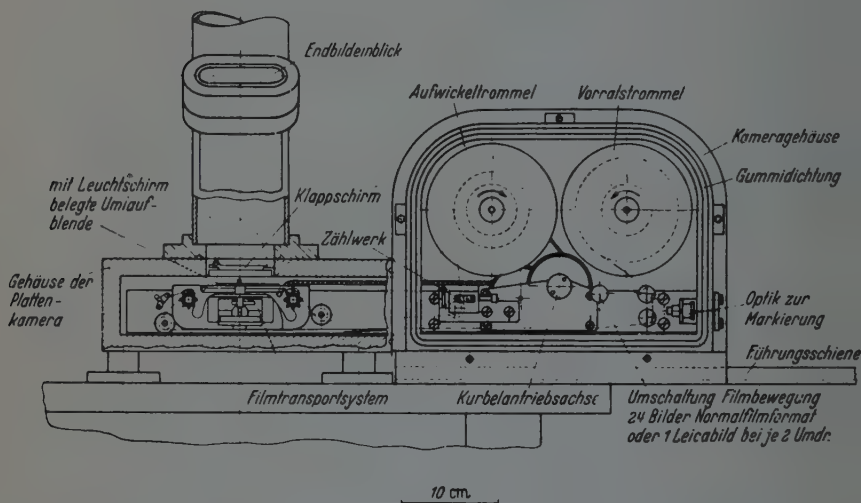


Fig. 1. Aufbau der Vakuumfilmkamera zum Universal-Elektronenmikroskop.

Komplikationen, die sich aus der Feststellung ergaben, daß übliches Filmmaterial bei Austrocknung im Hochvakuum seine günstigen mechanischen Eigenschaften verliert und den mit ruckweisem Transport verbundenen Beanspruchungen nicht standhält. Außerdem wurde die Erfüllung folgender Forderungen angestrebt:

Die Vakuumfilmkamera sollte in den Universal-Elektronenmikroskopen des Verfassers abwechselnd mit der normalen Reihenbildkamera für Schumann-Platten benutzt werden. Die Umstellung von Plattenkamera-Betrieb auf Filmkamera-Betrieb und umgekehrt sollte ohne langwierige Umbauten,

insbesondere ohne Demontage des Mikroskops und ohne Umkonstruktion der Plattenkamera erfolgen. Nur der bequeme Übergang von der einen zur anderen Betriebsweise gestattet bei der praktischen Arbeit die beste Anpassung der Anlage an die jeweils vorliegende Aufgabe. — Weiterhin sollte während der kinematographischen Aufnahmen das ganze Gesichtsfeld visuell zu beobachten sein.

Die unter Berücksichtigung der vorstehenden Forderungen entwickelte Filmkamera wird an dieser Stelle auch in konstruktiver Hinsicht beschrieben,

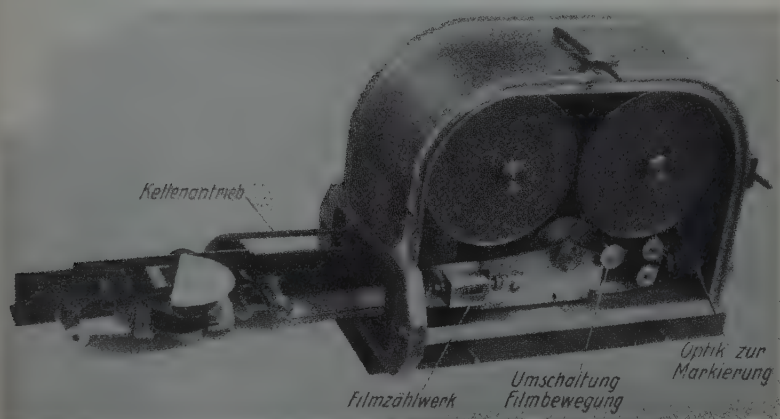


Fig. 2. Ansicht der geöffneten Vakuumfilmkamera.

weil ihr Aufbau mit geringen Abwandlungen auch für Elektronenmikroskope anderer Bauart übernommen werden kann. Auch dürften Kombinationen mit anderen Elektronen- oder Vakuum-Bildgeräten Interesse für spezielle Aufgaben haben.

*Konstruktion und Ausführung der Vakuumfilmkamera.* Die wichtigsten Einzelheiten der Kamerakonstruktion, die schon vor einiger Zeit veröffentlicht wurden<sup>1)</sup>, sind aus der Zeichnung Fig. 1 zu ersehen. Eine Photographie der geöffneten Filmkamera mit dem an einer Winkelschiene befestigten Filmtransportsystem bringt Fig. 2. Das ganze Filmtransportsystem wird in das Innere des Gehäuses der Plattenkamera gebracht, wenn die Filmkamera mit Hilfe der in Fig. 3 sichtbaren Gleitschiene seitlich an das Mikroskop herangeschoben wird. Zur Umstellung auf kinematographischen

<sup>1)</sup> M. von Ardenne, Phys. ZS. 43, 11, 1942.



Betrieb brauchen, abgesehen von den unten beschriebenen vakuumtechnischen Maßnahmen, aus der Kamera nur der Doppelschlitteneinsatz<sup>1)</sup> herausgenommen und an Stelle der Antriebsschliffe Gummistopfen eingesetzt zu werden. Nach Herausnahme des Schlittens steht im Innern des Gehäuses der Plattenkamera ein Raum von 55 mm Höhe, 290 mm Tiefe und 130 mm Breite für die Unterbringung des Filmtransportsystems zur Verfügung. Trotz der geringen Höhe gelang es, die komplizierte Greiferbewegung zum

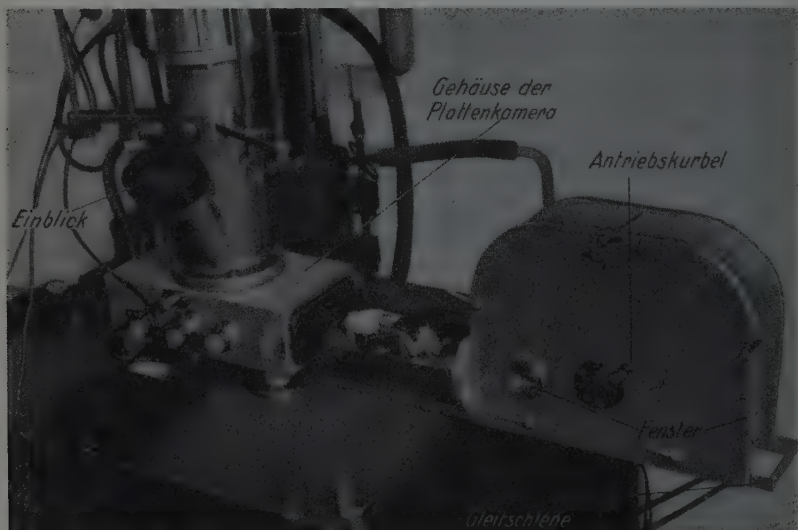


Fig. 3. Kamera mit Gleitschiene in ausgefahrenem Zustand.

Filmvorschub und die ganze übrige Transportmechanik einschließlich der Umlaufblende gut unterzubringen und gleichzeitig die für elektronenmikroskopische Aufnahmen erforderliche besonders hohe Präzision des Filmvorschubes sicherzustellen.

Die *Konstruktion des Filmtransportsystems* bringt Fig. 4. Die Steuerung der horizontalen Greiferbewegung erfolgt über einen an der Achse der Umlaufblende befestigten Exzenter. Zur vertikalen Greiferbewegung, d. h. zum Ein- und Ausrücken des Greifers in die bzw. aus der Filmperforation dient eine Blattfeder, die permanent den Greiferhalter nach oben drückt

<sup>1)</sup> Vgl. M. von Ardenne, Elektronen-Übermikroskopie, Abb. 207. Berlin, Springer, 1940.

und deren Wirkung zum Ausrücken des Greifers durch eine Metallbelegung am Greiferhalter während der Belichtung aufgehoben wird. Wie bei den meisten Aufnahme-Kameras wird auch hier nur die eine Seite der Filmperforation zum Filmvorschub benutzt, um damit die Toleranzen des

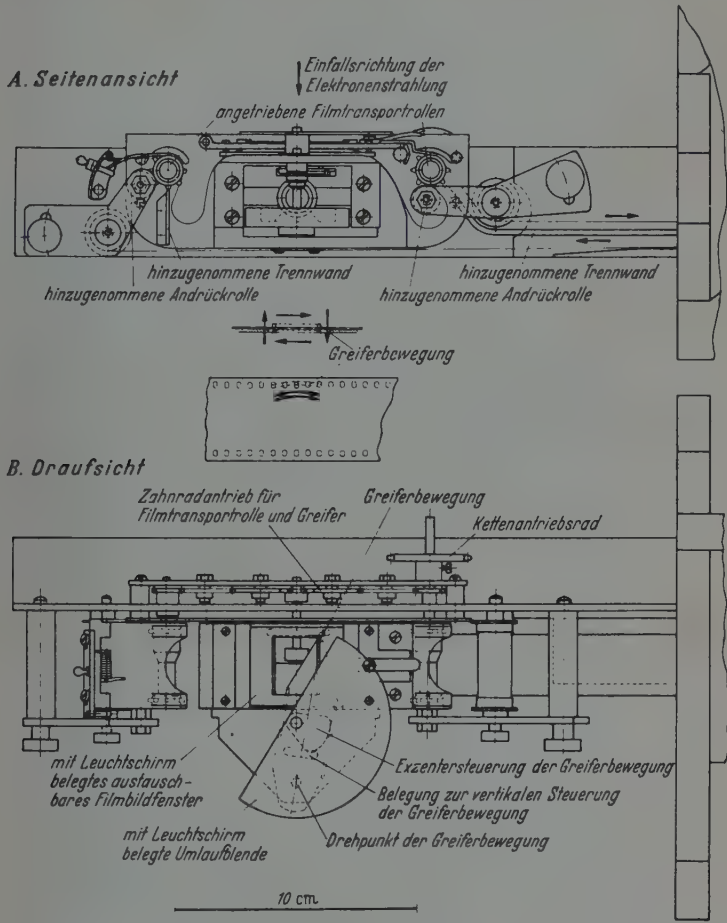


Fig. 4. Das Transportsystem kleiner Abmessungen der Vakuumfilmkamera.

Filmschrittes etwas zu verringern. Dicht über dem mit einem Zinksulfid-schirm belegten Filmbildfenster rotiert die Umlaufblende. Ein Blick auf diese wichtigen Bauelemente des Filmtransportsystems vermittelt Fig. 5. Die Belegung der Umlaufblende mit nachleuchtfreiem Fluoreszenzmaterial erlaubt die fortlaufende visuelle Beobachtung des Objektes während der

*Filmaufnahme* über den normalen Einblick zur Endbildbeobachtung. Auf diese Weise wird auch der nicht zur Belichtung ausgenutzte Elektronenstrahlungs-Anteil nutzbar. Das tatsächliche *Gesichtsfeld der Filmaufnahme* markiert sich während des Kamerabetriebes ohne kritische Parallaxestörungen durch die etwas größere Helligkeit des Fensterrahmenbildes.

Umlaufblende und Filmbildfenster sind leicht abnehmbar gehalten. Nach ihrer Entfernung können mit der gleichen Einrichtung lange Bildreihen mit Leicaformat aufgenommen werden. Bei dieser Betriebsweise dient der übliche Klappschirm während der Filmbewegung als Verschuß.

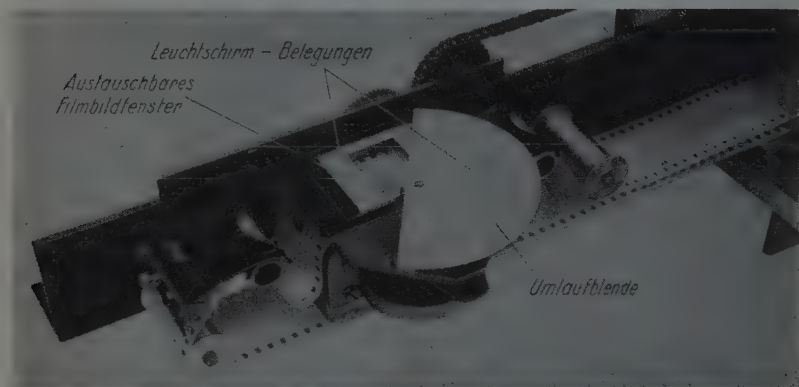


Fig. 5. Blick auf das Filmtransportsystem (Ausführung vor dem Umbau).

Weiterhin ist die Filmbewegung durch Umschaltung des Kurbelgetriebes im Verhältnis 1 : 12 zu verlangsamen. Da die Filmkassetten ein Fassungsvermögen von 60 m Film besitzen, können mit einer Kassettenladung bis zu 1650 Bilder in Leicaformat aufgenommen werden. Bei kinematographischem Betrieb und normaler Filmgeschwindigkeit entspricht die gleiche Kassettenladung einer Aufnahmezeit von etwa 2 Minuten. Die Gasabgabe dieser Filmmenge ist größer als die Gasabgabe der Innenwandung des unteren Mikroskopteiles, so daß auf die Anbringung einer Kameraschleuse verzichtet werden kann:

Ein über ein lichtdichtes Fenster ablesbares Filmzählwerk gibt Auskunft über den jeweiligen Filmvorrat. An einer Stelle im Filmkameragehäuse, die etwa um 65 cm im Filmweg gegenüber dem Ort der Elektronenaufnahme vorverlegt ist, befindet sich eine Mikrooptik zur Filmmarkierung. Über diese kurzbrennweitige Optik kann entweder am Rande des Films, z. B. durch

Mitphotographieren einer aus dem Wechselstromnetz betriebenen Gasentladungslampe, eine Zeitmarkierung vorgenommen oder durch Photographieren des Heizamperemeters im Stromkreis der Objekterhitzungs-

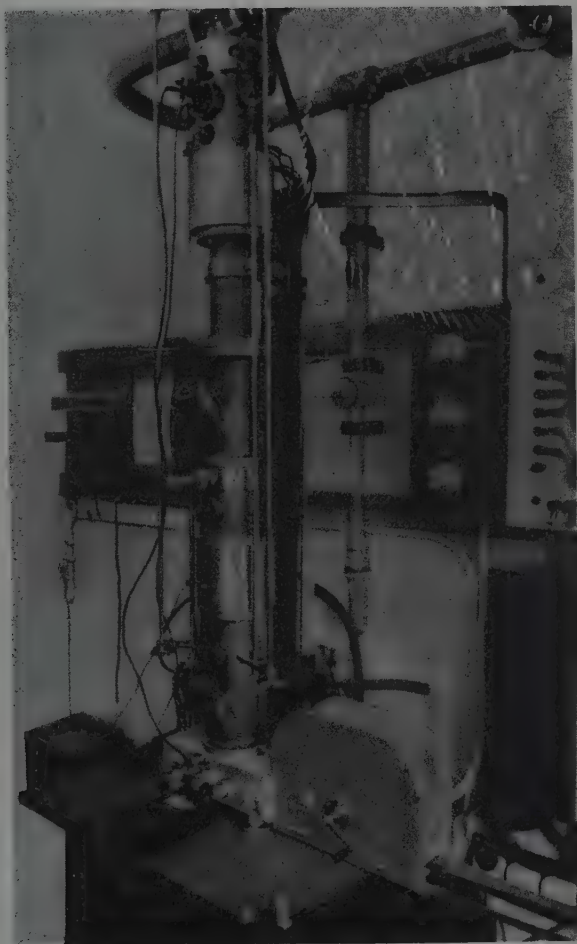


Fig. 6. Die Vakuumfilmkamera am 200 kV-Universal-Elektronenmikroskop in Aufnahmebereitschaft.

einrichtung eine genaue Unterlage über die Objekttemperatur während der Aufnahme gewonnen werden. Im letzteren Falle wird der Strommesser durch Auslösung einer geeigneten Stoßgasentladungslampe (periodisch)

kürzer als  $10^{-5}$  sec belichtet, um trotz der an dieser Stelle kontinuierlichen Filmbewegung eine scharfe Abbildung zu erzielen. Bei Betrieb mit Markierung wird auf der entsprechenden Seite des Filmbildfensters im Transportsystem ein kleiner Metallstreifen eingelegt, um eine Doppelbelichtung durch Markierung und Elektronen zu vermeiden.

Die Gesamtansicht des 200 kV-Universal-Elektronenmikroskops mit Objekterhitzungseinrichtung und der angesetzten Vakuum-Filmkamera vermittelt die Photographie Fig. 6.

*Die getroffenen vakuumtechnischen Maßnahmen.* Ein normaler Film von 60 m Länge gibt im Vakuum mehrere Gramm Wasser ab. Damit hierdurch bei den vorliegenden Evakuierungsverhältnissen die Pumpzeit nicht auf mehrere Tage verlängert wird, ist in unmittelbarer Nähe der Kamera über ein kurzes Rohr von großem Querschnitt eine (zur Entleerung abnehmbare) Ausfrier tasche angebracht. Etwa 4 Stunden nach Einlegen einer frischen Kassettenladung war bei den vorliegenden Evakuierungsverhältnissen ein Gasdruck von  $4 \cdot 10^{-4}$  Torr erreicht und das Instrument damit betriebsbereit. Die ersten praktischen Versuche ließen dann die folgende Schwierigkeit erkennen, die zunächst fast von prinzipieller Bedeutung zu sein schien:

*Die lange und starke Austrocknung des Films im Hochvakuum bewirkt, daß handelsübliches Filmmaterial brüchig wird und den Strapazen des ruckweisen Filmtransportes selbst dann nicht mehr sicher standhält, wenn die sekundliche Bildzahl auf 10 bis 20% der normalen Zahl vermindert wird.* Das charakteristische Aussehen solcher meist beim Greiferangriff beginnenden Brüche eines hoch getrockneten Films bringt die Photographie Fig. 7. — Gleichzeitig ist hier die ursprünglich starke Krümmung des ausgetrockneten Films (Krümmungsmittelpunkt auf der Schichtseite) noch etwas sichtbar. Auch diese Krümmung führte anfänglich zu Störungen, die erst durch zusätzlich angebrachte Andrückrollen behoben wurden.

Bei Versuchen mit den verschiedensten Filmsorten des Handels zeigte sich immer wieder, daß der an Luft völlig einwandfrei funktionierende Filmtransport nach Austrocknung im Hochvakuum schon bei den ersten Bildern durch Filmbruch versagte. Auch Versuche mit perforiertem Papier als Träger der Photoschicht verliefen negativ. Die Beschaffung der gelegentlich in der Filmtechnik benutzten Filme mit perforierten Metallfolien als Unterlage war infolge des Krieges nicht möglich. Nachdem eine Rückfrage bei Wissenschaftlern der Agfa ergeben hatte, daß die festgestellte Verschlechterung der mechanischen Eigenschaften fast prinzipieller Natur sei

und auch der Einbau von Weichmachern in den Schichtträger keine großen Aussichten hätte, stand der Verfasser vor der Notwendigkeit, entweder auf die weitere Verfolgung der gestellten Aufgabe ganz zu verzichten oder einen Ausweg zu finden. Dieser Ausweg ergab sich durch Einführung einer *Druckunterteilung im Vakuumraum* des Universal-Elektronenmikroskops, sowie durch *Hinzunahme von zwei Ausfrieraschen*.

Der Grundgedanke besteht darin, den Film selbst in einem nur mäßig evakuierten (etwa  $10^{-2}$  Torr) Raum und zwar nur möglichst kurze Zeit zu belassen. Auf diese Weise schien es bei der relativ festen Bindung des Wassers im Film möglich, die Filmtrocknung so weit zu mindern, daß der



Fig. 7. Typische Brüche eines im Hochvakuum ausgetrockneten und durch das Transportsystem gelaufenen Filmes.

noch verbleibende Wasseranteil als Weichmacher des Films gerade noch ausreicht. Schon aus praktischen Beobachtungen bei der Objektreaktionskammer-Übermikroskopie (siehe Literaturstelle Anm. 2) war bekannt, daß bei den hohen Elektronengeschwindigkeiten des Übermikroskops das *Produkt Gasdruck · Weglänge* Werte von bis zu etwa 5 Torr · Millimeter annehmen darf, ohne daß die Bildkontraste durch Elektronenstreuung in dem Raum von heraufgesetztem Gasdruck sich wesentlich verschlechtern. Um mit möglichst hohem Druck im abgetrennten Raum, d. h. mit möglichst geringer Filmtrocknung auskommen zu können, war es daher notwendig, den Weg der abbildenden Elektronenstrahlung in dem Raum von erhöhtem Gasdruck möglichst kurz zu halten. Wie aus dem Schema Fig. 8 hervorgeht, ist der zur Raumunterteilung vorgesehene Strömungswiderstand bei der letzten Einschnürungsstelle des Elektronenstrahlenganges, d. h. in der Umgebung der Kaustik der Projektionsstufe angebracht. Der mit einem kleinsten Durchmesser von 0,5 mm versehene Kanal sitzt zentral zur Mikroskopachse und ist so geformt, daß er die Kaustik der Projektionsstufe umhüllt. Die sonst neben den Polschuhen des Projektivs vorgesehenen Evakuierungskanäle sind abgedichtet, so daß der untere Raum nur über den Kanal



mit dem Hauptvakuumraum des Mikroskops in Verbindung steht. Mit Hilfe einer Schachtelhalm-Konstruktion konnte der Kanal sowie mit Hilfe einer einfachen Hilfsvorrichtung die Abdichtung ohne Demontage des Instruments dort eingebracht werden, wo sonst der Polschuheinsatz des Projektivs eingeführt wird. An gleicher Stelle befindet sich ein Schliff mit einer weiteren Ausfrieretasche für den Hauptvakuumraum des Mikroskops.

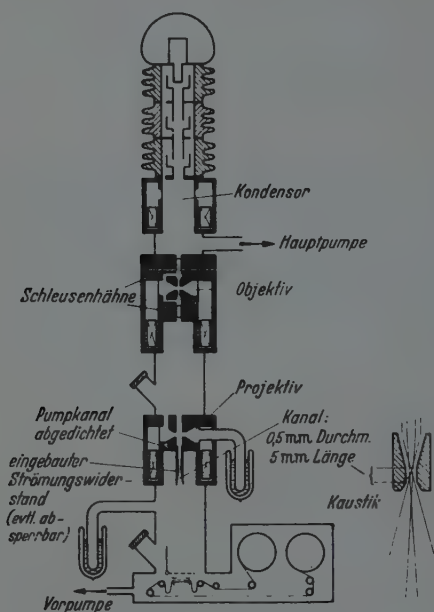


Fig. 8. Schema der Mikroskop-Evakuierung mit Druckunterteilung.

Der Abstand zwischen Kanalmitte und Filmebene beträgt etwa 500 mm. Trotz dieses noch relativ langen Weges gelingt es, die Kontrastminderung durch die Wasserdampfatosphäre gerade noch hinreichend klein zu halten, ohne die Filmtrocknung über den kritischen Wert steigern zu müssen.

Die *Bedienung des Instruments* bei Durchführung von Filmaufnahmen gestaltet sich folgendermaßen: Zunächst wird das Objekt in üblicher Weise mit dem Objektiv eingesetzt eingebracht und dann unter Querstellung des unteren Schleusenahnes der obere Raum des Mikroskops hoch evakuiert. Gleichzeitig wird der ganze untere Raum mit einer rotierenden Ölluftpumpe 15 Minuten lang vorevakuiert. 5 Minuten nach Beginn der Vorevakuierung

wird ein Dewargefäß an die Ausfrier tasche der Projektivstufe gebracht und einige Minuten später ein weiteres Gefäß mit flüssiger Luft an die Ausfrier tasche des Kameraraumes. Etwa  $1/2$  Stunde nach Beginn der Kühlung im Kameraraum ist die Evakuierung so weit fortgeschritten, daß bei einem Filmvorrat von 20 m Länge die Aufnahme beginnen kann. Im Hinblick auf die große mögliche Bildzahl und auf das Fehlen einer Vakuumschleuse ist die genannte *Zeit bis zur Betriebsbereitschaft der Anlage* als befriedigend kurz anzusehen. Noch kürzere Pumpzeiten dürften sich erzielen lassen, wenn der *Kanal durch ein Elektronen durchlassendes Häutchen völlig abgeschlossen* wird (Einschieben des Häutchens nach Vorevakuierung oberhalb und unterhalb des Häutchens) oder wenn *am Ort des Kanals eine Absperrmöglichkeit* vorgesehen wird, die erst *unmittelbar vor der Aufnahme* den unteren Raum mit dem Hauptvakuumraum zu verbinden gestattet.

Störungen durch sogenanntes Verblitzen des Films infolge reibungselektrischer Vorgänge, die bei der noch verbleibenden Austrocknung zunächst befürchtet wurden, waren nicht zu beobachten.

*Praktische Ergebnisse.* Einen Ausschnitt aus einem mit 5000facher elektronenoptischer Vergrößerung aufgenommenen Film bringt Fig. 9. Hier



Fig. 9. Die Abbildung des Gesichtsfeldes bei verschiedener Lage der Projektionsstufen-Kaustik gegenüber dem zur Vakuum-Unterteilung eingebauten Kanal. Ausschnitt aus einem mit 5000facher elektronenoptischer (25000facher förderlicher) Vergrößerung aufgenommenen Film. (5 Bilder/sec, 150 kV, Agfa Isopan SS.) Nebliches Aussehen bedingt durch zu starke Elektronenstreuung im unteren Mikroskopteil.

und bei den folgenden Bildreihen dienten als Aufnahmematerial Agfa Isopan SS- bzw. F-Filme. Das Auflösungsvermögen dieser Filme bei der benutzten Elektronengeschwindigkeit von 150 kV erlaubt noch gut eine fünffache Nachvergrößerung, so daß die *förderliche Vergrößerung dieser Bildreihe* beispielsweise den Wert 25000 erreicht. Während der Aufnahme des Ausschnitts Fig. 9 wurde der Spulenstrom der Projektionsstufe schnell auf den richtigen Stromwert gesteigert. Wir sehen infolgedessen, wie zunächst das Gesichtsfeld durch den als Strömungswiderstand eingebauten



Fig. 10. Das Sintern des Schlemmstoffes von Rosenthaler Formsand nach Einstellung einer Objekttemperatur von  $1280^{\circ}\text{C}$ . Ausschnitte aus einem 8 m langen Filmstück.

Kanal abgeblendet wird. Mit zunehmender Brechkraft des Projektivs verringert sich die Ablendung, um schließlich bei dem letzten Bilde rechts dann ganz zu verschwinden, wenn die Kaustik in das Innere des Kanals verlegt ist. — Die Aufnahme Fig. 9 erfolgte zu einem Zeitpunkt, wo die

Evakuierung des unter dem Kanal liegenden Raumes noch nicht ganz den vorgeschriebenen Wert erreicht hatte. Sie sollte gleichzeitig dazu dienen, das kontrastarme und neblige Aussehen jener Bilder zu zeigen, die bei starker Elektronenstreuung im Kameraraum gewonnen werden.

Fünf verschiedene *Ausschnitte aus einem 8 m langen Filmstück* (elektronenoptische Vergrößerung 2000, förderliche Vergrößerung 10000, oberer Raum  $3 \cdot 10^{-4}$  Torr, unterer Raum  $\approx 10^{-2}$  Torr, 150 kV, 5 Bilder pro sec, Agfa Isopan F) sind auf der Tafel Fig. 10 wiedergegeben. Gefilmt wurde



Fig. 11. Teil einer nach Herausnahme des Filmbildfensters und der Umlaufblende hergestellten Bildreihe im Leicaformat. Objekt und Vorgang wie in Fig. 10. Zeitabstand zwischen den Bildern 10 Sekunden. Vergrößerung elektronenoptisch 5000fach.

hier das *Sintern des Schlammstoffes von Rosenthaler Formsand bei 1280° C*, ein Vorgang, der bereits im Erhitzungs-Übermikroskop ausführlicher untersucht worden ist<sup>1)</sup>. Die Bildstreifen sind so ausgeschnitten, daß der Anschluß jeweils noch gut erkennbar bleibt. Wir sehen, wie mit zunehmender Dauer der Temperatureinwirkung zunächst das obere zackige Gebilde zu einer Kugel schmilzt (Streifen 1 bis 3) und dann allmählich weitere kristalline Objektbereiche vom Schmelzvorgang erfaßt werden (Streifen 3 bis 5). Das ganze Geschehen des hier herausgegriffenen Vorganges ist, wie Fig. 10 erkennen läßt, nur auf kinematographischem Wege zu verfolgen. Trotz der hier relativ schwach gewählten Vergrößerung (großes Gesichtsfeld!) verursacht die Bewegung im Präparat so große Substanzverlagerungen, daß einzelne Objektbereiche noch aus dem Gesichtsfeld hinausgerückt werden.

<sup>1)</sup> M. von Ardenne u. K. Endell, ZS. Gießerei, Januarheft 1943.

Bei Objekten dieser Art ist es daher ratsam, mehr Wert auf ein großes Gesichtsfeld als auf hohe Vergrößerungen zu legen. — Um die Bildveränderung in den kurzen Ausschnitten besser erkennbar zu halten, sind die meisten hier abgebildeten Filmstreifen mit herabgesetzter Bildzahl/sec hergestellt.



Fig. 12. 25000fach vergrößerter Ausschnitt aus dem linken oberen Bild der Fig. 11 als Anhalt für die Schärfe der Original-Filmbildchen.

Gegenüber den reproduzierten Filmen, die alle mit sehr schwach geheizter Kathode (Kathodenlebensdauer bei täglich-vielstündiger Mikroskopbenutzung etwa 1 Monat!) erhalten wurden, besteht noch eine Intensitätsreserve von mindestens einer Größenordnung. Diese Reserve kann je nach Aufgabenstellung zur Steigerung der elektronenoptischen Vergrößerung oder der Bildzahl/sec benutzt werden. — Dank der geringen Erschütterungsempfindlichkeit des Universal-Elektronenmikroskops blieben die durch den Filmtransportmechanismus bedingten Erschütterungen bei allen Bildern ohne erkennbaren Einfluß auf die Schärfe der Abbildung.

Eine nach Herausnahme des Filmbildfensters und der Umlaufblende hergestellte Reihe von acht Bildern mit Leicaformat bringt Fig. 11. Auch

diese Betriebsweise der Kamera bewährte sich bei der praktischen Arbeit am Instrument ausgezeichnet und ist inzwischen schon bei mehreren zum Teil im Druck befindlichen Untersuchungen<sup>1)</sup> angewendet worden. Eine Vorstellung von der Schärfe der in dieser Mitteilung wiedergegebenen Filmbildchen vermittelt der *nachvergrößerte Ausschnitt* Fig. 12 aus dem linken oberen Bildchen der Fig. 11.

Von verschiedenen Vorgängen mit der beschriebenen Anlage aufgenommene übermikroskopische Filme (das Sintern des Schlammstoffes

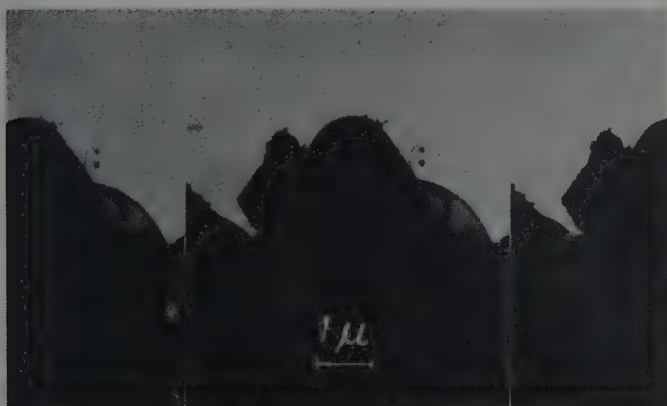


Fig. 13. Vergrößertes Einzelbild aus einem der drei am 28. 10. 42 in einer Veranstaltung des Kaiser Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie gezeigten übermikroskopischen Filme. Sammelkristallisation von mikrokristallinem Gold bei Erhitzung auf etwas über 1000° C (elektronenoptische Vergrößerung 3000, förderliche Vergrößerung 15000, 150 kV, 20 Bilder/sec, Agfa Isopan F).

von Rosenthaler Formsand, das Schmelzen von Uran bei etwas über 1050° C, Sammelkristallisation und Schmelzen von mikrokristallinem Gold) wurden vom Verfasser im Oktober 1942 im Rahmen einer Veranstaltung des Kaiser Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie vorgeführt. Ein vergrößertes Einzelbild aus einem der dort gezeigten Filme bringt die Photographie Fig. 13.

Schon heute kann auf Grund der Erfahrungen an etwa 20 hergestellten übermikroskopischen Filmen festgestellt werden, daß bei vielen Vorgängen allein die kinematographische Fixierung in der Lage ist, die interessanten

<sup>1)</sup> Z. B. M. von Ardenne, K. Endell u. H. Lehmann. Ber. Deutsche keram. Ges. 1943, im Druck.



Phasen des Geschehens festzuhalten. Dies liegt zum Teil daran, daß die Objektveränderungen in Bruchteilen von Sekunden erfolgen und ferner daran, daß die Bewegungen im Objekt häufig sehr komplizierter Natur und daher aus wenigen willkürlich herausgegriffenen Einzelbildern nicht rekonstruierbar sind. Erst die fortlaufende kinematographische Fixierung mit sehr kurzer Belichtungszeit für das Einzelbildchen erlaubt bei vielen Aufgaben der Übermikroskopie die bequeme und sichere Analyse der Vorgänge, sei dies nun durch Projektion des aufgenommenen Films mit normaler oder geänderter Filmgeschwindigkeit oder durch Auswertung der nacheinander gewonnenen Einzelbildchen auf einem Meßtisch.

Dem Direktor des Kaiser Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie, Herrn Prof. Dr. P. Thiessen, dankt der Verfasser für die vertrauensvolle Förderung der beschriebenen Entwicklungsarbeiten. Den Herren G. Fries und M. Tritter sowie G. Arndt und S. Klein ist der Verfasser für ihre mühevollen Detailarbeit bei Konstruktion bzw. Fertigung der Kamera sehr verpflichtet. Die *Deutsche Forschungsgemeinschaft* hat den Bau der Vakuum-Filmkamera durch Gewährung einer Forschungsbeihilfe wirksam unterstützt.

## Über die anomale Absorption in Luft und die Lebensdauer des Mesons \*).

Von G. Bernardini in Bologna.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 11. Oktober 1942.)

### Einleitung.

Es ist heute allgemein bekannt, daß die Teilchen der harten kosmischen Strahlung in der Atmosphäre bedeutend stärker absorbiert werden als in Stoffen höherer Dichte. Schon im Jahre 1935 haben Bernardini und Bocciarelli<sup>1)</sup> bei einem Vergleich zwischen der Absorption der harten Strahlung in der Luft für verschiedene Zenitwinkel und der von Regener<sup>2)</sup> gemessenen Absorptionskurve in Wasser hierauf hingewiesen. Endgültig wurde diese *zusätzliche Absorption* der Luft festgestellt von Ehmert<sup>3)</sup> an Hand seines schönen Experiments.

Auf Grund der Ehmertschen Versuche identifizierten Kulenkampff<sup>4)</sup> wie auch Heisenberg und Euler<sup>5)</sup> die Teilchen der harten kosmischen Strahlung mit den Yukawaschen schweren Elektronen. Sie schlossen, daß die harte Komponente aus instabilen Teilchen besteht, und erklärten hiermit die zusätzliche Absorption der Luft.

Wie Kulenkampff, Heisenberg und Euler zeigten, bietet die zusätzliche Absorption eine Möglichkeit zur Bestimmung der mittleren Lebensdauer der Mesonen, und in der Tat beruhen die bisherigen Bestimmungen der Lebensdauer des Mesons fast alle auf der „*anormalen*“ Absorption durch Zerfall.

Tatsächlich ermöglicht die anomale Absorption nicht eigentlich die Bestimmung der mittleren Lebensdauer  $\tau$  der Mesonen, sondern die des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  zwischen  $\tau$  und der Ruheenergie  $\mu c^2$ , wobei einige Annahmen über die Entstehung der Mesonen in der Höhe zu machen sind. Erst vor kurzem wurde versucht, die Einführung dieser Hypothesen zu vermeiden und das Verhältnis  $\tau/\mu c^2$  aus dem Phänomen der zusätzlichen Absorption möglichst direkt zu bestimmen. Zu diesem Zweck wurden

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> G. Bernardini u. D. Bocciarelli, Ric. Scient. VI, 1, 1935, Nr. 1. —

<sup>2)</sup> E. Regener u. G. Pfotzer, Phys. ZS. **35**, 779, 1934. — <sup>3)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. **106**, 751, 1937. — <sup>4)</sup> H. Kulenkampff, Verh. d. D. Phys. Ges. **1938**, S. 92. — <sup>5)</sup> H. Euler u. W. Heisenberg, Ergebn. d. exakt. Naturw. **17**, 1, 1938.

zunächst Beobachtungen gemacht, um die Intensität der Mesonenkomponente in einer bestimmten Richtung auf zwei verschiedenen Niveaus zu bestimmen, wobei man in der oberen Station die zwischenliegende Luftschicht durch ein dichtes Material kompensierte. Dann bleibt als einziges unbekanntes Element, außer dem Verhältnis  $\tau/\mu c^2$ , die Form des Mesonenspektrums. Um sich auch von dieser letzten Annahme unabhängig zu machen, muß man in derselben Weise die anomale Absorption in einer bestimmten Richtung messen, aber nur für ein bestimmtes Energiegebiet der Mesonen. Dies kommt auf eine Messung des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  nach einer *Differentialmethode* hinaus.

Ähnliche Experimente wurden in letzter Zeit von Rossi und Hall<sup>1)</sup>, Cacciapuoti und Piccioni<sup>2)</sup>, Nielsen, Ryerson, Nordheim und Morgan<sup>3)</sup>, Bernardini, Cacciapuoti, Pancini und Piccioni<sup>4)</sup> ausgeführt. Im folgenden werden diese Ergebnisse sowie eine Reihe von neuen Versuchen dieser Art dargestellt und diskutiert. Weiter wird eine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  aus einigen Absorptionskurven der Mesonenkomponente in Luft und in Blei entwickelt. Diese Methode hat den Vorteil, von einer Hypothese über das Mesonenspektrum praktisch unabhängig zu sein und ist überdies auch eine Integralmethode.

### *Die Hauptversuche.*

*Versuchsanordnung und Prinzip der Methode.* Die Intensität der Mesonenkomponente wird mit einem der üblichen Geiger-Müller-Zählrohrteleskope gemessen. Das Teleskop ist in Fig. 1 dargestellt. Man kann gleichzeitig die dreifachen Koinzidenzen  $N_{III}$  zwischen den Zählrohrgruppen *A*, *B* und *C*, und die vierfachen Koinzidenzen  $N_{IV}$  der Gruppen *A*, *B*, *C* und *D* feststellen. Die Gruppe *D* bedeckt vollkommen den durch die Gruppen *A*, *B* und *C* definierten Kegel.

Die Gruppen *A*, *B* und *C* waren seitlich und oben durch dicke Bleiplatten geschützt, wie man aus Fig. 1 ersehen kann. Das Paar *C* wurde in besonders wirksamer Weise abgeschirmt. Die Abschirmung der Zähler diente gleichzeitig dazu, die weiche Komponente und besonders die Schauer auszuschließen. Mit der Abschirmung wurden zwischen den Zählern *A*, *B* und *C* tatsächlich systematisch 15 cm Blei eingeschoben<sup>5)</sup>.

<sup>1)</sup> B. Rossi u. D. B. Hall, Phys. Rev. 59, 223, 1941. — <sup>2)</sup> N. B. Cacciapuoti u. O. Piccioni, Ric. Scient. XII, 874, 1941. — <sup>3)</sup> W. M. Nielsen, C. M. Ryerson, L. W. Nordheim u. K. Z. Morgan, Phys. Rev. 59, 547, 1941. — <sup>4)</sup> G. Bernardini, B. N. Cacciapuoti, E. Pancini u. O. Piccioni, N. Cim. XIX, 1942, Nr. 3. — <sup>5)</sup> Wegen einer ausführlicheren Beschreibung der Apparatur s. N. Cim. XIX, 1942, Nr. 3.

Die Messungen wurden in Rom (50 m Höhe), Cervinia (2060 m) und Pian Rosà (3480 m) ausgeführt. In jeder Station wurde die Apparatur in eigens dafür gebauten Holzhütten aufgestellt.

Um die Luftschichten zwischen den oberen und unteren Stationen zu kompensieren, wurden weitere Bleischichten  $S$  zugefügt (s. Fig. 1), die

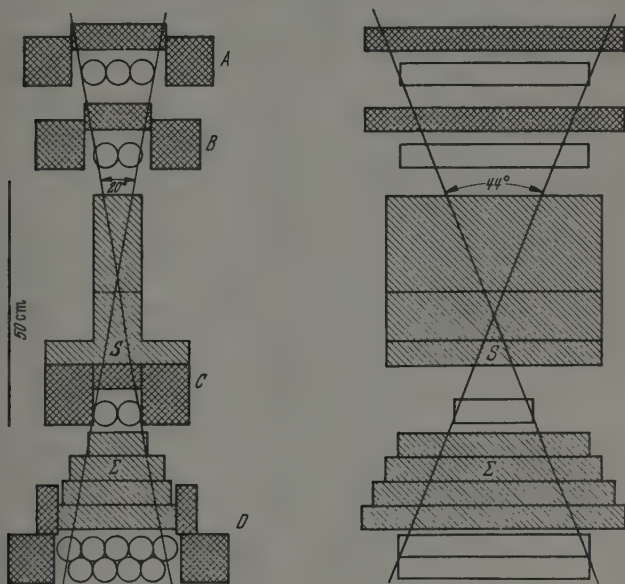


Fig. 1.

äquivalent in bezug auf Ionisationsenergieverluste waren. Die Schichten  $S$  wurden zwischen die Zähler  $B$  und  $C$  eingeschoben.

In jeder Station wurden die drei- und vierfachen Koinzidenzen abwechselnd mit und ohne den weiteren Bleischirm  $\Sigma$ , der zwischen den Zählern  $C$  und  $D$  angebracht war, registriert;  $\Sigma$  war 20 cm dick. Auf diese Weise war in jeder Station bei eingesetztem  $\Sigma$  die Differenz

$$\Delta N_{\Sigma} = N_{\text{III}} - N_{\text{IV}}$$

zwischen den drei- und vierfachen Koinzidenzen den folgenden Vorgängen zuzuschreiben.

- Ein Meson wird, nachdem es die Zähler  $A$ ,  $B$  und  $C$  und die darüber und dazwischen befindlichen Schirme durchquert hat, von  $\Sigma$  absorbiert.
- Ein Meson durchquert die Zähler  $A$ ,  $B$  und  $C$ , wird aber vom Blei, das zwischen ihnen liegt, oder vom Schirm  $\Sigma$  zerstreut.
- Ein Teil der dreifachen Koinzidenzen war zufällig.

d) Der Nutzeffekt der Gruppe  $D$  war geringer als 100%.

Wenn aber, in derselben Station, der Schirm  $\Sigma$  nicht mehr zwischen die Gruppen  $C$  und  $D$  gebracht wird, findet der Vorgang a) nicht mehr statt, abgesehen von dem unbedeutenden Anteil, der der Stütze des Teleskops zuzuschreiben ist. Der Vorgang b) tritt noch ein, aber nur für den Teil des Materials, der zwischen den Zählern  $A$ ,  $B$  und  $C$  angebracht ist. Der Vorgang c) ändert sich insofern, als das Vorhandensein des Schirmes  $\Sigma$  die Stoßzahl der Zähler  $C$  ändert. Schließlich bleibt der Vorgang d) prozentual ungeändert.

Es wurden Messungen ausgeführt, um die Rolle der Vorgänge c) und d) abzuschätzen. Der Nutzeffekt der Gruppe  $D$  wurde in Rom, Cervinia und Pian Rosà in üblicher Weise gemessen und in den drei Stationen zu mehr als 99,5% gefunden. Die zufälligen Dreifachkoinzidenzen waren ungefähr 2% der systematischen; sie waren, wie zu erwarten, wesentlich die zufälligen Koinzidenzen zwischen einem einzelnen Stoß des Zählerpaares  $C$  und einer Zweifachkoinzidenz zwischen den Zählern  $A$  und  $B$ . Die letzteren waren wirklich sehr zahlreich (ungefähr 100 pro min. in Rom) und stiegen etwa wie die Intensität der Mesonenkomponente an. Die Einzelstöße des Zählerpaares  $C$  änderten sich auch mit der Höhe der Stationen, und außerdem änderten sie sich in jeder Station ein wenig, je nachdem ob das Blei  $\Sigma$  zwischen den Zählern  $C$  und  $D$  eingeschoben war oder nicht.

Bei fehlendem  $\Sigma$  ist also der Unterschied

$$\Delta N_0 = N_{\text{III}} - N_{\text{IV}}$$

zum größten Teil, außer den zufälligen Dreifachkoinzidenzen, dem Vorgang b) zuzuschreiben. Man muß aber bedenken, daß in diesem Fall die Streuung nur den zwischen  $A$ ,  $B$  und  $C$  eingeschobenen Schirmen, und nicht der Bleischicht  $\Sigma$  zuzuschreiben ist. Aus direkten Messungen über den Vorgang b) konnten wir entnehmen, daß er keine erhebliche Rolle spielt (siehe weiter unten).

Das Vorhandensein oder Nichtvorhandensein des Schirmes  $\Sigma$  ist außerdem die Ursache von anderen Wirkungen, die  $\Delta N_\Sigma$  und  $\Delta N_0$  etwas beeinflussen und worüber noch zu sprechen sein wird. Aber abgesehen von dem sicher sehr geringen Unterschied in der Zahl der zufälligen Koinzidenzen mit und ohne  $\Sigma$  kann man schließen, daß die Zahl der Mesonen, welche das obere und das zwischen den Zählern  $A$ ,  $B$  und  $C$  liegende Material durchqueren und hierauf von  $\Sigma$  absorbiert werden, durch die Differenz  $\delta = \Delta N_\Sigma - \Delta N_0$  dargestellt wird. Auf dieser Differenz fußt die Differentialmessung der Zerfallszeit des Mesons.

Wir bezeichnen mit  $\delta_0$  den Wert von  $\delta$  in der unteren Station und mit  $\delta_h$  denjenigen in der oberen Station, wenn in dieser die Luftschicht  $h$  durch ein äquivalentes dichtes Material kompensiert ist. Dann drückt das Verhältnis (*Verminderungsverhältnis*)  $w = \delta_0/\delta_h$  den Prozentsatz der vorhandenen Mesonen auf der Höhe  $h$  aus, deren Energie eine solche ist, daß sie das oberhalb und innerhalb des Teleskops angebrachte Material durchqueren können, nicht aber die 20 cm Blei des Schirmes  $\Sigma$ , und die während der Überwindung des Höhenunterschiedes  $h$  nicht zerfallen. Aus diesem Verminderungsverhältnis kann man den Wert des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  berechnen, ohne Hypothesen über das Mesonenspektrum einzuführen.

In der Tat, wenn  $E_h$  und  $E_0$  die Energien der Mesonen auf dem Niveau  $h$  bzw. 0 sind,  $x_h$  und  $x_0$  die entsprechenden Drucke in  $\text{g/cm}^2$ ,  $H$  die Höhe der normalen Atmosphäre und  $j$  der Energieverlust durch Ionisation pro  $\text{g/cm}^2$ , so ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit  $w$ , daß ein Meson den Höhenunterschied  $h$  in normaler Richtung überwindet, *ohne zu zerfallen*, in guter Näherung gegeben durch

$$w = \frac{\left\{ \frac{x_0 E_h}{x_h E_0} \right\}^{-\frac{H \cdot \mu c^2}{c \tau (E_h + j x_h)}}}{1} \quad (1)$$

Wenn wir setzen

$$\Gamma = \frac{H}{c (E_h + j x_h)} \log \left\{ \frac{x_0 E_h}{x_h E_0} \right\}, \quad (2)$$

so folgt

$$\tau/\mu c^2 = \Gamma / \log \frac{1}{w}. \quad (3)$$

Nun ist das Verminderungsverhältnis nichts anderes als der experimentelle Wert des  $w$  und erlaubt, wie wir oben sahen, den Wert von  $\tau/\mu c^2$  zu berechnen.

*Die Messungen.* Wie oben schon gesagt, wurden die Beobachtungen in Rom, Cervinia und Pian Rosà ausgeführt. Um die Luftschicht zwischen Rom und Cervinia zu kompensieren, wurde ein Bleischirm  $S_1 = 35$  cm benutzt, zwischen Cervinia und Pian Rosà wurde zu demselben Zweck ein Bleischirm  $S_2$  von 15 cm, und zwischen Rom und Pian Rosà der Schirm  $S_1 + S_2$  verwendet. Der Schirm  $S_2$  war, wie sich später bei genauerer Berechnung herausstellte, etwas fehlerhaft; darauf wird in der folgenden Diskussion Rücksicht genommen werden. Zu diesen Schirmen kam noch das Blei  $\sigma$ , welches dazu diente, die Elektronenkomponente auszuschalten; das Blei  $\sigma$  bestand im ganzen aus 15 cm.

Die Kombination der verschiedenen Beobachtungen erlaubte die folgenden verschiedenen Messungen der Zerfallsabsorption in Luft aus-



zuführen: 1. Zwischen Rom und Cervinia für ein Mesonengebiet, dessen Reichweite zwischen  $\sigma$  und  $\sigma + \Sigma$  war, d. h. zwischen 15 und 35 cm Blei; 2. zwischen Cervinia und Pian Rosà für dieselbe Reichweite; 3. zwischen Cervinia und Pian Rosà für einen Bereich der Mesonen, deren Reichweiten zwischen  $\sigma + S_1$  und  $\sigma + S_1 + \Sigma$  war, d. h. zwischen 50 und 70 cm Blei; 4. endlich zwischen Rom und Pian Rosà nochmals für das Mesonengebiet, dessen Reichweite zwischen 15 und 35 cm lag. Die vierte Messung war natürlich nicht unabhängig von den anderen, aber im ganzen konnte man mit einer verhältnismäßig beschränkten Zahl von Beobachtungen auf den Wert des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  für verschiedene Höhen und verschiedene Energiegebiete der Mesonen schließen. Dies war gerade einer der Hauptgründe dieser Untersuchungen.

In jeder Station wurde die Registrierung der Impulse abwechselnd mit und ohne Schirm  $\Sigma$  ausgeführt. Der Wechsel erfolgte im allgemeinen alle 5 bis 6 Stunden. In jeder Station wurde der Barometerstand alle 4 Stunden festgestellt.

In Rom wurde eine vollständige Beobachtungsreihe vor den Messungen von Cervinia und Pian Rosà, und eine weitere bei der Rückkehr gemacht. Endlich wurden die Messungen von Pian Rosà zwischen vorausgehenden und nachfolgenden Beobachtungsserien auf Cervinia ausgeführt. Wenn man der Druckänderung Rechnung trägt<sup>1)</sup>, stimmen die Ergebnisse der zwei Reihen in Rom und Cervinia innerhalb der Grenze der statistischen Fehler sehr befriedigend überein.

Die endgültigen Ergebnisse sind in folgenden Tabellen dargestellt.

Tabelle 1. (Rom.)

Schirm	$N_{IV}$	$N_{III}$	$\Delta N$	Druck
$\sigma$	$271,4 \pm 1,5$	$281,7 \pm 1,7$	$10,25 \pm 0,28$	} 754,2
$\sigma + \Sigma$	$248,4 \pm 1,3$	$282,3 \pm 1,4$	$33,90 \pm 0,48$	

Tabelle 2. (Cervinia.)

Schirm	$N_{IV}$	$N_{III}$	$\Delta N$	Druck
$\sigma + S_1$	$307,1 \pm 2,6$	$330,0 \pm 2,7$	$22,86 \pm 0,69$	} 579,3
$\sigma + S_1 + \Sigma$	$268,1 \pm 2,1$	$324,4 \pm 2,3$	$56,38 \pm 0,95$	
$\sigma$	$400,2 \pm 3,1$	$421,2 \pm 3,2$	$20,98 \pm 0,71$	} 590,0
$\sigma + \Sigma$	$343,2 \pm 3,0$	$411,3 \pm 3,3$	$68,10 \pm 1,3$	

<sup>1)</sup> Für diese Kontrolle wurde angenommen, daß sich die Intensität der Mesonenkomponente proportional mit dem Druck  $p$  ändert.

Tabelle 3. (Pian Rosà.)

Schirm	$N_{IV}$	$N_{III}$	$\Delta N$	Druck
$\sigma + S_2$	$472,9 \pm 4,6$	$513,4 \pm 4,8$	$40,5 \pm 1,3$	} 490,1
$\sigma + S_2 + \Sigma$	$405,8 \pm 3,5$	$511,8 \pm 3,9$	$106,0 \pm 1,8$	
$\sigma + S_1 + S_2$	$342,0 \pm 3,2$	$369,3 \pm 3,3$	$27,25 \pm 0,91$	} 486,5
$\sigma + S_1 + S_2 + \Sigma$	$304,1 \pm 2,2$	$374,2 \pm 2,5$	$70,09 \pm 1,06$	

Aus diesen Ergebnissen entnimmt man folgende Werte für die Unterschiede  $\delta = \Delta N_x - \Delta N_0$  (Tabelle 4).

Tabelle 4.

Station	Schirm cm Blei	Kompensationsblei cm	$\delta$
Rom (50 m)	$\sigma = 15$	0	$\delta_1 = 23,65 \pm 0,56$
Cervinia (2060 m)	$\sigma = 15$	$S_1 = 35$	$\delta_2 = 33,52 \pm 1,17$
	$\sigma = 15$	0	$\delta_2' = 47,12 \pm 1,48$
Pian Rosà (3480 m)	$\sigma = 15$	$S_2 = 15$	$\delta_3' = 65,5 \pm 2,2$
	$\sigma + S_1 = 50$	$S_2 = 15$	$\delta_3 = 42,84 \pm 1,39$

In der dritten Spalte der Tabelle sind die Kompensationsschichten bezüglich Rom (für den Vergleich zwischen Rom und Cervinia) und Cervinia (für den Vergleich zwischen Cervinia und Pian Rosà) aufgeführt.

Für das Verminderungsverhältnis findet man endlich die in Tabelle 5 zusammengestellten Werte.

Tabelle 5.

Untere Station	Obere Station	Reichweite in cm Blei	$w$
Rom	Cervinia	$15 \longleftrightarrow 35$	$0,707 \pm 0,029$
Cervinia	Pian Rosà	$15 \longleftrightarrow 35$	$0,719 \pm 0,034$
Rom	Pian Rosà	$15 \longleftrightarrow 35$	$0,552 \pm 0,022$
Cervinia	Pian Rosà	$50 \longleftrightarrow 70$	$0,782 \pm 0,038$

In den Tabellen 1, 2 und 3 sind die angeführten Drucke die gewichteten Mittelwerte, welche während der Messung bestimmt wurden. Die Luftschichten, die zwischen den verschiedenen Stationen lagen, wurden auf Grund dieser mittleren Drucke berechnet.

Die oben beschriebenen Beobachtungen wurden durch weitere Messungen in Rom, Cervinia und Pian Rosà ergänzt, um die Absorptionskurve der Mesonenkomponente zu erhalten. Die Gesamtergebnisse dieser Mes-

sungen sind in Fig. 2 graphisch dargestellt. Diese Absorptionsmessungen wurden mit vierfachen Koinzidenzen ausgeführt, einerseits um die zufälligen Koinzidenzen ganz vernachlässigen zu können, andererseits um die vorher

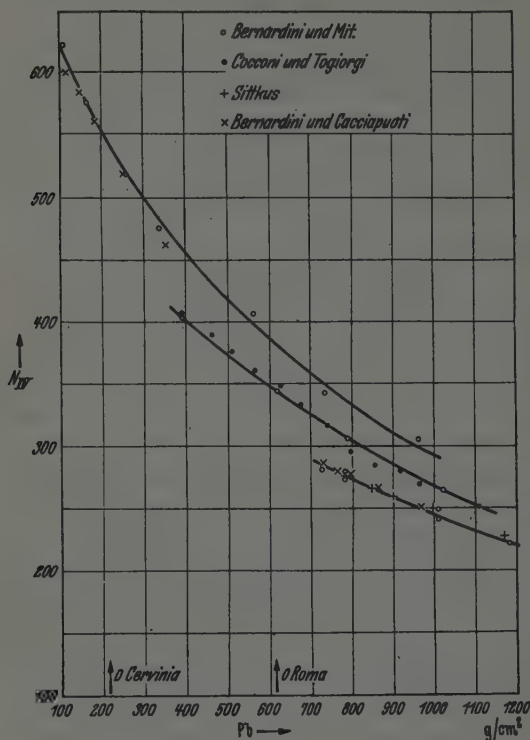


Fig. 2.

gemachten Messungen besser auszunutzen. Die statistischen Fehlergrenzen betragen ungefähr 1 %.

Wenn man berücksichtigt, daß diese Messungen nicht genügend abgewechselt wurden, und daß die angegebenen Werte nicht für die Druckänderungen korrigiert wurden, beweisen die Kurven der Fig. 2 das regelmäßige Arbeiten unserer Apparate während der langen Zeit, über die sich die Messungen erstreckten. Unter anderem ist besonders hervorzuheben, daß unsere Resultate eine Zunahme der Mesonenstrahlung mit der Höhe zeigen, die mit den Messungen von Rossi, Hilberry und Hoag<sup>1)</sup> sehr gut übereinstimmt. Schließlich werden wir weiter unten noch sehen, daß

<sup>1)</sup> B. Rossi, N. Hilberry u. J.B. Hoag, Phys. Rev. 57, 461, 1940.

eine gewisse Streuung der Meßpunkte durch eine Besonderheit der Versuchsanordnung erklärt wird.

*Die differentiale Bestimmung der mittleren Lebensdauer des Mesons* <sup>1)</sup>. Auf Grund der Tabelle 5 und der Formel (3) kann man drei unabhängige Werte für die mittlere Lebensdauer des Mesons erhalten.

a) Den ersten Wert kann man aus dem Verminderungsverhältnis zwischen Cervinia und Rom entnehmen. Das Reichweitengebiet der Mesonen in Rom erstreckt sich von 15 bis 35 cm Blei. Nach der Berechnung von Wick <sup>2)</sup> entspricht diese Reichweite einer mittleren Energie  $E_0 = 443$  MeV. Während dieser Messungen herrschten folgende Drucke:

Rom .....	1025,7 g/cm <sup>2</sup> ,
Cervinia .....	787,8 „ ,

d. h. eine Druckdifferenz von rund 238 g/cm<sup>2</sup> Luft. Indem man weiterhin die Berechnungen von Wick <sup>3)</sup> benutzt, findet man, daß die entsprechende mittlere Energie in Cervinia  $E_h = 905$  MeV war.

Der Höhenunterschied von 238 g/cm<sup>2</sup> zwischen Rom und Cervinia wurde durch 35 cm Blei kompensiert, in voller Übereinstimmung mit den Wickschen Berechnungen. Aus der oben genannten mittleren Energie folgt ein mittlerer Ionisationsverlust  $j = 1,92$  MeV je g/cm<sup>2</sup>. Endlich findet man mit der barometrischen Höhenformel und den oben angegebenen Drucken  $H = 7,72$  km.

Man kennt also alle Größen, welche in Formel (3) erscheinen. Da das Verminderungsverhältnis zwischen Cervinia und Rom  $w_1 = 0,707 \pm 0,029$  ist, hat man  $(\tau/\mu c^2)_1 = (2,97 \pm 0,35) \cdot 10^{-8}$  sec/MeV.

b) In ähnlicher Weise kann man für den Vergleich zwischen Cervinia und Pian Rosà vorgehen. Für die Messungen, welche dem Mesonengebiet zwischen 15 und 35 cm Blei entsprechen, hat man eine Druckdifferenz von rund 136 g/cm<sup>2</sup>. Die mittlere Energie der Mesonen war

in Cervinia .....	$E_0 = 443$ MeV,
in Pian Rosà .....	$E_h = 700$ „ ,

Das Kompensationsblei sollte 230 g/cm<sup>2</sup> betragen. In Wirklichkeit wurde der Schirm  $S_2$  verwendet, der nur 170 g/cm<sup>2</sup> maß. Die Differenz ist leider beträchtlich, aber wie wir später sehen werden, beeinflußt sie den von uns gefundenen experimentellen Wert des Verminderungsverhältnisses relativ wenig.

<sup>1)</sup> Wegen weiterer Einzelheiten s. N. Cim. a. a. O. — <sup>2)</sup> G. C. Wick, Ric. Scient. XII, 858, 1941. — <sup>3)</sup> Ich spreche den Herren Prof. G. C. Wick und Dr. B. Ferretti meinen besten Dank aus für die freundlichen Diskussionen, die ich mit ihnen über die hier behandelten Argumente gepflogen habe.

Da man in diesem Falle  $w_2 = 0,719 \pm 0,034$  findet, ergibt sich  $(\tau/\mu c^2)_2 = (2,48 \pm 0,36) \cdot 10^{-8} \text{ sec/MeV}$ .

c) Wie schon gesagt, wurde zwischen Cervinia und Pian Rosà der Vergleich auch für die Mesonen gemacht, deren Reichweite zwischen  $15 + 35 = 50$  und  $50 + 20 = 70 \text{ cm}$  Blei liegt. In diesem Fall findet man

in Cervinia .....  $E_0 = 902 \text{ MeV}$ ,

in Pian Rosà .....  $E_h = 1155 \text{ ,,}$

und einen Druckunterschied von  $126 \text{ g/cm}^2$ . Das Kompensationsblei war wiederum  $S_2 = 170 \text{ g/cm}^2$ ; diesmal war der Fehler kleiner. Aus diesen Messungen mit  $w'_2 = 0,782 \pm 0,038$  erhält man, immer abgesehen vom Fehler des Kompensationsbleis,  $(\tau/\mu c^2)_2 = (1,84 \pm 0,37) \cdot 10^{-8} \text{ sec/MeV}$ .

d) Einen vierten (von den anderen aber nicht unabhängigen) experimentellen Wert von  $w$  ergibt endlich der Vergleich Rom—Pian Rosà. Dies ist vielleicht der Wert, der am meisten interessiert, weil er der zuverlässigste zu sein scheint. Die Differenz zwischen den drei- und vierfachen Koinzidenzen wurde in der Tat sehr sorgfältig in beiden Stationen gemessen. Besonders wichtig ist aber, daß diese Messung der differentialen anomalen Absorption bei einem Höhenunterschied von ungefähr  $3500 \text{ m}$  gemacht wurde; der Höhenunterschied war also ganz beträchtlich und größer als jener, der in den früheren Versuchen über die zusätzliche Absorption der Atmosphäre erreicht wurde. Dies trägt zur Verminderung der Fehler bei, die bei solchen Versuchen auftreten. Bekanntlich sind diese Fehler größer als die statistisch berechneten, wegen der Unmöglichkeit eines rasch genug wechselnden Vergleichs zwischen den beiden Beobachtungsstationen.

Der Höhenunterschied zwischen beiden Stationen betrug  $364 \text{ g/cm}^2$  Luft; er wurde durch die Bleischicht  $S_1 + S_2 = 50 \text{ cm}$  kompensiert. In Wirklichkeit hätten es ungefähr  $53,5 \text{ cm}$  sein müssen. Wie man sieht, ist die Differenz in diesem Fall ziemlich unbedeutend. Da in diesem Fall  $w_3 = 0,552 \pm 0,022$  ist, folgt  $(\tau/\mu c^2)_3 = (2,48 \pm 0,19) \cdot 10^{-8} \text{ sec/MeV}$ .

e) Nun wollen wir eingehender die Fehler untersuchen, welche unsere Messungen beeinflußt haben könnten. Die Werte von  $w = \delta_0/\delta_h$ , aus denen wir die Werte von  $\tau/\mu c^2$  abgeleitet haben, sind das Ergebnis von vier Messungen. Wenn wir der Deutlichkeit halber wieder die Bezeichnungen des Abschnitts 1 benutzen, aber durch obere Indizes die Messungen mit und ohne  $\Sigma$  unterscheiden, können wir schreiben

$$w = \frac{\{(N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{IV}}^{\Sigma}) - (N_{\text{III}}^0 - N_{\text{IV}}^0)\}_0}{\{(N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{IV}}^{\Sigma}) - (N_{\text{III}}^0 - N_{\text{IV}}^0)\}_h} = \frac{\{(N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma}) + (N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{III}}^0)\}_0}{\{(N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma}) + (N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{III}}^0)\}_h}.$$



Ein Punkt fällt sogleich auf: Im idealen Falle sollten die Differenzen  $(N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{III}}^0)$  null sein, und daher müßte für die verschiedenen Werte von  $\delta$  gelten:  $\delta = N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma}$ . In der Tabelle 6 sind die Werte von  $\delta$  und die Differenzen  $(N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma})$  gegenübergestellt, welche man aus unseren Ergebnissen für die verschiedenen Stationen ableitet. Die Messungen von Rom und Pian Rosà stimmen ziemlich gut überein. Für jene von Cervinia sind die Abweichungen wesentlich größer und beidemal im selben Sinn. Trotzdem stimmt der Wert von  $\tau/\mu c^2$ , der sich daraus ergibt, vollkommen überein mit  $(\tau/\mu c^2)_3$ . Wie wir später sehen werden, ist anzunehmen, daß die beobachteten Differenzen in den Zahlen  $N_{\text{III}}^0$  und  $N_{\text{III}}^{\Sigma}$  (s. Tabelle 2) hauptsächlich den Luftdruckänderungen zuzuschreiben sind. Tatsächlich waren während der Messungen in dieser Station sehr starke Druckvariationen zu beobachten.

Tabelle 6.

Station	$\delta$	$N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma}$	$\delta - (N_{\text{IV}}^0 - N_{\text{IV}}^{\Sigma})$
Rom.....	$23,65 \pm 0,6$	$23,0 \pm 2$	$0,65 \pm 2,2$
Cervinia .....	$47,1 \pm 1,5$	$57 \pm 4,2$	$-9,9 \pm 4,5$
Cervinia .....	$33,52 \pm 1,2$	$39 \pm 3,3$	$-5,5 \pm 3,5$
Pian Rosà .....	$65,5 \pm 2,2$	$67,1 \pm 5$	$1,6 \pm 5,5$
Pian Rosà .....	$42,84 \pm 1,4$	$37,9 \pm 4$	$4,94 \pm 4,2$

Jedenfalls ist festzustellen, daß schon aus einem anderen Grunde die Differenz  $(N_{\text{III}}^{\Sigma} - N_{\text{III}}^0)$  sicher systematisch von Null verschieden war. Es war nämlich die Zahl der zufälligen Dreifachkoinzidenzen, mit und ohne  $\Sigma$ , nicht dieselbe, weil sich herausstellte, daß das Vorhandensein der Schicht  $\Sigma$  die einzelnen Impulszahlen des Paares  $C$  (s. Fig. 1) verringerte, und die zufälligen dreifachen Koinzidenzen in demselben Verhältnis vermindert wurden. Dies führt zu einem Fehler der Werte von  $\delta$ , und zwar zu einem negativen Fehler. Natürlich war der Fehler in den verschiedenen Stationen nicht derselbe. Man kann diese Fehler auf Grund der folgenden Daten abschätzen: 1. Auflösungsvermögen des Koinzidenzverstärkers ( $9 \cdot 10^{-5}$  sec). 2. Zahl der einzelnen Impulse des Zählerpaares  $C$  mit und ohne  $\Sigma$  in den verschiedenen Stationen. 3. Zahl der Zweifachkoinzidenzen der Zähler  $A$  und  $B$ . So konnte berechnet werden, daß die  $\delta$ -Werte in Rom um  $1,5 \pm 0,2$ , in Cervinia um  $2,8 \pm 0,4$  und in Pian Rosà um  $1,7 \pm 0,15$  erhöht werden mußten <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Die Korrektur in Pian Rosà ist relativ klein, weil der Apparat direkt im Granit eingebaut war und die natürliche Radioaktivität sehr schwach war.



Abgesehen von den zufälligen Koinzidenzen sollte die Differenz  $\delta = (N_{IV}^0 - N_{IV}^{\Sigma}) + (N_{III}^{\Sigma} - N_{III}^0)$  die Zahl der Mesonen geben, die von  $\Sigma$  absorbiert werden. Dieser Effekt war sicher der überwiegende, aber gleichzeitig kamen dazu noch zwei andere, die relativ wichtig sind. Beide rühren von der Zerstreuung her. Einmal vermindert diese die Intensität der Mesonenkomponente in der obersten Station, zum andern übt sie auf die Messungen in einer und derselben Station, mit und ohne  $\Sigma$ , verschiedenen Einfluß aus. Die Zerstreuung macht sich nämlich nur bei Mesonen mit geringen Energien sehr deutlich bemerkbar, also in größerer Höhe. Dieses erste Phänomen ist ziemlich schwach (s. auch weiter unten) und führt wieder zu einem negativen Fehler; vom zweiten kann man einsehen, daß es hauptsächlich von dem Verhältnis zwischen der Entfernung der Zählergruppe  $D$  von dem Bleiabsorber und der Ausdehnung dieses Absorbers abhängt. Bei fehlendem  $\Sigma$ -Schirm war in der Tat die Entfernung zwischen dem Bleifilter  $S$ , wo die Zerstreuung stattfindet, und dem Zähler  $D$  sehr beträchtlich. Auch dieser Effekt liegt im Sinne einer Verminderung von  $\delta$ . Um eine Vorstellung von seiner Größe zu bekommen, wurde in Rom der folgende Versuch ausgeführt: Die Zahl der Vierfachkoinzidenzen wurde abwechselnd mit dem Absorber  $\Sigma$  zwischen den Zählern  $C$  und  $D$ , und mit einem (ebenfalls 20 cm dicken) Schirm zwischen den Zählern  $C$  und  $B$  gemessen. Unter idealen Bedingungen hätten die beiden Koinzidenzwerte übereinstimmen müssen; die Ergebnisse der Beobachtungen waren dagegen folgende:

$$\Sigma \text{ zwischen } C \text{ und } D: N_{IV} = 250 \pm 1,2,$$

$$\Sigma \quad ,, \quad C \quad ,, \quad B: N_{IV} = 241,2 \pm 1,7.$$

Die Differenz  $\varepsilon = 8,8 \pm 2,1$  ist zwar klein gegen  $N$ , aber keineswegs gegen  $\delta$ .

Es sei bemerkt, daß die Streuung der Meßpunkte in den Kurven von Fig. 2 hauptsächlich diesem Phänomen zuzuschreiben ist. Diese Punkte sind in der Tat abwechselnd mit und ohne  $\Sigma$  gewonnen worden. Das Phänomen war besonders merklich bei der Pian Rosà-Kurve, weil es annähernd proportional der Intensität der Mesonenkomponente war. Es war nicht zu bemerken in der Cervinia-Kurve, weil die Druckschwankungen zufällig die systematischen Variationen, die von  $\Sigma$  hervorgebracht wurden, beinahe kompensierten.

Auf Grund unserer Ergebnisse in Rom können wir unsere Resultate auch für diesen Streuungseffekt korrigieren. Hierbei kann man annehmen, daß dieser Effekt sich in den verschiedenen Stationen proportional mit den Vierfachkoinzidenzen ändert. Mit diesen beiden Korrekturen findet man die Werte von  $w$ , die in der Tabelle 7 zusammengestellt sind. In der Tabelle 7

Tabelle 7.

Untere Station	Obere Station	Reichweite in cm Blei	$w$	$\tau/\mu c^2$
Rom	Cervinia	15 $\longleftrightarrow$ 35	$0,72 \pm 0,05$	$3,2 \pm 0,6$
Rom	Pian Rosà	15 $\longleftrightarrow$ 35	$0,60 \pm 0,04$	$2,9 \pm 0,4$
Cervinia	Pian Rosà	15 $\longleftrightarrow$ 35	$0,74 \pm 0,08$	$2,7 \pm 0,7$
Cervinia	Pian Rosà	50 $\longleftrightarrow$ 70	$0,82 \pm 0,09$	$2,3 \pm 0,8$

sind auch die neu berechneten Werte von  $\tau/\mu c^2$  verzeichnet. Man sieht, daß diese neuen Werte untereinander gut übereinstimmen, trotzdem der dritte und vierte Wert noch zu korrigieren ist für den Fehler im Kompen-sationsblei. Diese Korrektur ist nicht leicht zu ermitteln (s. weiter unten), daher ist es vorläufig besser, nur den ersten und zweiten Wert von  $\tau/\mu c^2$  zu berücksichtigen. Ihr Mittelwert ist

$$\tau/\mu c^2 = (3,05 \pm 0,32) \cdot 10^{-8} \text{ sec/MeV}.$$

*Die integrale Bestimmung der Zerfallszeit des Mesons.* Die Messungen, die im vorhergehenden Abschnitt behandelt sind, erlauben auch eine Bestimmung der Lebensdauer der Mesonen auf Grund der zusätzlichen Absorption über das ganze Mesonenspektrum. Diese Bestimmung liefert eine Kontrolle des mit der Differentialmethode gefundenen Wertes und gleichzeitig der relativistischen Gleichung (1). Die Berechnung wurde nach zwei verschiedenen Methoden ausgeführt.

a) Erstens haben wir das gewöhnliche Verfahren angewendet. Wir nehmen dazu für den Energieverlust der Mesonen durch Ionisation einen konstanten Wert  $j$  an, der von der Energie der Mesonen unabhängig ist. Unter dieser Annahme wird ein Meson, das die Energie  $E$  auf dem Niveau  $h$  hat, auf dem tieferen Niveau 0 die Energie  $E - j(x_0 - x_h)$  besitzen, so daß die Gleichung (1) in der Form geschrieben werden kann:

$$w(E) = \left\{ \frac{x_h}{x_0} \frac{E - j(x_0 - x_h)}{E} \right\}^{\frac{\mu c^2}{\tau} \frac{H}{c(E + jx_h)}}$$

Dann nehmen wir noch an, daß das Spektrum  $f_h(E) dE$  der Mesonen in der oberen Station und in der Richtung des Zenits bekannt ist. Die Mesonenintensität, die wir in dieser Station beobachten werden, ist, von einem konstanten Faktor abgesehen, durch das Integral

$$I(h) = \int_{E_h}^{\infty} f_h(E) dE$$

gegeben, wobei  $E_h$  die minimale Energie darstellt, die ein Meson besitzen muß, um eine Koinzidenz aufzulösen.

In der unteren Station gilt für die Mesonenintensität der ähnliche Ausdruck

$$I(0) = \int_{E_0}^{\infty} w(E) f_h(E) dE,$$

wobei  $w(E)$  die Wahrscheinlichkeit darstellt, daß ein Meson, das die Energie  $E$  auf dem Niveau  $h$  besitzt, ohne Zerfall das Niveau 0 erreicht.

Wenn die Luftschicht, die sich zwischen den beiden Stationen befindet, in den Messungen am oberen Niveau mit einem angepaßten dichten Material kompensiert ist, so daß  $E_h = E_0$ , so können wir den Wert von  $\tau/\mu c^2$  aus dem experimentellen Verhältnis

$$W = I(0)/I(h)$$

gewinnen.

Die Rechnungen sind für den Vergleich zwischen Rom und Pian Rosà ausgeführt worden. Für das Spektrum haben wir die Ergebnisse von Wick benutzt.

Da die Bleidicke  $S_1 + S_2$ , die wir zur Kompensation der Luftschicht zwischen den zwei Stationen benutzt haben, etwas zu gering war, haben wir die experimentellen Resultate mittels der Kurven in Fig. 2 korrigiert. Auf diese Weise finden wir für die Mesonen, deren Reichweite in Rom größer als 15 cm Blei ist,  $W = 271,4/338 = 0,803$  und hieraus  $\tau/\mu c^2 = 2,9 \cdot 10^{-8}$ .

Eine ähnliche Rechnung für die Mesonen, deren Reichweite in Rom größer als 35 cm ist, gibt den Wert  $W = 248,4/292 = 0,852$ , woraus man  $\tau/\mu c^2 = 3,1 \cdot 10^{-8}$  ableitet. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung mit den vorigen Ergebnissen sehr gut.

b) Für die vorige Methode wird das Mesonenspektrum in einer der zwei Stationen als bekannt vorausgesetzt. Diese Annahme kann vermieden werden, wenn die Absorptionskurve der Mesonen in beiden Stationen bis zu bedeutend höheren Energien mit genügender Genauigkeit gemessen werden.

Wir bezeichnen mit  $E_\xi$  die Energie eines Mesons, dessen Reichweite  $\xi$  g/cm<sup>2</sup> Blei ist. Wenn eine Schicht  $\xi$  zwischen den Zählern des Teleskopes eingeschoben ist, wird die Anzahl der von Mesonen ausgelösten Koinzidenzen, die auf einem Niveau von  $h$  g/cm<sup>2</sup> registriert werden (von einem konstanten Faktor abgesehen), durch den Ausdruck gegeben:

$$N_h(E_\xi) = \int_{E_\xi}^{\infty} f_h(E) dE. \quad (4)$$

In diesem Ausdruck stellt  $f_h(E)$  wieder die Verteilungsfunktion des Mesonenspektrums auf dem Niveau  $h$  dar. Die Anzahl der Koinzidenzen, die wir

auf einem niedrigeren Niveau von  $h + x$  g/cm<sup>2</sup> mit derselben Schicht  $\xi$  zwischen den Zählern des Teleskopes finden, ist einfach

$$N_{h+x}(E_\xi) = \int_{E_\xi + jx}^{\infty} f_h(E) w(E, x) dE. \quad (5)$$

wobei  $j$  der mittlere Energieverlust durch Ionisation ist und  $w(E, x)$  die Wahrscheinlichkeit, daß ein Meson, das die Energie  $E$  auf dem Niveau  $h$  besitzt, ohne Zerfall das Niveau  $h + x$  erreicht.

Aus (4) folgt

$$f_h(E) = - \frac{\partial N_h(E)}{\partial E},$$

durch Einsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (5) erhalten wir

$$N_{h+x}(E_\xi) = - \int_{E_\xi + jx}^{\infty} \frac{\partial N_h(E)}{\partial E} w(E, x) dE. \quad (6)$$

Nehmen wir noch an, daß die Absorptionskurve in der oberen Station bis zu einer maximalen Schichtdicke  $\xi^*$  (in unserem Fall etwa 1 m Blei) gemessen worden ist, so erhalten wir aus Gleichung (6) durch partielle Integration

$$\begin{aligned} N_{h+x}(E_\xi) = & N_h(E_\xi + jx) w(E_\xi + jx) - N_h(E_{\xi^*}) w(E_{\xi^*}) + \\ & + \int_{E_\xi + jx}^{E_{\xi^*}} N_h(E) \frac{\partial w(E, x)}{\partial E} dE + \int_{E_{\xi^*}}^{\infty} f_h(E) w(E, x) dE, \end{aligned} \quad (7)$$

wobei das unbekannte Spektrum  $f_h(E)$  nur noch in dem letzten Integral auftritt. Alle anderen Terme können aus den experimentellen Ergebnissen ausgerechnet werden.

Nun ist leicht zu erkennen, daß  $\int_{E_{\xi^*}}^{\infty} f_h(E) w(E, x) dE$  die Anzahl  $N_{h+x}^*$

der Koinzidenzen darstellt, die in der unteren Station gemessen werden, wenn zwischen den Zählern des Teleskops eine solche Bleischicht eingeschoben ist, daß alle Mesonen von einer Energie  $\leq E_\xi - jx$  absorbiert werden.  $N_{h+x}^*$  kann daher aus den Experimentalergebnissen ermittelt werden. Dann können wir mittels Gleichung (7) allein aus den Absorptionskurven auf den beiden Niveaus  $h$  und  $h + x$  den Wert von  $\tau/\mu c^2$  berechnen, ohne besondere Annahme über das Mesonenspektrum einzuführen.

Falls aber  $\xi^*$ , wie bei unseren Messungen, ziemlich groß ist, kann der Wert von  $N_{h+x}^*$  auch nach dem gewöhnlichen Verfahren berechnet werden, weil die Resultate von der geringen Unsicherheit in der Form der Funktion  $f_h(E)$  praktisch unabhängig sind. Dann wird nämlich der höhere Teil des

Spektrums sehr wenig vom Mesonenzerfall beeinflußt. Außerdem kann die Funktion, die von Wick für das Spektrum in 4000 m Höhe ausgerechnet

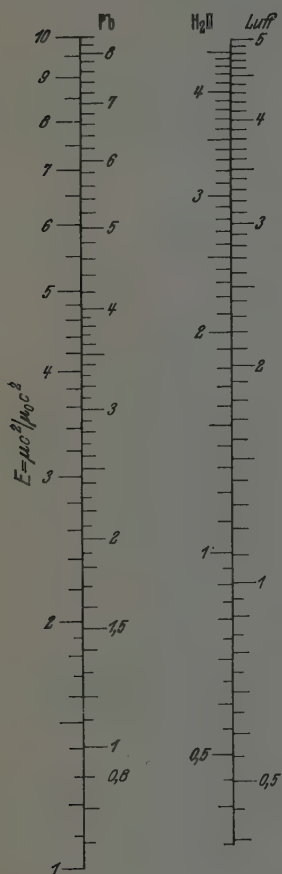


Fig. 3.

worden ist, von der richtigen Funktion nicht sehr stark abweichen, weil bekanntlich diese Verteilungsfunktion mit dem von Blackett und andere<sup>1)</sup> im Meeresniveau gemessenen Spektrum ziemlich gut übereinstimmt (vgl. z. B. Euler und Heisenberg, a. a. O., S. 41). Deswegen scheint es uns vernünftiger, die Berechnung der Zerfallskonstante der Mesonen über das ganze Spektrum auf diesem zweiten Wege durchzuführen.

Die Berechnungen wurden so ausgeführt, daß die Absorptionskurve von Pian Rosà der von Cervinia gegenübergestellt wurde. Ein ähnlicher Vergleich wurde auch zwischen den Absorptionskurven von Cervinia und Rom gemacht. Der erste Vergleich besagt mehr, weil die Absorptionskurve, die in Pian Rosà gemessen worden ist, sich bis zu etwa 1 m, d. h. bis zu Energien von etwa  $10^9$  MeV erstreckt. Bei der Ausführung der Berechnungen haben wir für die Reichweite-Energie-Beziehung durchweg das von Wick berechnete und in Fig. 3 wiedergegebene Nomogramm benutzt.

Die Ausrechnung des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$  nach Gleichung (7) könnte nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden. Wir haben es jedoch vorgezogen, die Kurven nach Gleichung (7) für verschiedene Werte von  $\tau/\mu c^2$  aus den experimentellen Absorptions-

kurven von Pian Rosà und Cervinia zu berechnen, da uns dieses Vorgehen übersichtlicher schien. Die Resultate sind in Fig. 4 und 5 dargestellt. In Fig. 4 sind die Resultate für den Vergleich Pian Rosa—Cervinia, in Fig. 5 jene für den Vergleich Cervinia—Rom enthalten. Die Werte von  $\tau/\mu c^2$ ,

<sup>1)</sup> T. Crussard u. L. Leprince-Ringuet, C. R. **204**, 240, 1937; P. M. S. Blackett u. T. G. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **160**, 304, 1937; **165**, 209, 1938; T. G. Wilson, ebenda **172**, 517, 1939; P. Ehrenfest, C. R. **207**, 573, 1938; D. J. Hughes, Phys. Rev. **57**, 592, 1940.



mit denen die Berechnungen gemacht wurden, sind neben die entsprechenden Kurven geschrieben.

Aus diesen Abbildungen erkennt man, daß die Beobachtungspunkte in beiden Fällen sehr nahe an den mit  $\tau/\mu c^2 = 3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV berechneten Kurven liegen. Dieses Ergebnis stimmt mit dem aus der Differentialmethode erhaltenen Wert vollkommen überein.

c) Zur Vervollständigung haben wir noch die Gleichung (7) benutzt, um die in Pian Rosà gemessene Absorptionskurve in Blei mit der zwischen Pian Rosà und Rom in Luft erhaltenen Absorptionskurve zu vergleichen. Man kann nämlich mit unseren Messungen und jenen von Rossi, Hilberry und Hoag eine sehr genaue Absorptionskurve der Mesonen in Luft zwischen 4000 m und dem Meeresniveau erhalten (die weiche Komponente ist mit 15 cm Blei ausgefiltert worden). Dann sind die Berechnungen in ähnlicher Weise auszuführen wie in den früheren Abschnitten. Der einzige Unterschied besteht darin, daß jetzt die Veränderliche in Gleichung (7) nicht mehr die Bleischicht  $\xi$  ist, sondern die Tiefe  $x$  unter dem Niveau  $h$ .

In Fig. 6 sind die experimentelle Absorptionskurve in Blei für Pian Rosa und diejenige, die man aus verschiedenen Werten von  $\tau/\mu c^2$  für die Absorption in Luft berechnen kann, wiedergegeben. In diese Figur sind außerdem unsere Beobachtungspunkte, wie auch die von Rossi und Mitarbeitern eingetragen. Die von Rossi und Mitarbeitern gemachten Beobachtungen wurden mit dem Reduktionsfaktor 277/315 multipliziert, wobei 315 die Anzahl der Koinzidenzen pro Stunde darstellt, die die genannten Forscher in Chicago beobachtet haben.

Aus dieser Figur ersehen wir noch einmal, daß der beste Wert von  $\tau/\mu c^2$  ungefähr  $3 \cdot 10^{-8}$  ist, wobei der Fehler nicht größer als 10% ist,

### *Diskussion.*

*Kritik unserer Differentialmessungen.* Bei unseren Versuchen wäre es sicher vorzuziehen gewesen, wenn das Kompensationsmaterial beim Zählerteleskop oben gelegen hätte, statt dazwischen. Dies konnte wegen Materialmangels nicht eingerichtet werden, aber man kann dazu folgendes sagen:

1. Bei Gelegenheit von Messungen über Absorption durch Zerfall, die vor kurzem zwischen Rom und Monte Cavo (nahe Rom, etwa 1000 m hoch) durch Santangelo, Scrocco und Festa vorgenommen wurden, fand man ungefähr denselben Wert des Verminderungsverhältnisses  $w$ , gleichgültig, ob das Kompensationsmaterial unten oder oben lag.

2. Man könnte vermuten, daß die Messungen mit untergebrachtem Kompensationsmaterial etwas fehlerhaft sind wegen der Mesonenstreuung.



Direkte Messungen, die zur Zeit (bei Festa) im Gange sind, zeigen aber, daß die Mesonenstreuung für die von uns verwendeten Dimensionen des Teleskops vernachlässigbar wird für Mesonen, die, wie in unserem Fall, mindestens 15 cm Blei durchqueren.

Außerdem ist eine ungefähre Abschätzung der Streuwirkung in unseren Apparaten möglich, wenn man das Verhältnis  $\eta = (N_{\text{III}}^0 - N_{\text{IV}}^0)/N_{\text{IV}}^0$  für verschiedene Bleifilter betrachtet. Diese Messungen wurden in Rom und Pian Rosà für 0, 5, 10, 20 und 35 cm Blei ausgeführt. Es wurde beobachtet, daß das Verhältnis  $\eta$  sich von 0 bis 10 cm bedeutend vergrößerte (ungefähr verdoppelte), von da ab aber beinahe konstant blieb. Auf Pian Rosà, wo die gefundenen Änderungen die größten waren (was verständlich ist, wenn man bedenkt, daß dort das Mesonenspektrum reicher an langsamen Mesonen ist), änderte sich das Verhältnis  $\eta$  von 6,5 bis auf etwa 8%, wenn das Bleifilter von 5 bis 35 cm variiert wurde. Da die Ausbeute der Koinzidenzanordnung mindestens 99% beträgt und die zufälligen Koinzidenzen nur 2% der systematischen ausmachen, ist es vernünftig, den ziemlich hohen Wert von  $\eta$  der Mesonenstreuung zuzuschreiben. Da jedoch bei unseren Messungen zwischen den Zählern *B* und *C* immer mindestens 5 cm Blei vorhanden waren, ist anzunehmen, daß der Zusatz von Kompensationsblei *S* keine größeren Fehler verursachte.

3. Vom theoretischen Standpunkt können wir erwähnen, daß die Streuung der Mesonen, die mittels der Formel von Williams<sup>1)</sup> für unseren Apparat berechnet wurde, unsere Intensitätsmessungen um höchstens 2% beeinflussen kann. Hierzu ist zu bemerken, daß die Williamsche Formel verschiedene experimentelle Bestätigungen erfahren hat. Also kann man schließen, daß es gleichgültig ist, ob das Kompensationsmaterial im Zählrohrteleskop oben oder unten angebracht ist.

Außerdem wäre es wünschenswert gewesen, ein Kompensationsmaterial zu benutzen, das dem Atomgewicht der Luft näherkommt. Aber wir waren der Meinung, daß man auch mit Blei einen richtigen Vergleich bekommt. Das Kompensationsblei war in der Tat nach den Wickschen Berechnungen abgeschätzt worden, und diese Berechnungen, die auf Grund der anerkannten Betheschen Formel<sup>2)</sup> mit Berücksichtigung des Fermischen Effektes<sup>3)</sup> ausgeführt wurden, stimmen mit den experimentellen Resultaten von Pomerantz<sup>4)</sup> überein.

Andererseits kann man die Korrekturen ermitteln, die wir an unseren Messungen anbringen mußten, um dem Fehler in der Dicke des Kompen-

<sup>1)</sup> E. T. Williams, Proc. Roy. Soc. London (A) 169, 531, 1939. —

<sup>2)</sup> H. Bethe, Handb. d. Phys. XXIV<sub>1</sub>, S. 523. — <sup>3)</sup> E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485, 1940. — <sup>4)</sup> M. A. Pomerantz, ebenda 57, 3, 1940.

sationsbleis Rechnung zu tragen. Für den Vergleich zwischen Rom und Pian Rosà ist dieser Fehler (von etwa 3,5 cm Blei) ziemlich klein und kann vernachlässigt werden, weil in diesem Fall die Ableitung der Absorptionskurve in Pian Rosà für eine so kleine Bleischicht sich nur um etwa 4% ändert. Denn das Verhältnis zwischen den Ableitungen der in Pian Rosà und in Rom aufgenommenen Absorptionskurven ist ungefähr 40%, woraus folgt, daß die entsprechende Abschätzung des  $\tau/\mu c^2$ -Wertes höchstens um 10% negativ fehlerhaft sein kann.

Dagegen ist bei dem Vergleich zwischen Cervinia und Pian Rosà der Unterschied der Ableitungen der zwei Absorptionskurven kleiner und deswegen der Fehler verhältnismäßig größer. Da der

Unterschied der Ableitungen ungefähr 20 bis 25% ist, können wir diesen Fehler grob auf ungefähr 20% schätzen.

Es ist bemerkenswert, daß mit dieser Korrektur der dritte und vierte Wert von  $\tau/\mu c^2$  in der Tabelle 7 viel besser mit den Ergebnissen der anderen Messungen übereinstimmen.

*Die Integralbestimmung von  $\tau/\mu c^2$ .* Die Integralabschätzung von  $\tau/\mu c^2$  aus den Absorptionskurven ist vielleicht die beste, über die man bis heute verfügt. Diese Abschätzung beruht nämlich auf einer Reihe von Experimenten, die grundsätzlich einfach und zuverlässig sind. Tatsächlich können unsere Messungen durch Vergleich mit den Ergebnissen von verschiedenen anderen Forschern überprüft werden, da die Absorption durch Zerfall die Absorptionskurve in Luft oder in Blei beeinflusst, und zwar nicht nur hinsichtlich der Intensitätsverhältnisse, sondern auch bezüglich ihres besonderen Verlaufs (s. z. B. Fig. 4 und 5). Nun stimmen unsere Ergebnisse

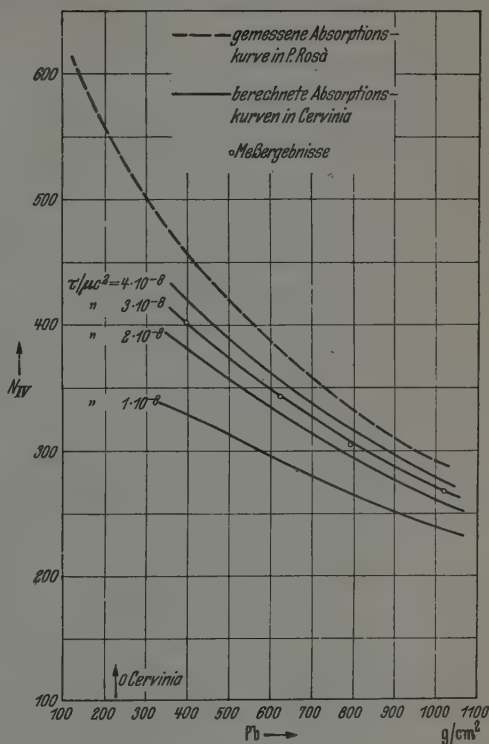


Fig. 4.

nicht nur mit den Versuchen von Rossi und Mitarbeitern vollständig überein, sondern auch mit jenen von Sittkus<sup>1)</sup>, Cocconi und Tongiorgi<sup>2)</sup>, Bernardini und Cacciapuoti<sup>3)</sup>, Rossi<sup>4)</sup>, Clay und van

Gemert<sup>5)</sup> usw. In Fig. 2 sind diese verschiedenen Resultate zum Teil dargestellt.

Aus alldem ersieht man, daß die Differential- und die Integralmessungen vorzüglich untereinander übereinstimmen, und daß der Wert von  $\tau/\mu c^2$  stets in der Nähe von  $3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV liegt.

*Diskussion und Kritik der früheren Messungen.* Die uns gegenwärtig bekannten Untersuchungen<sup>6)</sup>, die man am besten den unseren gegenüberstellen kann, sind die schon

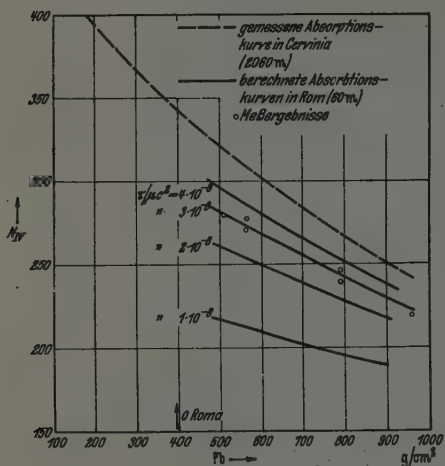


Fig. 5.

mehrmals genannten von Rossi und Hall, sowie jene von Nielser und Mitarbeitern. Die ersteren kann man, wie schon bemerkt, am direktesten mit unseren Messungen vergleichen, weil viele der experimentellen Einzelheiten unserer Apparatur mit denjenigen bei Rossi und Hall übereinstimmen.

Diese Verfasser haben bei einem Höhenunterschied von 1624 m (gleich 147 g/cm²) die anomale Absorption für den Mesonenbereich, dessen Reichweite 196 bis 811 g/cm² umfaßt, gemessen und dabei einen Wert von  $\tau/\mu c^2 = 3 \cdot 10^{-8}$  erhalten, der in sehr zufriedenstellender Übereinstimmung mit unserem mittleren Werte ist. Bemerkenswert ist nur, daß der Vergleich zwischen den differentialen Messungen und den integralen Effekten nach den Ergebnissen dieser Forscher nicht besonders befriedigend ist. Wir haben nämlich aus diesen Ergebnissen für die Mesonen, deren minimale Reichweite 196 g/cm² ist, einen Wert von  $\tau/\mu c^2 = 4 \cdot 10^{-8}$  abgeleitet, der merklich verschieden ist von demjenigen, welchen man für die Mesonen

<sup>1)</sup> H. Sittkus, ZS. f. Phys. 108, 421, 1938. — <sup>2)</sup> G. Cocconi u. V. Tongiorgi, Ric. Scient. XIII, 21, 1942. — <sup>3)</sup> G. Bernardini u. B. N. Cacciapuoti, Ric. Scient. XII, 981, 1941. — <sup>4)</sup> B. Rossi, ZS. f. Phys. 82, 151, 1933. — <sup>5)</sup> J. Clay u. A. van Gemert, Physica 6, 649, 1939. — <sup>6)</sup> Während dieses Jahres ist uns leider nur ein kleiner Teil der Veröffentlichungen bekannt geworden.

findet, deren minimale Reichweite  $311 \text{ g/cm}^2$  ist. Im zweiten Fall erhält man genau  $2,9 \cdot 10^{-8}$  in vollkommener Übereinstimmung mit dem Differentialwert.

Man kann aber entnehmen, daß Rossi und Hall in ihren Messungen keinerlei Korrekturen vorgenommen haben, obwohl uns scheint, daß ihre Apparatur dieselben Fehlerquellen aufweist wie die unsere. Z. B. ist besonders wichtig, daß der Nulleffekt der Rossischen Registrierung, d. h. das Verhältnis zwischen den Antikoinzidenzen und den fünffachen Koinzidenzen mit der Höhe ansteigt, wie es bei unserer Apparatur für das Verhältnis  $\eta = (N_{\text{III}}^0 - N_{\text{IV}}^0)/N_{\text{IV}}^0$  der Fall ist.

Das Experiment von Nielsen und Mitarbeitern ist dagegen nach einer etwas stärker verschiedenen Methode ausgeführt worden, und die Ergebnisse dieser Forscher sind sehr abweichend von den unseren.

Nielsen und Mitarbeiter finden nämlich aus ihren Absorptionskurven in M. Mitchell (2040 m) (unter einer Graphitschicht von  $200 \text{ g/cm}^2$ ) und in Durham (125 m) für den Differentialwert des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$ :  $(1,25 \pm 0,3) \cdot 10^{-8}$ . Es ist nicht leicht, die Anordnung von Nielsen und Mitarbeitern zu kritisieren, aber im ganzen sind die Versuchsergebnisse zum Teil schwer zu verstehen. Vor allem ist [wie schon Nordheim<sup>1)</sup> in einer nachfolgenden Arbeit hervorhebt] in M. Mitchell unter der Kompensations-Graphitschicht eine Elektronenkomponente vorhanden, deren Intensität mit einem so geringen Wert von  $\tau/\mu c^2$  absolut unvereinbar ist. In der Tat mußte in 2000 m Höhe schon fast die Gesamtheit der in Luft vorhandenen Elektronenkomponente durch den spontanen Zerfall der Mesonen entstanden sein und daher unter der Graphitschicht fast verschwinden. Statt dessen finden Nielsen und Mitarbeiter eine weiche Komponente, deren Intensität prozentual höher ist als die in Durham beobachtete.

Es ist auch bemerkenswert, daß ein ähnliches Ergebnis von Bernardini, Wick und Mitarbeitern<sup>2)</sup> in Cervinia unter einer aus Erde bestehenden Schicht von etwa  $170 \text{ g/cm}^2$  gefunden wurde. Diese Elektronenkomponente, deren Ursprung nicht vollkommen klar ist, wurde vielleicht zum Teil von Schauern erzeugt.

Eine weitere Schwierigkeit für den von Nielsen und Mitarbeitern gegebenen Wert liegt darin, daß mit einer so kurzen Lebensdauer die Absorptionskurve der Mesonenkomponente im Meeresniveau (besonders für große Zenitwinkel) einen ganz anderen Verlauf aufweisen müßte, als von

<sup>1)</sup> L. W. Nordheim, Phys. Rev. 59, 554, 1941. — <sup>2)</sup> G. Bernardini, B. N. Cacciapuoti, O. Piccioni, B. Ferretti u. G. C. Wick, Phys. Rev. 58, 1017, 1940.

Clay und Van Gemert <sup>1)</sup> und Cocconi <sup>2)</sup> festgestellt wurde (man vergleiche auch die Kurven der Fig. 5). Diese Schwierigkeit könnte man überwinden, indem man annimmt, daß Mesonen in beträchtlicher Menge in der untersten Schicht der Atmosphäre erzeugt werden; aber bis jetzt hat man hierfür keinen Anhaltspunkt.

Endlich bemerkt man auch bei den Messungen von Nielsen und Mitarbeitern eine beträchtliche Divergenz zwischen dem Differentialwerte von  $\tau/\mu c^2$  und demjenigen, welchen man aus den Integraleffekten ableiten kann. Die Verfasser selbst haben diesen Vergleich nicht gemacht; aber auf Grund der von ihnen angegebenen Daten ist er leicht durchzuführen. Man findet für die Mesonen, deren Reichweite mindestens 15,2 cm Blei ist,  $\tau/\mu c^2 = 1,85 \cdot 10^{-8}$ , in mäßiger Übereinstimmung mit dem Differentialwert; dagegen findet man für die Mesonen, deren Reichweite mindestens 35 cm Blei ist,  $\tau/\mu c^2 = 2,95 \cdot 10^{-8}$ . Dies läßt daran denken, daß die Neigung der Kurve in M. Mitchell vielleicht zu groß ist; dies würde den zu niedrigen Wert von  $\tau/\mu c^2$  erklären, der auf Grund des differentialen Verminderungsverhältnisses gefunden wurde.

*Kontrollversuche und Schlußbemerkungen.* a) Außer den von Rossi und Hall, sowie von Nielsen und Mitarbeitern gemachten Experimenten, die in den vorigen Abschnitten mit den unseren verglichen wurden, gibt es bekanntlich eine ganze Reihe von anderen Bestimmungen des Verhältnisses  $\tau/\mu c^2$ . Die dabei erhaltenen Werte weichen viel mehr voneinander ab, als man aus den Versuchsfehlern, die von den verschiedenen Autoren angegeben werden, erwarten würde. In der Tat schwanken die Werte von  $\tau/\mu c^2$  zwischen  $10^{-7}$  und  $5 \cdot 10^{-9}$  sec/MeV, während die angegebenen Versuchsfehler im allgemeinen von der Größenordnung 20 bis 30 % sind. Dieser Umstand hat den Verdacht erweckt [s. z. B. Weisz <sup>3)</sup>], daß die Natur der Mesonenkomponente noch ziemlich wenig bekannt ist, und daß die Abweichungen zwischen den verschiedenen Werten von  $\tau/\mu c^2$  vielleicht daher rühren, daß die bisherigen Annahmen über die anomale Absorption der Mesonen allzu einfach sind <sup>4)</sup>. Dieser Verdacht wird durch folgende Um-

<sup>1)</sup> J. Clay u. V. Gemert, *Physica* 6, 649, 1939. — <sup>2)</sup> G. Cocconi, *Ric. Scient.* XI, 58, 1940. — <sup>3)</sup> P. Weisz, *Phys. Rev.* 59, 931, 1941. —

<sup>4)</sup> Wie wir sahen, würden auch die Werte von  $\tau/\mu c^2$ , die wir aus der Differentialmethode gewonnen haben, ziemlich stark voneinander abweichen, wenn wir die zahlreichen vorgenommenen Korrekturen vernachlässigt hätten. Aus diesem Grunde haben wir in einer früheren kurzen Mitteilung (G. Bernardini, B. N. Cacciapuoti, E. Pancini, O. Piccioni u. G. C. Wick, *Phys. Rev.* 60, 1941) die Meinung ausgesprochen, daß vielleicht der Ursprung des Unterschiedes zwischen den in Rom und in Pian Rosà gefundenen Werten in einem neuen Problem über die Natur der Mesonenkomponente zu suchen wäre.



stände bestärkt: 1. Sehr genaue Messungen [wie die von Johnson<sup>1)</sup>, Pomerantz<sup>2)</sup> usw.], die im Meeresniveau durch Vergleich der Intensität der Mesonen in der Zenitrichtung und in einer geeigneten Richtung ausgeführt wurden, geben im allgemeinen Werte von  $\tau/\mu c^2$ , die gleich oder größer als  $3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV sind. 2. Einige Versuche<sup>3)</sup> über die Zerfallelektronen geben im allgemeinen, abgesehen von der schwierigen Auslegung der Ergebnisse, einen Wert von  $\tau/\mu c^2$  größer als  $3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV<sup>1)</sup>. Die neuen Versuche von Schein und Mitarbeitern<sup>4)</sup> sind anscheinend sehr schwierig zu deuten, wenn man das Vorhandensein eines einzigen Mesons von ungefähr  $3 \mu\text{sec}$  Lebensdauer annimmt. 4. Von den seltenen Aufnahmen in der Wilson-Kammer zeigen nur zwei [Williams<sup>5)</sup>] mit Sicherheit das Zerfallelektron des Mesons.

Deswegen haben wir einige Kontrollversuche angefangen, um festzustellen, ob der Wert von  $\tau/\mu c^2$ , der aus der anomalen Absorption mit den gewöhnlichen Annahmen gewonnen wurde, der einzige ist und ob er nahe bei  $3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV

liegt. Diese Kontrollversuche, die von Cacciapuoti, Conversi, Festa, Pancini, Piccioni, Santangelo und Scrocco ausgeführt werden, bestehen in folgendem: 1. Ein Experiment über die anomale

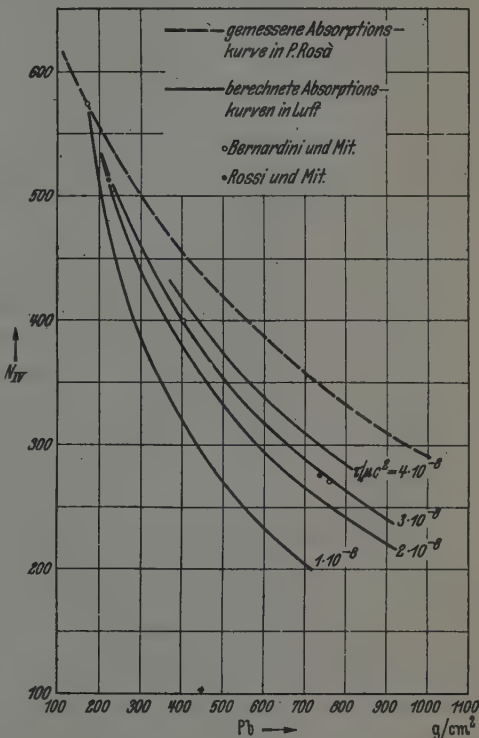


Fig. 6.

<sup>1)</sup> T. H. Johnson u. M. A. Pomerantz, Phys. Rev. **55**, 104, 1939. —

<sup>2)</sup> M. A. Pomerantz, Phys. Rev. **57**, 2, 1940. — <sup>3)</sup> T. Alexeewa, C. R. Ac. S. URSS. **26**, 28, 1940; B. Siebert, ZS. f. Phys. **118**, 217, 941. —

<sup>4)</sup> M. Schein, M. Jesse u. E. O. Wollan, Phys. Rev. **64**, 615, 1941. —

<sup>5)</sup> E. J. Williams, Nature **145**, 102, 1940.



Absorption zwischen Rom und Monte Cavo (960 m) in der Zenitrichtung, mit dem Kompensationsmaterial einmal oben und einmal zwischen den Zählern des Teleskops. 2. Eine Messung des Absorptionskoeffizienten der Mesonen kleiner Energie im Meeresniveau unter einer dicken Materialschicht (Ziegelstein) von 2 m Wasser-Äquivalent. 3. Eine Abschätzung des Prozentsatzes der weichen Mesonen, die in verschiedenen Höhen über dem Meere und unter einer Schicht von 2 m Wasser-Äquivalent vorhanden sind, nach der Magnetmethode von Bernardini, Wick und Mitarbeitern<sup>1)</sup>. 4. Eine Messung der anomalen Absorption zwischen 5500 und 7000 m Höhe (mittels Flugzeug).

Während der letzte dieser Versuche noch im Gange ist, sind die Messungen der erstgenannten Art schon beendet. Die Diskussion der Versuchsergebnisse und die Kontrolle der Apparate sind aber noch nicht abgeschlossen. Trotzdem kann man schon den Schluß ziehen, daß alle drei Versuche im Meeresniveau einen Wert von  $\tau/\mu c^2 \geq 3 \cdot 10^{-8}$  sec/MeV ergeben. Der Versuch zwischen Rom und M. Cavo gibt sogar für das Verhältnis  $\tau/\mu c^2$  einen Wert von etwa  $4 \cdot 10^{-8}$ ; aber infolge des geringen Höhenunterschiedes ist der statistische Fehler so groß, daß ein Wert von  $3 \cdot 10^{-8}$  (als untere Grenze) nicht auszuschließen ist.

Auf diese Weise erhält man auch eine weitere Bestätigung dafür, daß der Versuch von Nielsen und Mitarbeitern einen zu niedrigen Wert von  $\tau/\mu c^2$  gibt.

b) Zusammenfassend läßt sich sagen: Unter den Annahmen, daß 1. die harte Komponente aus einer einzigen Art von instabilen Teilchen besteht; 2. diese Teilchen nicht in merklichem Maße unterhalb 4000 m erzeugt werden; 3. der Zerfall der Mesonen unter Entstehung eines Elektrons und eines Neutrinos stattfindet, ergeben die hier beschriebenen und diskutierten Versuche einen Mittelwert von  $\tau/\mu c^2 = 3 \cdot 10^{-8}$  zwischen 4000 m und dem Meeresniveau.

Direkte Messungen über die Zerfallszeit  $\tau$  des Mesons wurden kürzlich von Rasetti<sup>2)</sup>, sowie von Maze und Chaminade<sup>3)</sup> ausgeführt. Diese Forscher geben einen  $\tau$ -Wert von etwa  $1,5 \cdot 10^{-6}$  sec. Mit diesem und unseren Ergebnissen wäre man gezwungen, einen Wert von  $\mu$  anzunehmen, der für die Kernkräfte zu klein ist.

*Bologna, Istituto Fisico della R. Università.*

<sup>1)</sup> G. Bernardini, G. C. Wick, M. Conversi, E. Pancini, Ric. Scient. XII, 1011, 1941. — <sup>2)</sup> F. Rasetti, Phys. Rev. 59, 613, 1941. — <sup>3)</sup> R. Maze u. H. Chaminade, C. R. 214, 266, 1942.

## Zur Methodik der Neutronensonden \*).

Von W. Bothe in Heidelberg.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Die Fehler, die bei vergleichenden Messungen von Neutronendichten und Neutronenströmen mittels Sonden auftreten können, werden quantitativ diskutiert. Messungen mit Dy-Sonden in Paraffin und Aluminium sind im Einklang mit den Rechnungen. Die im gegebenen Falle anzubringenden Korrekturen lassen sich danach berechnen.

*Einleitung.* Für Relativmessungen der Neutronendichte und des Neutronenstromes benutzt man Sonden (radioaktive Sonden,  $\text{BCl}_3$ -Kammern, Borzählrohre u. ä.). Die Form dieser Sonden ist belanglos, wenn die Messung immer im selben Mittel bei gleicher Richtungs- und Energieverteilung der Neutronen vorgenommen wird. Andernfalls sind jedoch an den Bau der Sonde bestimmte Anforderungen zu stellen, die bisher noch nicht explizit formuliert wurden; oft fehlen in der Literatur überhaupt genauere Angaben über die benutzten Sonden. Im folgenden sollen die bei Neutronensonden möglichen Fehler abgeschätzt werden, so daß man Korrekturen dafür berechnen kann. Die Überlegungen werden dann durch einige Versuche geprüft.

1. *Allgemeines über Dichtesonden.* Bei Sonden, die die räumliche Neutronendichte messen sollen, können auf zweierlei Weise Fehler entstehen. Erstens kann das Meßergebnis außer von der Dichte noch von der Richtungs- und Energieverteilung der Neutronen an der Meßstelle abhängen. Zweitens kann durch die Sonde das auszumessende Neutronenfeld zu stark gestört werden. Es wird sich zeigen, daß der erste Fehler von der Dicke und dem Material der Sonde abhängt, während für den zweiten Fehler außerdem auch die anderen Abmessungen und das umgebende Mittel mitbestimmend sind.

Wir rechnen vorläufig mit einer einheitlichen, konstanten Neutronengeschwindigkeit  $v$ . Als Maß für die Empfindlichkeit der Sonde betrachten wir die Neutronenzahl  $A$ , die in einem bestimmten Neutronenfeld in der Zeiteinheit in der Sonde absorbiert wird, und die kurz als „Aktivierung“ bezeichnet werden möge.

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

2. *Die Richtungsabhängigkeit.* Das Neutronenfeld wird beschrieben durch die Strahlungsintensität  $K$ ;  $K d\Omega$  ist die Zahl der Neutronen, die innerhalb des kleinen Raumwinkels  $d\Omega$  die Flächeneinheit einer senkrecht zu  $d\Omega$  liegenden Fläche in der Zeiteinheit durchsetzen.  $K$  hängt im allgemeinen von der Richtung von  $d\Omega$  ab. Dann ist die Dichte

$$\varrho = \frac{1}{v} \int K d\Omega. \quad (1)$$

Die Richtungsunabhängigkeit einer Sonde ist daher sicher gewährleistet, wenn sie auf eine *gerichtete* Neutronenstrahlung richtungsunabhängig anspricht. Dies wäre der Fall für eine Sonde, die in *allen* Richtungen die auffallenden Neutronen nur sehr schwach absorbiert, denn die Aktivierung wäre dann, unabhängig von der Form und Orientierung der Sonde, ihrem Volumen proportional. Praktisch benutzt man jedoch aus Gründen der Empfindlichkeit verhältnismäßig große scheibenförmige Sonden. Eine große Scheibe von der Dicke  $\delta$  und dem Absorptionskoeffizienten  $\mu$  absorbiert nun aus einem breiten, gerichteten Neutronenbündel von der Intensität  $K$  und dem kleinen Öffnungswinkel  $d\Omega$  je  $\text{cm}^2$  und sec den Betrag

$$dA = K |\cos \vartheta| \left( 1 - e^{-\frac{\mu \delta}{|\cos \vartheta|}} \right) d\Omega, \quad (2)$$

wo  $\vartheta$  der Einfallswinkel ist. Auch dieser Ausdruck ist unabhängig von  $\vartheta$ , solange  $\mu \delta / |\cos \vartheta| \ll 1$  ist. Diese Bedingung ist aber bei streifendem Einfall niemals erfüllt, auch wenn die Sonde sehr dünn ist; sie zeigt dann zu wenig an. Natürlich kann man diesen Fehler bei streng gerichteter Neutronenstrahlung leicht vermeiden. Es entsteht aber die Frage, wie der Fehler sich in einem stärker diffusen Neutronenfeld auswirkt, wo stets streifende Strahlen vorhanden sind. Dies hängt offenbar davon ab, in welcher Weise der Ausdruck (2) mit  $\vartheta \rightarrow \pi/2$  gegen Null geht.

Im diffusen Neutronenfeld wird die Absorption in der Sonde durch das Integral von (2) gegeben, wobei  $K$  eine Funktion der Richtungskordinaten ist. Ohne wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß  $K$  symmetrisch um eine „Verteilungsachse“ ist.  $K$  hänge also nur von dem Winkel  $\omega$  gegen diese Achse ab. Dann lassen sich sofort Verteilungen angeben, für die  $A$  in jedem Falle streng unabhängig von der Orientierung der Sonde ist, nämlich

$$K(\omega) = K_0 + F_{\text{unger.}}(\cos \omega), \quad (3)$$

wo  $K_0 = \text{const}$  und  $F_{\text{unger.}}$  eine ungerade Funktion von  $\cos \omega$  ist. In diesen Fällen liefert nämlich das Glied  $F$  weder zu  $A$  noch zur Neutronendichte  $\varrho$

einen Beitrag, weil es sich für je zwei entgegengesetzte Neutronenrichtungen in der Wirkung aufhebt. Es wird

$$\varrho = \frac{1}{v} \int K_0 d\Omega = 4\pi \frac{K_0}{v}, \quad (4)$$

$$A = 2 \cdot 2\pi K_0 \int_0^1 \cos \vartheta \left(1 - e^{-\frac{\mu \delta}{\cos \vartheta}}\right) d \cos \vartheta,$$

$$A = \frac{1}{2} v \varrho \{1 - e^{-\mu \delta} (1 - \mu \delta) + \mu^2 \delta^2 Ei(-\mu \delta)\}. \quad (5)$$

Für eine dünne Sonde ( $\mu \delta \ll 1$ ) wird

$$A = 4\pi K_0 \mu \delta = v \mu \delta \varrho. \quad (6)$$

Der Fall (3) liegt z. B. tief im Innern eines streuenden, aber nur schwach absorbierenden Mittels vor, denn hier ist  $K(\omega) = K_0 + K_1 \cos \omega^1$ .

Um nun in abweichenden Fällen den Fehler, der durch die Richtungsabhängigkeit der Sonde entsteht, abzuschätzen, werde der einfache Fall diskutiert:

$$K(\omega) = K_m \cos^2 \omega. \quad (7)$$

Damit wird die Neutronendichte

$$\varrho = \frac{K_m}{v} \int \cos^2 \omega d\Omega = \frac{4\pi}{3} \frac{K_m}{v}, \quad (8)$$

und die Absorption in der Sonde, wenn deren Normale um den Winkel  $\psi$  gegen die Verteilungsachse geneigt ist, und  $\vartheta, \varphi$  Polarkoordinaten um die Sondennormale sind,

$$A = 2 K_m \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d \cos \vartheta \cdot \cos^2 \omega \left(1 - e^{-\frac{\mu \delta}{\cos \vartheta}}\right) \cos \vartheta.$$

Mit  $\cos \omega = \cos \psi \cos \vartheta - \sin \psi \sin \vartheta \cos \varphi$  ergibt die Ausrechnung

$$A = \frac{\pi}{2} K_m (2 \cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \{1 - e^{-\mu \delta} (1 - \frac{1}{3} \mu \delta + \frac{1}{6} \mu^2 \delta^2 - \frac{1}{6} \mu^3 \delta^3) + \frac{1}{6} \mu^4 \delta^4 Ei(-\mu \delta)\} + \pi K_m \sin^2 \psi \{1 - e^{-\mu \delta} (1 - \mu \delta) + \mu^2 \delta^2 Ei(-\mu \delta)\}. \quad (9)$$

Die Aktivierung  $A$  hängt also in der Tat vom Orientierungswinkel  $\psi$  ab, sie wird am größten für  $\psi = 0$ , am kleinsten für  $\psi = \pi/2$ . Nur für kleine Dicke ( $\mu \delta \ll 1$ ) wird  $A$  unabhängig von  $\psi$ :

$$A = \frac{4\pi}{3} K_m \mu \delta$$

oder nach (8)

$$A = v \mu \delta \varrho \quad (10)$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. W. Bothe, ZS. f. Phys. 118, 401, 1941.

wie im isotropen Falle [Gleichung (6)]. In der Tat läßt sich ebenso leicht zeigen, daß die Beziehung (10) allgemein für beliebige stetige Richtungsverteilungen gilt, wenn  $\mu\delta$  genügend klein ist. Vergleicht man also die Neutronendichten an Stellen mit verschiedener Richtungsverteilung, so ist die Messung praktisch fehlerfrei, wenn die Sonde genügend dünn ist; auf ihre Orientierung kommt es dann nicht an.

Die Größe der Richtungsfehler wegen der endlichen Dicke der Sonde ergibt sich aus Tabelle 1. Hier ist in den Spalten 2 bis 4 die Größe  $A/v\mu\delta\rho$  aufgeführt für folgende drei Fälle: Richtungsverteilung nach (3) (oder isotrop),  $\cos^2$ -Verteilung bei der Orientierung  $\psi = 0$  und  $\cos^2$ -Verteilung bei  $\psi = \pi/2$  [nach Gleichungen (5), (8) und (9)]. Man sieht, daß bei einer Sonde, die nur 2% der senkrecht auffallenden Neutronen absorbiert, schon Fehler bis + 4,0% bzw. - 1,7% gegenüber dem isotropen Felde auftreten können. Bei 20% Absorption sind die Fehler + 17 bzw. - 9%. Im allgemeinen werden allerdings die Fehler kleiner sein, da so stark von (3) abweichende Neutronenfelder wie (7) nicht häufig vorkommen. Z. B. ist nach Fermi<sup>1)</sup> an der freien Oberfläche eines streuenden Mittels  $K = 1 + \sqrt{3} \cos \omega$  für  $\omega < \pi/2$  und  $K = 0$  für  $\omega > \pi/2$ . Hiermit berechnet man entsprechend wie oben die letzten beiden Spalten der Tabelle 1. Die Fehler für eine Sonde von 20% senkrechter Absorption sind jetzt nicht größer als im Falle der  $\cos^2$ -Verteilung für eine Sonde von 2% Absorption.

Tabelle 1. Relativwerte von  $A/\rho\delta$  für scheibenförmige Sonden bei verschiedenen Richtungsverteilungen.

$\mu\delta$	Verteilung (3)	Verteilung (7)		Fermische Randverteilung	
		$\psi = 0$	$\psi = \frac{\pi}{2}$	$\psi = 0$	$\psi = \frac{\pi}{2}$
0	1	1	1	1	1
0,02	0,950	0,988	0,934	—	—
0,05	0,902	0,963	0,871	—	—
0,10	0,838	0,930	0,791	—	—
0,20	0,740	0,867	0,676	0,770	0,729

Meßtechnisch ist noch zu bemerken, daß bei der Messung der Aktivierung  $A$  mit Zählrohr oder Ionisationskammer die Selbstabsorption der Sondenstrahlung im Sondenmaterial eingehen kann ( $\beta$ -Strahlen bei radioaktiven Sonden,  $\alpha$ -Strahlen bei Borsonden). Die auf einer Seite austretende Sondenstrahlung ist dann nicht ohne weiteres proportional  $A$ , wenn bei wechselnder Richtungsverteilung die Sonde nicht homogen durchaktiviert

<sup>1)</sup> E. Fermi, Ric. Scient. 1, 460, 1936.



wird. Hieraus kann bei Vergleichsmessungen in anisotropen Feldern ein gewisser Fehler entstehen, den man aber nach Fermi einfach dadurch eliminieren kann, daß man beide Seiten der Sonde mißt und das Mittel bildet<sup>1)</sup>. Dieses Verfahren setzt nur voraus, daß der Verlauf der Neutronendichte in der Sonde gewisse Bedingungen erfüllt, was aber durch die oben berechnete Beschränkung der Dicke im allgemeinen schon gewährleistet ist. Bei kammerförmigen Sonden, die allseitig mit einer dünnen Schicht des Sondenmaterials ausgekleidet oder mit gasförmigem Sondenmaterial gefüllt sind, korrigiert sich die Selbstabsorption von selbst.

3. *Die Energieabhängigkeit.* Sollen Neutronendichten bei verschiedenem Energiespektrum verglichen werden, so folgt für sehr dünne Sonden aus der allgemeinen Beziehung (10) sofort die Bedingung, daß  $\mu$  proportional  $v^{-1}$  sein muß. Diese Bedingung wird auch noch hinreichend sein für so große Dicken, wie sie wegen der Richtungsunabhängigkeit zugelassen sind (für größere Dicken würde schon die Filterung der Neutronen in der Sonde einen Fehler verursachen). Die Bedingung ist im Gebiet thermischer Neutronen für sehr viele Sondenmaterialien erfüllt ( $v^{-1}$ -Sonden), nicht aber für einige besonders empfindliche. So hat z. B. das häufig benutzte Dysprosium wahrscheinlich eine Resonanzstelle bei einer kleinen negativen Energie und befolgt daher nicht streng das  $v^{-1}$ -Gesetz. Messungen mit solchen Sonden können etwas fehlerhaft sein, wenn z. B. eine Stelle mit thermischer Energieverteilung verglichen wird mit einer anderen, wo durch Filtereffekte oder dergleichen die thermische Verteilung gestört ist. Diese Verhältnisse müssen von Fall zu Fall diskutiert werden.

4. *Feldstörungen durch die Sonde; Allgemeines.* Da die Sonde notwendig Neutronen absorbiert, stört sie mehr oder weniger die Dichteverteilung in dem auszumessenden Neutronenfelde. Dies kann sich in verschiedener Weise auswirken, je nach den Eigenschaften des umgebenden Mittels und der Sonde. Ausschlaggebend ist dabei, ob dasselbe Neutron auf seinem Zickzackwege die Sonde mehrmals durchsetzen kann, so daß die Sonde „sich selbst im Schatten steht“. Es mögen zwei Grenzfälle betrachtet werden.

Erster Fall. Beispiel: Resonanzsonde in einem stark bremsenden Mittel. Die Sonde spricht nur auf ein enges Energiegebiet an. Nachdem ein Neutron dieses Energiegebietes die Sonde durchsetzt hat, muß es, um zum zweiten Male auf die Sonde zu treffen, im umgebenden Mittel gestreut werden. Hierbei verliert es aber im allgemeinen so viel Energie, daß es aus dem Resonanzgebiet austritt, also die Sonde nicht mehr aktivieren kann.

<sup>1)</sup> E. Fermi, a. a. O.



Die Dichtestörungen treten nur unterhalb des Resonanzgebietes auf, sie können die Messung also nicht fälschen. Die Bedingung hierfür ist, daß die Resonanzbreite klein gegen den mittleren Energieverlust bei einer Streuung im umgebenden Mittel ist. Dies sollte z. B. nach Fermi der Fall sein für Rhodiumsonden in Paraffin. Auch zwei gleichzeitig exponierte Sonden können sich in diesem Falle nicht stören, sofern sie nur schwach absorbieren, oder ihre Entfernung groß gegen die Streuweglänge, oder ihr gegenseitiger Raumwinkel klein ist.

Zweiter Fall. Beispiel: Resonanzsonde mit breitem Resonanzgebiet in einem schwach bremsenden Mittel, oder  $v^{-1}$ -Sonde für thermische Neutronen. Ein Neutron, welches die Sonde zu aktivieren vermag, behält diese Fähigkeit auch nach vielen Durchgängen und Rückstreuungen auf die Sonde. In diesem Falle reißt die Sonde ein mehr oder weniger tiefes Loch in die zu messende Neutronenverteilung. Daraus können folgende Meßfehler entspringen:

a) Die Sonde zeigt nicht genau die örtliche Neutronendichte an, sondern mittelt zum Teil über eine gewisse Umgebung.

b) Zwei gleichzeitig exponierte Sonden beeinflussen sich, indem sie sich gegenseitig Neutronen wegfangen.

c) Bei Vergleichsmessungen in verschiedenen Mitteln sind die Löcher verschieden tief, die Sonde zeigt daher nicht dichte proportional an.

Um diese Störungen abzuschätzen, kann man summarisch so rechnen, daß ein in die Sonde eintretendes Neutron mit der Wahrscheinlichkeit  $1 - \alpha$  wieder in beliebiger Richtung austritt.  $\alpha$  ist die mittlere Absorptionswahrscheinlichkeit für ein in beliebiger Richtung auf die Sonde treffendes Neutron. Für eine scheibenförmige Sonde in einem isotropen Felde ist z. B. nach (4) die Zahl der je Zeit- und Flächeneinheit auftreffenden Neutronen

$$\int K_0 |\cos \vartheta| d\Omega = 2\pi K_0 = \frac{1}{2} v \varrho,$$

also nach (5)

$$\alpha = \frac{2A}{v\varrho} = 1 - e^{-\mu\delta} (1 - \mu\delta) + \mu^2 \delta^2 Ei(-\mu\delta) \quad (11)$$

(vgl. Fig. 2). Für eine dünne Sonde wird dies einfach

$$\alpha = 2\mu\delta, \quad (12)$$

d. h. die mittlere Absorption ist gerade doppelt so groß wie die in senkrechter Richtung. Für die folgenden Überlegungen soll jedoch der Einfachheit halber die Sonde als kugelförmig vom Radius  $R$  angenommen werden. Sie sei in ein unendlich ausgedehntes, schwach absorbierendes Mittel von der

Streuweglänge  $\lambda_s$  und der Diffusionslänge<sup>1)</sup>  $l = \sqrt{\frac{1}{3} \lambda_a \lambda_s}$  eingebettet ( $\lambda_a =$  Absorptionsweglänge). In dem Mittel seien Neutronenquellen gleichmäßig verteilt, damit ohne die Sonde eine homogene Neutronendichte  $\varrho_0$  herrscht. Wir betrachten die beiden einfachen Grenzfälle:  $R \gg \lambda_s$  und  $R \ll \lambda_s$ .

5. *Feldstörungen bei thermischen Neutronen; erster Grenzfall:  $R \gg \lambda_s$ .*  
In diesem Falle kann man mit der Fermischen Diffusionsgleichung rechnen<sup>2)</sup>

$$l^2 \Delta \varrho - \varrho + \varrho_0 = 0$$

und erhält als Lösung für die Dichteverteilung in der Umgebung der Sonde, wenn  $r$  den Abstand von der Sondenmitte bezeichnet,

$$\varrho = \varrho_0 - \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{l}}; \quad \frac{d\varrho}{dr} = \frac{a}{r} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{l} \right) e^{-\frac{r}{l}}. \quad (13)$$

Die Konstante  $a$  ist zu bestimmen; sie hängt von der Sondenabsorption  $\alpha$  ab. Allgemein gilt für die Strahlungsintensität  $K$  in einem schwach absorbierenden Mittel<sup>3)</sup>

$$K = \frac{v}{4\pi} \left( \varrho - \lambda_s \frac{d\varrho}{dr} \cos \vartheta \right),$$

wo jetzt  $\vartheta$  der Winkel gegen den Radius ist. Die auf die Oberfläche der Sonde zugerichtete Dichte des Neutronenstromes ist daher

$$i_+ = 2\pi \int_{-1}^0 K_R |\cos \vartheta| d \cos \vartheta = \frac{v}{4} \left[ \varrho_R + \frac{2}{3} \lambda_s \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_R \right]. \quad (14)$$

Entsprechend ist die von der Oberfläche fortgerichtete Stromdichte

$$i_- = \frac{v}{4} \left[ \varrho_R - \frac{2}{3} \lambda_s \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_R \right].$$

Die „Albedo“ ist daher

$$1 - \alpha = \frac{i_-}{i_+} = \frac{\varrho_R - \frac{2}{3} \lambda_s \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_R}{\varrho_R + \frac{2}{3} \lambda_s \left( \frac{d\varrho}{dr} \right)_R}.$$

Setzt man  $\varrho_R$  und  $(d\varrho/dr)_R$  aus (13) ein und löst nach  $a$  auf, so wird

$$a = \frac{\frac{3}{2} \alpha \frac{R}{\lambda_s}}{\frac{3}{2} \alpha \frac{R}{\lambda_s} + (2 - \alpha) \left( 1 + \frac{R}{l} \right)} e^{\frac{R}{l}} R \varrho_0. \quad (15)$$

<sup>1)</sup> E. Fermi, a. a. O.; E. Amaldi, Phys. ZS. 38, 692, 1937. —

<sup>2)</sup> E. Amaldi, a. a. O., Gleichung (34). — <sup>3)</sup> W. Bothe, a. a. O.

(13) und (15) geben jetzt den Dichteverlauf um die Sonde herum, insbesondere die relative Tiefe des Loches ( $1 - \varrho_R/\varrho_0$ ) und dessen mittlere Ausdehnung, die maßgebend dafür sind, in welchem Grade die Sonde über ihre Umgebung mittelt, und wie stark sie eine benachbarte Sonde stört (Fehler a und b, Ziff. 4). Schließlich kann man noch den Faktor  $f$  berechnen, um den infolge der Sondenabsorption die Zahl der auf die Sonde treffenden Neutronen herabgesetzt wird. Bei fehlender Sondenabsorption ( $\alpha = 0$ ) wäre dieser Strom nach (14):  $i_{+0} = v\varrho_0/4$ , daher nach (13), (14) und (15)

$$f = \frac{i_{+}}{i_{+0}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \alpha \frac{R}{\lambda_s} \frac{l}{R+l} - \frac{\alpha}{2}} \quad (16)$$

Für nicht absorbierende Mittel ( $l \gg R \gg \lambda_s$ ) wird einfach

$$f = \frac{1}{1 + \frac{3}{4} \alpha \frac{R}{\lambda_s}} \quad (17)$$

Andererseits ist für eine sehr große scheibenförmige Sonde  $R \gg \lambda_s$  und  $l$  zu setzen, dann wird nach (16)

$$f = \frac{1}{1 + \alpha \left( \frac{3}{4} \frac{l}{\lambda_s} - \frac{1}{2} \right)} \quad (18)$$

mit dem Wert (11) für  $\alpha$ .

Um den Faktor  $f$  mißt also die Sonde zu wenig. Bei Vergleichsmessungen in zwei verschiedenen Mitteln stellt der Unterschied der beiden Faktoren  $f$  den Meßfehler dar (Fehler c, Ziff. 4). Als Vergleichsmittel wird bei solchen Messungen häufig  $\text{H}_2\text{O}$  benutzt. In diesem ist die Streuweglänge besonders klein:  $\lambda_s = 0,3$  cm, also um eine Größenordnung kleiner als in den meisten anderen Mitteln. Hier ist also auf diesen Fehler besonders zu achten. Der Fehler kann sich auch in einem und demselben Mittel schon bemerkbar machen, wenn die Messungen sich bis in die Nähe der Grenze gegen ein anderes Mittel erstrecken.

Diese Berechnung gilt strenggenommen nur für kugelförmige Sonden. Für Sonden in Form einer Kreisscheibe, wie sie praktisch häufig verwendet werden, wäre die entsprechende Rechnung sehr verwickelt. Man kann jedoch erwarten, daß in ausreichender Näherung dieselben Formeln gelten, wenn man für den Radius  $R$  einen Mittelwert einsetzt, den man, da eine

von den drei Ausdehnungen fortfällt, auf zwei Drittel des Kreisradius  $R_k$  schätzen kann. Damit gehen die Gleichungen (16), (17) und (18) über in

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{R_k}{\lambda_s} \frac{3l}{2R_k + 3l} - 1 \right)} \quad \text{allgemein,} \quad (19)$$

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2} \frac{R_k}{\lambda_s}} \quad \text{für nicht absorbierende Mittel,} \quad (20)$$

$$f = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{3}{2} \frac{l}{\lambda_s} - 1 \right)} \quad \text{für sehr große Sonden.} \quad (21)$$

Hierin ist  $\alpha$  nach Gleichung (11) zu berechnen. Die weiter unten (Ziff. 8) beschriebenen Versuche bestätigen die allgemeine Formel (19). Damit kann für jede kreisförmige Sonde, deren Radius einigermaßen groß gegen die Streuweglänge des Mittels ist, der Sondenfehler mit genügender Genauigkeit berechnet werden.

6. *Feldstörungen bei thermischen Neutronen; zweiter Grenzfall: Kugelradius  $R \ll$  Streuweglänge  $\lambda_s$ .* Hier ist die gewöhnliche Diffusionsgleichung in der Nähe der Sonde nicht mehr anwendbar<sup>1)</sup>.

Am einfachsten untersucht man die Bahnen einzelner Neutronen. In Fig. 1 bezeichnet der geknickte Pfeil die Bahn eines Neutrons, welches nach Durchlaufen der Sonde durch einen elastischen Stoß auf diese zurückgestreut wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist klein, sie werde mit  $\gamma$  bezeichnet. Durch die Schattenwirkung der Sonde besteht die Wahrscheinlichkeit  $\alpha$ , daß dieses Neutron am zweiten Eintritt verhindert wird. Dadurch wird der Zustrom zur Sonde um den Bruchteil  $\alpha\gamma$  herabgesetzt. Die Sondenabsorption  $\alpha$  sei bekannt,  $\gamma$  ist zu berechnen. Dabei wird sich zeigen, daß für genügend kleine  $R$  die in Betracht kommenden Streuprozesse durchschnittlich in einer Entfernung  $\ll \lambda_s$  erfolgen. Daher können mehr als zweifache Durchgänge durch die Sonde, mehrfache Streuung und, von Extremfällen abgesehen, auch Absorptionsprozesse im umgebenden Mittel

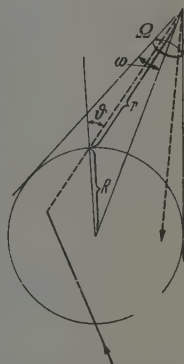


Fig. 1. Selbstbesetzung einer kleinen Kugelsonde.

<sup>1)</sup> W. Bothe, ZS. f. Phys. 119, 493, 1942.

außer Betracht bleiben. Unter der Annahme isotroper Streuung berechnet man nach Fig. 1

$$\begin{aligned}\gamma &= \int_0^{\infty} \frac{dr}{\lambda_s} e^{-\frac{r}{\lambda_s}} \int_0^1 d \cos \vartheta \cdot \frac{\Omega}{4\pi} \cos \vartheta / \int_0^1 d \cos \vartheta \cdot \cos \vartheta \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dr}{\lambda_s} \int_0^1 d \cos \vartheta \cdot (1 - \cos \omega) \cos \vartheta,\end{aligned}$$

oder mit den neuen Variablen  $r/R = x$ ;  $\cos \vartheta = y$ :

$$\gamma = \frac{R}{\lambda_s} \int_0^{\infty} dx \int_0^1 dy \cdot y \left(1 - \sqrt{\frac{x^2 + 2xy}{x^2 + 2xy + 1}}\right) = 0,34 \frac{R}{\lambda_s}.$$

Dies entspricht einem mittleren  $x$  von 3,4, d. h. die Entfernungen  $r$ , in denen die in Betracht kommenden Streuprozesse erfolgen, sind von derselben Größenordnung wie der Sondenradius  $R$ , also in der Tat  $\ll \lambda_s$ , wie oben vorausgesetzt.

Der Faktor  $f$ , um den die Kugelsonde zu wenig anzeigt, kann jetzt so geschrieben werden:

$$f = \frac{1}{1 + \alpha \gamma} = \frac{1}{1 + 0,34 \alpha R / \lambda_s}. \quad (22)$$

Für eine Scheibensonde vom Radius  $R_k$  wird man, wie in Ziff. 5,  $R$  durch  $2/3 R_k$  ersetzen können:

$$f = \frac{1}{1 + 0,23 \alpha R_k / \lambda_s}, \quad (23)$$

worin  $\alpha$  wieder durch (11) gegeben ist. Man sieht, daß für eine Sonde, die klein gegen die Streuweglänge ist, der Fehler selbst dann klein bleibt, wenn die Sonde alle auftreffenden Neutronen absorbiert. Im übrigen unterscheidet sich der Ausdruck (23) für kleine Sonden von dem entsprechenden Ausdruck (20) für große Sonden nur in dem etwas verschiedenen Zahlenfaktor.

7. Stromsonden. Der Verfasser hat gelegentlich auch Sonden benutzt, um die Dichte des Neutronenstromes durch eine Fläche im Innern eines streuenden Mittels zu messen. Hierzu hat man die von beiden Seiten her auf die Fläche treffenden Neutronen getrennt zu messen und die Differenz zu bilden. Die scheibenförmige Sonde wird dazu auf ihrer Rückseite mit einer vollständig absorbierenden Schicht bedeckt (z. B. Cd bei thermischen Neutronen). Weiter ist zu verlangen, daß die von der Vorderseite absorbierte Neutronenzahl proportional  $K \cos \vartheta$  ist (nicht proportional  $K$  wie bei der Dichte-

sonde), denn die Stromdichte ist  $\int K \cos \vartheta \, d\Omega$ . Dies wird nach Gleichung (2) erreicht, indem man die Schichtdicke  $\delta$  der Sonde groß wählt:  $\mu\delta \gg 1$ . Schließlich muß noch trotz der großen Dicke die Selbstabsorption der Sondenstrahlung klein bleiben. Diese letztere Forderung macht etwas Schwierigkeit. So absorbiert z. B. eine Dysprosiumsonde von der Sättigungsdicke der Dy- $\beta$ -Strahlen noch immer nicht die thermischen Neutronen stark genug, um proportional  $K \cos \vartheta$  anzuzeigen. Doch kann man berechnen, daß die dadurch entstehenden Fehler nicht groß werden, solange die Neutronen an der Meßstelle nicht allzu anisotrop sind. Für genauere Strommessungen kann man die Neutronenabsorption erhöhen, indem man dem Dysprosium das viel stärker absorbierende (aber nicht aktivierbare) Gadolinium beimengt. Dadurch wird allerdings die Empfindlichkeit herabgesetzt.

Eine solche Stromsonde ist geschwindigkeitsunabhängig in dem Bereich, wo sie den obigen Forderungen genügt.

Im übrigen gelten für die Fehler, die wegen der endlichen Ausdehnung der Sonde entstehen, dieselben Überlegungen wie für Dichtesonden, nur daß notwendig  $\alpha = 1$  ist. Um also alle Fehler sicher zu vermeiden, muß man den mittleren Radius klein gegen die Streuweglänge wählen.

8. *Messungen.* Praktisch sind wohl am wichtigsten die Fehler, die dadurch entstehen, daß eine zu messende Neutronendichte durch die Absorptionswirkung der Sonde gesenkt wird. Um die hierfür in Ziff. 5 und 6 entwickelten Formeln zu prüfen, wurden einige Messungen mit kreisförmigen  $Dy_2O_3$ -Sonden gemacht. Es wurden Sonden von  $R_k = 0,7$  und  $1,4$  cm Radius und verschiedenen Dicken  $\delta$  benutzt. Das abgewogene Dysprosiumoxyd bildete eine möglichst homogene Schicht auf einer Unterlage von  $0,5$  mm Aluminium. Als thermische Neutronenquelle diente  $Ra + Be$  in Paraffin. Auf der einen Seite der Quelle lag ein großer Paraffinblock, in den die Sonde in gut definierter Stellung dicht eingepackt werden konnte. Auf der anderen Seite konnte die Sonde ebenso in einen von Paraffin umgebenen Aluminiumblock gesteckt werden, so daß sie allseitig mit mindestens  $10$  cm Al bedeckt war. Im allgemeinen wurden je zwei möglichst gleichartige Sonden an den beiden Stellen gleichzeitig exponiert und am Zählrohr gemessen, worauf die Messung mit vertauschten Sonden wiederholt wurde.

In Aluminium ist die Streuweglänge  $\lambda_s$  groß, nämlich rund  $10$  cm, so daß für die benutzten Sonden der Fehler verschwindend klein, also  $f = 1$  zu erwarten war. Dagegen sollten im Paraffin mit  $\lambda_s = 0,25$  cm die Fehler beträchtlich, also  $f$  deutlich  $< 1$  werden.

Die Zählrohrempfindlichkeit wurde ständig mit einem  $\beta$ -Normal kontrolliert und die gemessenen Dy-Aktivitäten auf Normalempfindlichkeit



und Sättigungsaktivierung umgerechnet. Fig. 2 zeigt die gemessene Dickenabhängigkeit der Aktivität. Um den Verlauf der Kurven besser vergleichen zu können, wurden die Ordinatenmaßstäbe so gewählt, daß die Werte für die kleinste benutzte Dicke zusammenfallen. Man sieht, daß im Paraffin mit wachsender Dicke die Kurve für die großen Sonden immer weiter hinter der

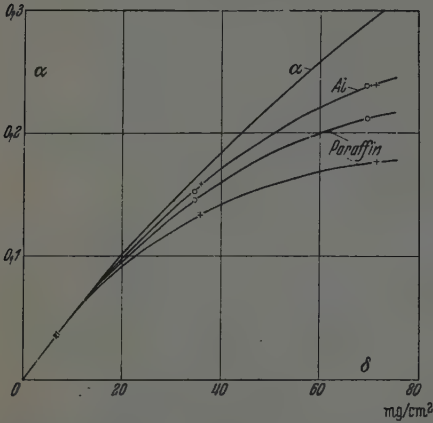


Fig. 2. Dickenabhängigkeit der Aktivität von scheibenförmigen  $Dy-O_2$ -Sonden in Aluminium und Paraffin.  $\circ$  Sondenradius 0,7 cm; + Sondenradius 1,4 cm.  $\alpha$  = mittlere Sondenabsorption nach (11).

für die kleinen Sonden zurückbleibt. Dies bedeutet, daß mit wachsender Schichtdicke der Sondenfehler für die großen Sonden schneller zunimmt als für die kleinen, wie nach Gleichung (19) zu erwarten ist. Dagegen fallen in Aluminium die beiden Kurven für kleine und große Sonden vollständig zusammen und liegen über den Paraffinkurven. Dies beweist, daß in Al der Sondenfehler praktisch verschwindet und  $f = 1$  ist, wie man ebenfalls nach (23) erwartet. Weiter ist in Fig. 2 die nach (11) berechnete mittlere

Sondenabsorption  $\alpha$  eingetragen ( $\mu = 2,8 \text{ cm}^2/\text{g}$ ). Man würde zunächst erwarten, daß diese Kurve mit der Aktivitätskurve in Al zusammenfällt.

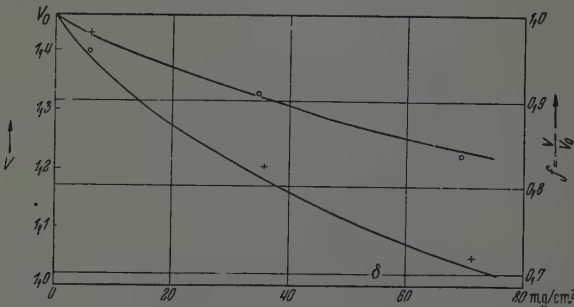


Fig. 3.  $\circ$  gemessene  $f$  für Sondenradius 0,7 cm; + gemessene  $f$  für Sondenradius 1,4 cm; Kurven berechnet nach (19).

Daß dies nicht der Fall ist, beruht auf der Selbstabsorption der  $Dy-\beta$ -Strahlen in der Sonde, die naturgemäß mit wachsender Dicke immer wirksamer wird. Für das vorliegende Problem ist das belanglos.

Für eine quantitative Prüfung der Formel (19) kann man also Aluminium als fehlerfreie Bezugssubstanz ansehen. Es bezeichne  $V_0$  das wirkliche Verhältnis der Neutronendichten an den beiden Meßstellen im Paraffin und Al,  $V$  das gemessene Verhältnis der Aktivitäten für eine bestimmte Sonde. Dann sollte  $V = V_0 f$  sein, wo  $f$  nach (19) für Paraffin zu berechnen ist ( $\lambda_s = 0,25$  cm;  $l = 2,0$  cm). Fig. 3 zeigt die gemessenen und die berechneten Werte von  $V$ . Es besteht Übereinstimmung innerhalb der Meßgenauigkeit.

Nach Fig. 3 kann leicht für jede vorgelegte Dy-Sonde der Sondenfehler in Paraffin und die dafür anzubringende Korrektur abgeschätzt werden (rechter Ordinatenmaßstab). Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß der Sondenfehler keineswegs allein durch die Gesamtmasse der Sonde bestimmt ist; er ist um so größer, je kleiner die Fläche ist, auf die diese Masse verteilt ist.

### *Zusammenfassung.*

Bei vergleichenden Messungen der Neutronendichte mit Sonden können folgende Fehler auftreten:

1. Abhängigkeit von der Orientierung der Sonde. Diese ist für einige Fälle berechnet worden. Sie verschwindet für genügend dünne Sonden (Ziff. 2).

2. Abhängigkeit von der Neutronenenergie. Diese verschwindet für genügend dünne  $v^{-1}$ -Sonden (Ziff. 3).

3. Abhängigkeit von den Eigenschaften des Mittels (Ziff. 4). Diese wurde insbesondere für den Fall thermischer Neutronen berechnet (Ziff. 5 und 6). Die Ergebnisse für scheibenförmige Sonden werden durch die Gleichungen (19), (20), (21), (23) und (11) dargestellt und durch Messungen bestätigt (Ziff. 8). Der Fehler hängt sowohl von der Dicke als auch der Ausdehnung der Sonde ab; bei gegebener Masse der Sonde wächst er mit der Flächendichte.

4. Um einen Neutronenstrom unabhängig von der Richtungsverteilung zu messen, muß die Sonde alle auftreffenden Neutronen absorbieren. Dabei soll der Absorptionskoeffizient der Neutronen möglichst größer sein als der der Sondenstrahlung in dem Sondenmaterial. Für Vergleichsmessungen in verschiedenen Mitteln muß ferner die Ausdehnung der Sonde klein gegen die Streuweglänge sein (Ziff. 7).

Heidelberg, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für mediz. Forschung, 30. Juli 1942.

## Die Aufteilungsverhältnisse und Energietönungen bei der Uranspaltung \*)<sup>1)</sup>.

Von A. Flammersfeld, P. Jensen und W. Gentner.

Mit 12 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Mit einer Doppelionisationskammer, zwei unabhängigen Linearverstärkern und zwei Schleifenzillographen werden die Energien von zusammengehörenden Uranbruchstücken gemessen, die unter der Einwirkung langsamer Neutronen aus einer dünnen Uranschicht gleichzeitig nach beiden Seiten austreten. Aus der Häufigkeitsverteilung der auftretenden Energiewertepaare können erheblich weiter reichende Schlüsse auf den Spaltungsvorgang gezogen werden als aus den bisher nur bekannten Verteilungen der Einzel- und Gesamtenergien. Die Ergebnisse (vgl. die Zusammenfassung am Schluß der Arbeit) sind im wesentlichen mit den chemischen Befunden und mit den theoretischen Vorstellungen von Bohr und Wheeler im Einklang.

1. *Ziel der Versuche.* Seit der Entdeckung der Kernspaltung durch Hahn und Strassmann sind die Spaltprodukte des Urans nach physikalischen und chemischen Methoden eingehend untersucht worden. Die physikalischen Untersuchungen ergaben u. a. bisher folgendes<sup>2)</sup>: Bei der Bestrahlung des Urans mit Neutronen<sup>3)</sup> treten zwei Gruppen von sehr stark ionisierenden Teilchen auf, deren Reichweiten in Luft rund  $1\frac{1}{2}$  und 2 cm betragen<sup>4-6)</sup> [aus Nebelkammeraufnahmen<sup>7)</sup> <sup>8)</sup> ergeben sich Reichweiten bis zu rund 3 cm]. Die Häufigkeitsverteilung der kinetischen Energien dieser Teilchen hat dementsprechend zwei Maxima; für diese beiden häufigsten Energien werden von verschiedenen Autoren<sup>4)</sup> <sup>6)</sup> <sup>9)</sup> <sup>10)</sup> Werte zwischen 50 und 65 e-MV bzw. zwischen 74 und 98 e-MV angegeben. Die Werte für die Höchstenergien der beiden Gruppen liegen zwischen 70 und 80 bzw. 100 und 110 e-MV<sup>6)</sup> <sup>9)</sup> <sup>10)</sup>. Die Häufigkeitsverteilung der gesamten kinetischen Energie, die zwei zusammengehörenden Bruchstücken erteilt wird, ist von Kanner und Barschall<sup>10)</sup> gemessen worden. Sie finden als

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> Die hier beschriebenen Versuche waren im September 1940 abgeschlossen.  
— <sup>2)</sup> Vgl. auch den zusammenfassenden Bericht von L. A. Turner, *Rev. Mod. Phys.* **12**, 1, 1940. — <sup>3)</sup> Über die abweichenden Ergebnisse mit sehr schnellen Neutronen s. K. Lark-Horovitz u. R. E. Schreiber, *Phys. Rev.* **60**, 156, 1941. — <sup>4)</sup> O. Haxel, *ZS. f. Phys.* **112**, 681, 1939. — <sup>5)</sup> E. T. Booth, J. R. Dunning, G. N. Glasoe, *Phys. Rev.* **55**, 982, 1939. — <sup>6)</sup> W. Jentschke, F. Prankl, *Phys. ZS.* **40**, 706, 1939. — <sup>7)</sup> D. R. Corson, R. L. Thornton, *Phys. Rev.* **55**, 509, 1939. — <sup>8)</sup> J. K. Bøggild, K. J. Brostrøm, T. Lauritsen, ebenda **59**, 275, 1941. — <sup>9)</sup> E. T. Booth, J. R. Dunning, F. G. Slack, ebenda **55**, 981, 1939. — <sup>10)</sup> M. H. Kanner, H. H. Barschall, ebenda **57**, 372, 1940.

häufigsten Wert dieser Energie 159 e-MV, und der größte Wert liegt in der Nähe von 200 e-MV. Alle drei Energiegruppen sind viel zu breit, als daß sie als ursprünglich homogene, aber experimentell verwaschene Gruppen angesehen werden könnten.

Diese Ergebnisse sind im Einklang mit den theoretischen Untersuchungen von Flügge und v. Droste<sup>1)</sup> sowie von Bohr und Wheeler<sup>2)</sup>, nach denen die gesamte Energie, die bei der Teilung des Urankerns in zwei Stücke frei werden kann, höchstens etwa 200 e-MV beträgt. Sie sind ferner im Einklang mit dem chemischen Befund, daß es verschiedene Möglichkeiten für die Aufteilung des Urankerns geben muß. Aber sie lassen noch keine bestimmten Aussagen darüber zu, wie die Energien der Einzelteilchen einander zuzuordnen sind, ferner, mit welcher relativen Häufigkeit bestimmte Massen auftreten, und wie die Gesamtenergie von dem Massenaufspaltungsverhältnis abhängt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist nun, auf Grund einer weitergehenden physikalischen Analyse der Spaltprodukte diese und ähnliche Fragen zu beantworten. Als Idealziel war an eine physikalische Analyse der Spaltprodukte gedacht, die der chemischen Analyse an die Seite gestellt werden könnte. Dazu wurde eine dünne Uranschicht in einer Doppelsonisationskammer mit Neutronen bestrahlt. Die nach beiden Seiten austretenden Bruchstücke gaben ihre Energie in je einer Kammerhälfte ab und wurden zugleich, aber jedes für sich, registriert. Auf diese Weise wurden die kinetischen Energien  $E_1$  und  $E_2$  der bei derselben Spaltung entstehenden Trümmer gemessen. Damit war erstens die zugehörige Gesamtenergie  $E_1 + E_2$  gegeben. Da nach dem Impulssatz  $m_1 E_1 = m_2 E_2$  ist, wobei  $m_1, m_2$  die Massen der Bruchstücke sind, konnte weiter auch das Massenverhältnis sofort entnommen werden, und bei bekanntem  $m_1 + m_2$  auch die Massen der Einzelbruchstücke.

2. *Die Versuchsanordnung.* Die verwendete Doppelsonisationskammer ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Die Mittelelektrode, deren Durchmesser 10 cm betrug, enthielt im mittleren Teil die Uranfolie und wurde auf einer Spannung von 9 kV gehalten. Sie wurde von drei Hartgummiisolatoren getragen. Der Uranfolie gegenüber lagen beiderseits in einem Abstand von je 3 cm die isolierten Auffangelektroden für die abgeschiedenen Ionen; ihr Durchmesser betrug 12 cm, sie waren mit den Eingangsröhren der beiden Verstärker verbunden. Die drei Elektroden befanden sich in einem geerdeten, evakuierbaren Messinggefäß.

<sup>1)</sup> S. Flügge, G. v. Droste, ZS. f. phys. Chem. (B) **42**, 274, 1939. —

<sup>2)</sup> N. Bohr, J. A. Wheeler, Phys. Rev. **56**, 426, 1939.

Die Uranfolie wurde durch Bedampfen von Blattgold (Luftäquivalent 0,84 mm) im Hochvakuum unter Bewegung der Goldfolie hergestellt. Die Schichten hatten einheitliche Interferenzfarben, waren also homogen. Die Goldfolie wurde wegen ihrer geringen mechanischen Festigkeit zwischen zwei Lochscheiben eingelegt, Kupferscheiben von je 1 mm Dicke, in die

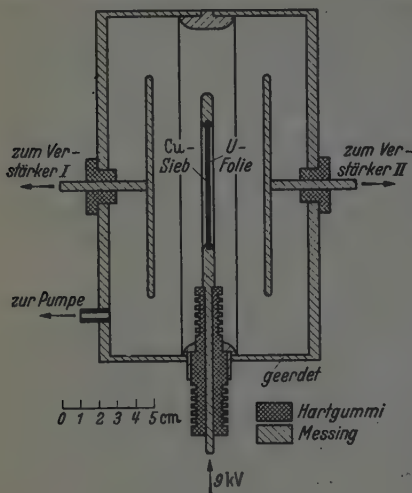


Fig. 1. Ionisationskammer.

innerhalb eines Kreises von 6 cm Durchmesser Löcher von 3 mm Durchmesser gebohrt waren. Die Löcher waren auf der einen Seite konisch erweitert. Das Goldblatt wurde auf die andere, glatte Seite bedampft und dann mit der zweiten Lochscheibe bedeckt, so daß bei den Spaltungsversuchen nur solche Teilchen in den Ionisationsraum eintreten konnten, die von freistehenden Teilen der Folie ausgingen. Die Dicke der Uranschicht wurde aus der Zahl der emittierten  $\alpha$ -Teilchen berechnet. Diese betrug, mit der Folie zwischen den

Lochscheiben, insgesamt 5,8/sec, was unter Berücksichtigung des Raumwinkels einer Urandicke von rund 0,1 mm Luftäquivalent entspricht. Die Kammer wurde mit sehr reinem Stickstoff (Osram-Lampenstickstoff) gefüllt, der Druck betrug 1 Atm. Die Teilchen konnten also in keiner Richtung die Begrenzung des Ionisationsraumes erreichen. Vor der Einfüllung des Gases wurde lange auf Hochvakuum gepumpt. Mit dieser Gasfüllung und der großen Feldstärke von 3 kV/cm war die Sättigung auch für die Urantrümmer mit ihren hohen Ionendichten wohl nahezu erreicht, wie nach Vorversuchen mit kleinerer Feldstärke angenommen werden kann.

Die verwendeten beiden Proportionalverstärker waren völlig gleich und hatten nur je zwei Stufen in Widerstandskopplung. Die Gitter der ersten Röhren waren direkt mit den Auffangelektroden verbunden, der Ableitwiderstand betrug  $10^8$  Ohm. Der Verstärkungsgrad reichte zur Registrierung auch der Uran- $\alpha$ -Teilchen aus, die zur Eichung benutzt wurden (vgl. Ziff. 3). Die verwendete Zeitkonstante von  $3 \cdot 10^{-3}$  sec in beiden Stufen war genügend groß gegenüber der Abscheidungszeit auch der positiven Ionen, und genügend klein, um zu erreichen, daß zwischen den einzelnen



$\alpha$ -Teilchen noch genügend Ruhelage des Verstärkers übrigblieb. So war die Wahrscheinlichkeit gering, daß ein Spaltungsteilchen mit einem  $\alpha$ -Teilchen koinzidierte.

Im Ausgang jedes Verstärkers befand sich ein Siemens-Schleifenoszillograph. Die Ausschläge beider Schleifen wurden auf einem einzigen Streifen photographischen Papiers von 6 cm Breite in der Weise registriert, daß der eine Oszillograph die Nulllinie rechts hatte und Ausschläge nach links gab, während der andere die Nulllinie links hatte und Ausschläge nach rechts gab. Die beiden Oszillographen waren etwas gegeneinander versetzt, so daß zwei zusammengehörige, gleichzeitig erfolgende Ausschläge auf dem Papier parallel in einem Abstand von etwa 1,5 mm verliefen. Auf diese

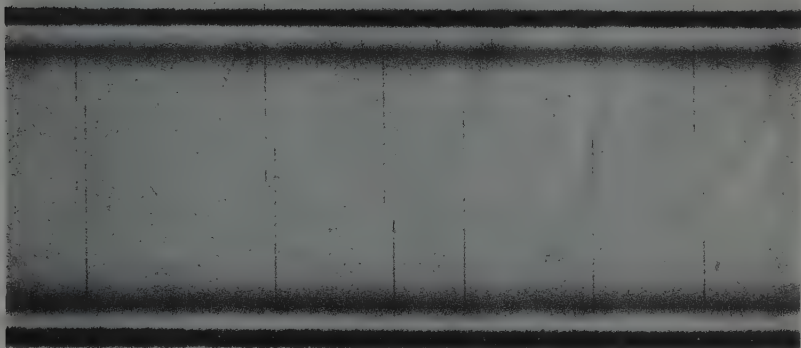


Fig. 2. Registrierstreifen.

Weise konnten Koinzidenzen daran erkannt werden, daß sie im richtigen Sinne aufeinander folgen und den genau bestimmbaren Abstand von rund 1,5 mm haben mußten. Fig. 2 zeigt einen Teil eines Registrierstreifens. Wie man sieht, kamen auch Einzelimpulse vor. Diese traten offenbar dann auf, wenn eines von zwei zusammengehörenden Bruchstücken an die Wand eines Kanals in dem Kupfersieb stieß, während das andere frei herausflog.

Als Neutronenquelle diente die Hochspannungsanlage des Instituts, in der Beryllium mit Deuteronen von 950 e-kV bestrahlt wurde. Die Deuteronenstromstärke im unaufgelösten Strahl war im Mittel  $35 \mu\text{A}$ . Die Kammer war allseitig mit 5 bis 10 cm Paraffin umgeben, so daß die Spaltungen vorwiegend durch langsame Neutronen hervorgerufen wurden. Unter diesen Bedingungen ergaben sich rund drei Koinzidenzen in der Minute. Elektrische Störungen, die zu scheinbaren Koinzidenzen hätten



führen können, traten nicht auf. Dies folgt daraus, daß die Zahl der Koinzidenzen auf etwa 1% herunterging, wenn bei laufender Anlage das Beryllium mit einem dicken Nickelblech abgedeckt wurde. Dieser Resteffekt rührte wohl von noch entstehenden Neutronen her (z. B. von  $D + D$ ).

3. *Die Messungen und ihre Auswertung.* Um die Konstanz der Verstärker zu überwachen, und um geringe Schwankungen des Verstärkungsgrades nachträglich rechnerisch ausgleichen zu können, wurden während der Messungen „künstliche“ Impulse mitregistriert. Sie wurden dadurch erzeugt, daß bekannte Spannungsstöße, deren Dauer klein gegen die Zeitkonstante der Verstärker war, über kleine Kapazitäten auf die Gitter der Eingangsrohren gegeben wurden. Hierzu wurde ein Hg-Vakuumschalter benutzt, der sehr saubere Kontakte gibt. Fig. 3 zeigt eine Gruppe solcher künstlichen

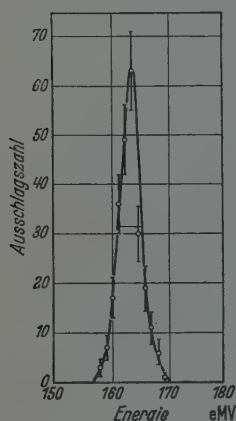


Fig. 3. „Homogene, künstliche Impulse, die während der Bestrahlung gegeben wurden. Die Streuung ist durch die Unruhe des Untergrundes bedingt.

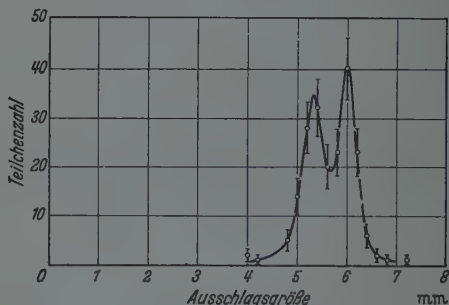


Fig. 4. Registrierung der  $\alpha$ -Teilchen aus der Uransicht.

Impulse, deren Größe einer in der Kammer absorbierten Energie von 164 e-MV entspricht. Sie wurden bei laufender Neutronenquelle gegeben und man sieht, daß die Streuung gering ist, trotz der Unruhe infolge von Kernprozessen und elastischen Stößen im Stickstoff. Die durch solche Effekte bedingte Halbwertsbreite dieser homogenen Gruppe beträgt etwa 4 e-MV (die Unruhe war viel größer, wenn statt der  $Be + D$ -Neutronen die von  $Li + D$  benutzt wurden, weil diese energiereicher sind).

Mit Hilfe der künstlichen Impulse wurde auch die Linearität der Verstärker geprüft. Bei großen Ausschlägen traten leichte Abweichungen auf, diese wurden bei der Auswertung berücksichtigt.

Zur Eichung der Apparatur wurden die von der Uranschicht ausgehenden  $\alpha$ -Teilchen benutzt. Die  $\alpha$ -Ausschläge wurden mit erhöhter Empfindlichkeit gemessen, indem ein Nebenschluß zur Oszillographenschleife entfernt wurde. Das Empfindlichkeitsverhältnis wurde mit Hilfe der künstlichen Impulse bestimmt. Die Auswertung der  $\alpha$ -Registrierung (Fig. 4) ergab Häufigkeitsmaxima bei den Ausschlagsgrößen 5,35 und 6,05 mm; das Verhältnis dieser Werte stimmt sehr gut mit dem der  $\alpha$ -Energien von U I und U II überein. Das Ergebnis dieser Eichung war, daß bei den Spaltungsversuchen pro Millimeter korrigierten Ausschlags 2,66 e-MV in der Kammer absorbiert wurden. Vorausgesetzt ist hierbei, daß der Energieverbrauch je Ionenpaar praktisch derselbe für die Spaltprodukte und die  $\alpha$ -Teilchen ist.

4. *Ergebnisse.* Insgesamt wurden 1750 Teilchenpaare registriert. Die korrigierten Ausschlagsgrößen wurden zunächst so aufgetragen wie Fig. 5 zeigt. Die Zahlen in den kleinen (nicht eingezeichneten) Quadraten mit der Seitenlänge  $\Delta E$  geben jeweils an, wieviele Paare beobachtet wurden, bei denen die *kleinere* Energie in dem Bereich  $E_1 \pm \frac{1}{2} \Delta E$  und die *größere* Energie in dem Bereich  $E_2 \pm \frac{1}{2} \Delta E$  lag<sup>1)</sup>. Zur leichteren Orientierung sind noch Hilfslinien eingezeichnet. Die von links unten nach rechts oben verlaufenden Geraden würden durch den Punkt  $E_1 = E_2 = 0$  gehen. Auf ihnen ist das Verhältnis  $E_1/E_2$  der Energien konstant und hat die links unten angeschriebenen Werte. Rechts oben stehen an denselben Linien die Massenzahlen  $m_2$  des leichten Bruchstücks, die man aus der Gleichung  $m_1 E_1 = m_2 E_2$  erhält, wenn man  $m_1 + m_2 = 236$  setzt. Auf den von links oben nach rechts unten laufenden Geraden ist die Summe  $E_1 + E_2$  konstant und hat die angeschriebenen Werte. Die geschlossenen Kurven verbinden die Punkte gleicher Häufigkeit, sie sind mit Hilfe der später zu erläuternden Fig. 9 und 10 gewonnen. Die Häufigkeit schreitet von einer Kurve zur nächsten um einen konstanten Betrag fort. Diese „Höhenlinien“ können noch nicht sehr genau festgelegt werden, jedoch ist eine gewisse Struktur des Kurvenbildes unverkennbar vorhanden. Die Kurve G wird in Ziff. 5 besprochen werden.

Aus Fig. 5 ist unmittelbar zu entnehmen, daß die Punkte einen flächenhaften Bereich von beträchtlicher Ausdehnung erfüllen. Es erscheint als ausgeschlossen, die Breite dieses Bereichs auf sekundäre Einflüsse wie

<sup>1)</sup> Bei dieser Darstellungsweise können jenseits der Geraden  $E_1 = E_2$  keine Punkte liegen. Wählte man als Koordinaten die in der rechten bzw. linken Kammer gemessenen Energien, so erhielte man außer dem Bereich der Fig. 5 noch den spiegelbildlich gleichen auf der anderen Seite der Geraden  $E_1 = E_2$  mit je der halben Punktzahl.

mangelnde Meßgenauigkeit oder Unruhe des Untergrundes zurückzuführen. Denn durch diese Einflüsse wird eine homogene (künstliche) Impulsgruppe auf eine Halbwertbreite von nur etwa 4 e-MV gebracht (Ziff. 3). Ebenso wenig kann die endliche Dicke der U + Au-Schicht verantwortlich gemacht

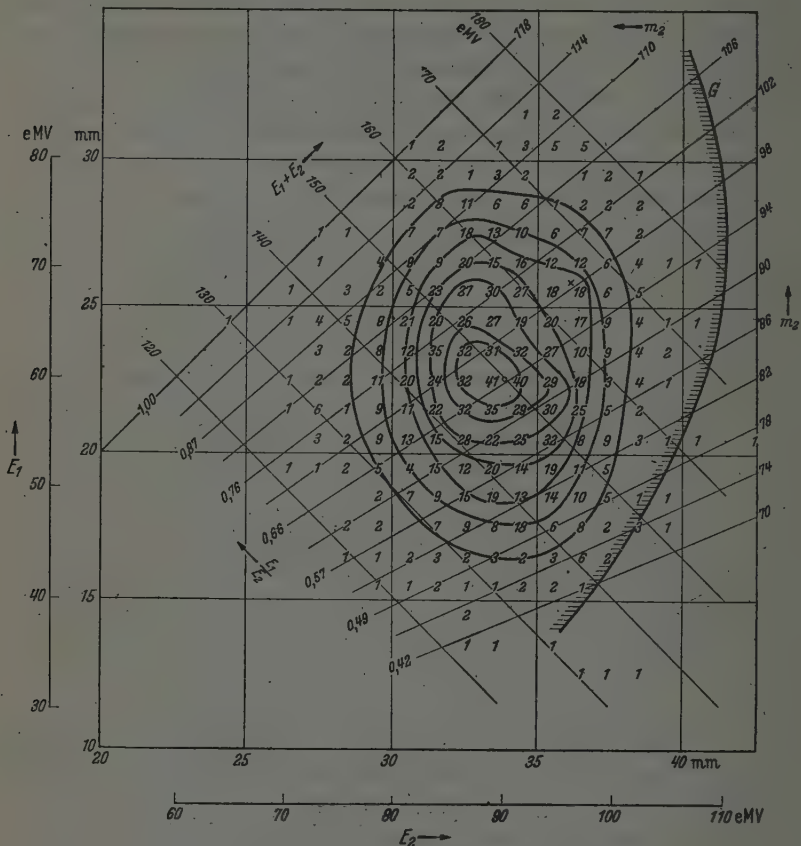


Fig. 5. Energieverteilung zusammengehöriger Urantrümmer.

werden. Auch die verschiedenen Laufzeiten der Ionen bei verschiedenen Strahlwinkeln können keinen Einfluß haben, da die Laufzeit jedenfalls wesentlich kleiner ist als die Zeitkonstante des Verstärkers. Ferner kann auch eine Verschiedenheit der Rekombination für Strahlen, die unter verschiedenen Winkeln gegen das elektrische Feld in der Kammer verlaufen, keine solche Verwaschung hervorrufen. Dies folgt aus Vorversuchen, die mit stärker kanalisierten Strahlen (größerer Lochtiefe) angestellt wurden,

und bei denen trotz eines erheblich kleineren Winkelbereichs die Breiten der Energiegruppen  $N(E_1)$  und  $N(E_2)$  praktisch dieselben waren wie in Fig. 11. Als weitere Ursache einer Verbreiterung sind die statistischen Schwankungen der Rekombination in Betracht zu ziehen. Diese reichen aber nach allgemeiner Erfahrung ebenfalls bei weitem nicht aus, die beobachtete Breite zu erklären. Endlich wäre noch daran zu denken, daß durch die zahlreichen elastischen Kernstöße, die die Trümmer in der Bremssubstanz ausführen<sup>1)</sup>, ein Teil ihrer kinetischen Energie aus dem Ionisationsraum heraustransportiert werden könnte, indem die gestoßenen Kerne aus der Kammer heraus oder an die Wände fliegen. Dieser Effekt konnte jedoch bei unserer Versuchsanordnung nicht auftreten, weil die gestoßenen Kerne ihrerseits nur eine sehr geringe Reichweite haben, wie die Nebelkammerbilder von Broström und Mitarbeiter zeigen<sup>1)</sup>. — Nach alledem ist also anzunehmen, daß unsere Messungen die Energieverteilung der Urantrümmer im wesentlichen unverfälscht wiedergeben. Daher kann man der Fig. 5 als erstes das folgende Ergebnis entnehmen: *Einem vorgegebenen Wert aus der einen Energiegruppe ist nicht ein bestimmter Wert aus der anderen Gruppe zugeordnet, sondern ein Energiespektrum von beträchtlicher Breite.*

Als zweites Ergebnis entnimmt man ebenfalls unmittelbar der Fig. 5: Aus der Lage der Punkte, insbesondere des Häufigkeitsmaximums bei  $E_1 = 60$ ,  $E_2 = 89$  e-MV, geht hervor, daß die kinetischen Energien und damit auch die Massen der zusammengehörenden Urantrümmer im allgemeinen erheblich verschieden sind. Dem Häufigkeitsmaximum entspricht ein Verhältnis von knapp 0,7.

Zu einer eingehenderen Diskussion sollen nun die Fig. 6 bis 12 betrachtet werden, die aus Fig. 5 bzw. aus einer ihr entsprechenden Darstellung mit noch feinerer Intervallaufteilung abgeleitet sind.

Fig. 6 zeigt die Häufigkeitsverteilung der verschiedenen Energie- bzw. Massenverhältnisse. Sie wurde aus Fig. 5 durch Aufsummieren der Zahlen zwischen je zwei Linien gleichen Energieverhältnisses gewonnen. Die Intervalle sind so gewählt, daß die Massenzahlen der Bruchstücke um je 4 Einheiten fortschreiten, und es wurde wieder  $m_1 + m_2 = 236$  gesetzt<sup>2)</sup>. Man kann also aus der Kurve von Fig. 6 ablesen, mit welcher relativen Häufigkeit die verschiedenen Teilchenmassen (ohne Rücksicht auf ihre Kernladung) bei der chemischen und radioaktiven Analyse der primären Spalt-

<sup>1)</sup> K. J. Broström, J. K. Bøggild, T. Lauritsen, Phys. Rev. 58, 651, 1940; 59, 275, 1941. — <sup>2)</sup> Streng genommen ist von 236 die Zahl der Spaltungsneutronen abzuziehen. Aber diese kleine und nicht sicher bekannte Korrektur soll hier vernachlässigt werden.

produkte auftreten sollten. Das Häufigkeitsmaximum liegt beim Massenverhältnis 96:140. Das von 1 am stärksten abweichende Verhältnis ist

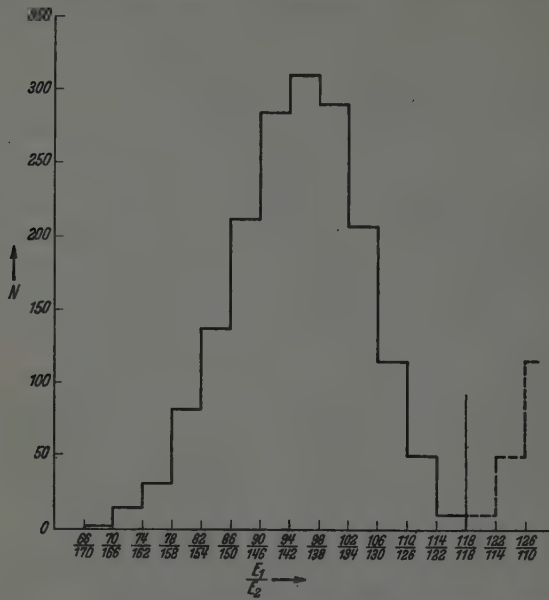


Fig. 6. Gesamtverteilung der Energieverhältnisse bzw. der relativen Massen  $m_2, m_1$ ; ( $E_1/E_2 = m_2/m_1$ ).

72:164. Das Massenverhältnis 118:118 tritt nur mit sehr geringer Häufigkeit auf, und selbst diese kann noch durch apparative Verwaschung vortäuscht sein. Gleiche Massen treten also bei der Spaltung des Urans durch langsame Neutronen praktisch nicht auf.

Von großem Interesse ist die Häufigkeitsverteilung der Massen für eine bestimmte Gesamtenergie  $E_1 + E_2$  und die Änderung dieser Ver-

Tabelle 1. Abhängigkeit des mittleren Massenverhältnisses von der Gesamtenergie.

$E_1 + E_2$ (e-MV)	$\overline{m_2} : \overline{m_1}$ (Massenzahlen)
125	89,0 : 147,0
135	90,2 : 145,8
145	93,2 : 142,8
155	97,3 : 138,7
165	99,6 : 136,4
175	103,2 : 132,8

Tabelle 2. Abhängigkeit der mittleren Gesamtenergie vom Massenverhältnis.

$m_2 : m_1$ (Massenzahlen)	$\overline{E_1 + E_2}$ (e-MV)
74:162	140,0
82:154	142,3
90:146	148,2
98:138	151,7
106:130	154,2
114:122	155,1

teilung mit der Gesamtenergie. Um dies zu untersuchen, wurden durch den Häufigkeitsberg in Fig. 5 Schnitte längs der Geraden  $E_1 + E_2 = 125, 135 \dots 175$  e-MV gelegt. Für jede Kurve der so erhaltenen Schar (Fig. 7) wurde die mittlere Masse  $\bar{m}_2$  (arithmetisches Mittel) ausgerechnet und eingezeichnet. Man erkennt nun, daß mit zunehmender Gesamtenergie  $\bar{m}_2$  sich in Richtung auf die Masse 118, das Massenverhältnis sich also auf 1 zu verschiebt; vgl. auch Tabelle 1. Dies hat zur Folge, daß mit zunehmender Gesamtenergie die Energie des schwereren Teilchens wesentlich rascher zu-

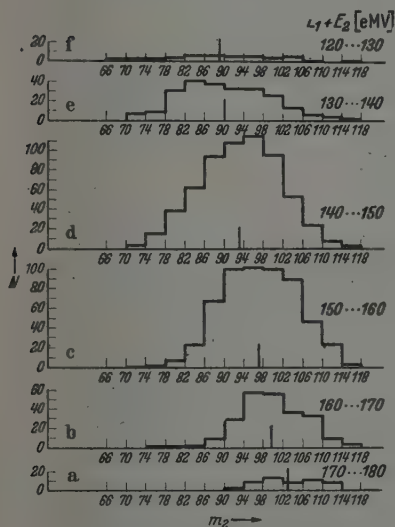


Fig. 7. Verteilung der relativen Massen  $m_2, m_1$  für verschiedene Bereiche der Gesamtenergie.

nimmt als die des leichteren, wie man aus Fig. 5 unmittelbar ablesen kann. Aber auch bei der höchsten beobachteten Gesamtenergie ist das mittlere Massenverhältnis immer noch deutlich von 1 verschieden. Durch Addition der Treppenkurven von Fig. 7 entsteht natürlich wieder Fig. 6.

In Fig. 8 sind in entsprechender Weise die Schnitte in Richtung der Geraden  $E_1/E_2 = \text{const}$  von Fig. 5 dargestellt. Wie man sieht, nimmt die mittlere Energie  $E_1 + E_2$  zu, wenn das Massenverhältnis gegen 1 geht; vgl. auch

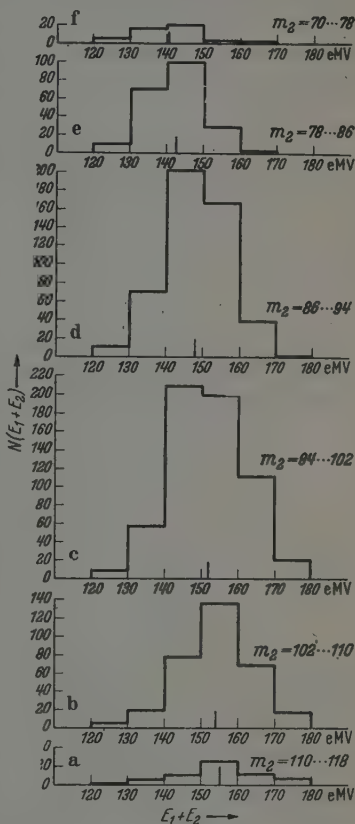


Fig. 8. Verteilung der Gesamtenergie  $E_1 + E_2$  für verschiedene Bereiche der Massenaufspaltung  $m_2/m_1$ .



Tabelle 2. Dies ist nach dem zu Fig. 7 Gesagten zu erwarten. Aus Fig. 8 erkennt man noch, daß bei gegebener Masse der Spaltprodukte die Gesamtenergie stark variiert. Das könnte u. a. darauf zurückzuführen sein, daß eine gegebene Masse mit verschiedener Kernladungszahl gebildet werden

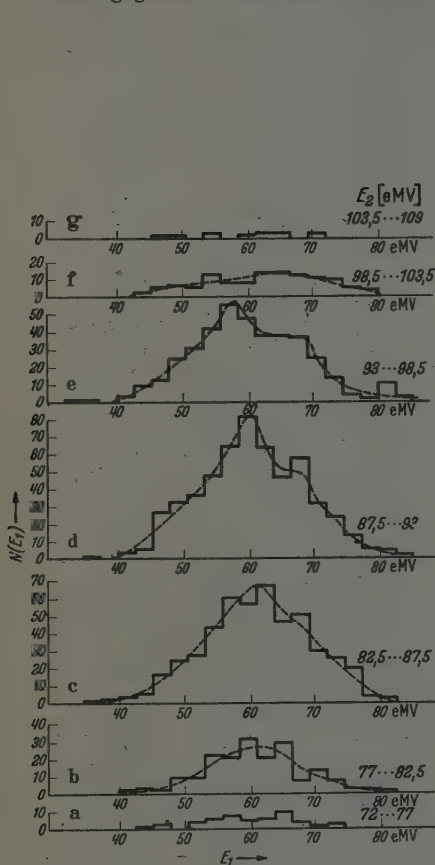


Fig. 9. Verteilung der Energien  $E_1$  des schweren Bruchstücks für verschiedene Werte der Energie  $E_2$  des leichten Bruchstücks.

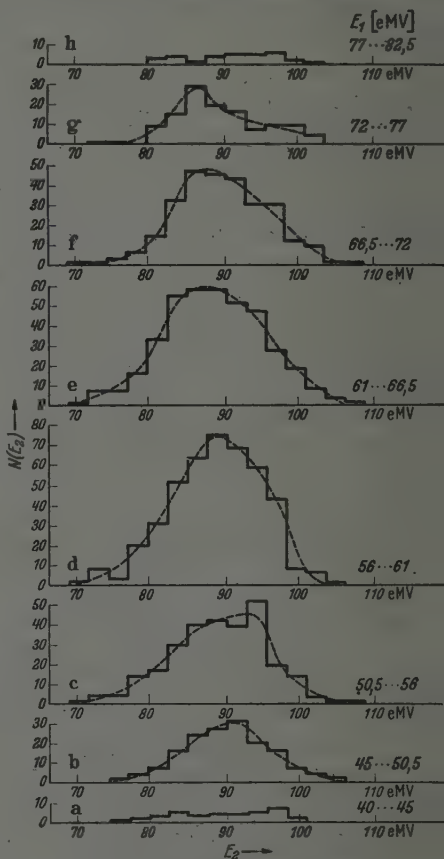


Fig. 10. (Wie Fig. 9 mit  $E_1$  statt  $E_2$  und umgekehrt.)

kann, d. h. daß in den chemisch aufgefundenen Zerfallsreihen mehrere chemische Elemente einer Reihe „primär“ entstehen können.

Die Fig. 9 und 10 zeigen endlich Schnitte parallel zu den Geraden  $E_2 = \text{const}$  bzw.  $E_1 = \text{const}$  in Fig. 5. Die Kurve in Fig. 9d gibt z. B. die Häufigkeit derjenigen Energiewerte an, die  $E_1$  annimmt, wenn  $E_2 \approx 90$  e-MV vorgegeben ist usw. Entsprechend ist Fig. 10 zu verstehen. In beiden

Fällen zeigt die mittlere Energie des einen Teilchens keine deutliche Abhängigkeit von der Energie des anderen. Mit Hilfe der ausgeglichenen Kurven in den Fig. 9b bis f und 10h bis g wurden die Linien gleicher Häufigkeit in Fig. 5 gezeichnet.

Addiert man in den Fig. 9 und 10 jeweils alle übereinanderliegenden Häufigkeitswerte, so erhält man die in Fig. 11 dargestellte totale Verteilung der beiden Einzelenergien. Bisher war nur die Summe der beiden Kurven  $N(E_1)$  und  $N(E_2)$  bekannt<sup>1) 2) 3)</sup>. Die Häufigkeitsmaxima liegen bei 58 und 87 e-MV, die Halbwertbreiten sind deutlich verschieden, sie betragen 20 bzw. 16 e-MV. Die oberen Energiegrenzen liegen bei 82 bzw. 106 e-MV

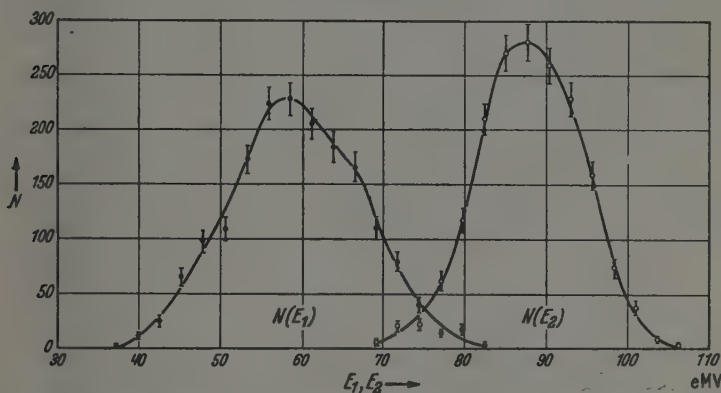


Fig. 11. Gesamtverteilung der Energien  $E_1$  des schweren und  $E_2$  des leichten Bruchstücks (getrennt).

Fig. 12 enthält schließlich die Häufigkeitsverteilung der Gesamtenergie  $E_1 + E_2$ , das ist die Summe der Kurven von Fig. 8. Das Maximum liegt bei 149 e-MV; rechnet man als Energieverlust in der Uranschicht und der Goldfolie zusammen rund 2 e-MV, so ergibt sich als häufigster Wert 151 e-MV. Die Halbwertbreite der Verteilung beträgt 23 e-MV. Die Energiegrenzen liegen bei 120 und 180 e-MV.

5. Diskussion. Unsere Werte für die häufigsten und die maximalen Einzelenergien stimmen gut mit den vergleichbaren Werten von Jentschke und Prankl<sup>1)</sup> überein. Was die Form der in Fig. 11 dargestellten Einzelgruppen  $N(E_1)$  und  $N(E_2)$  angeht, so ist bereits aus Fig. 5 zu ersehen, daß  $N(E_1)$  breiter und niedriger sein muß als  $N(E_2)$ . Dies ergibt sich aber auch

<sup>1)</sup> W. Jentschke, F. Prankl, Phys. ZS. 40, 706, 1939. — <sup>2)</sup> E. T. Booth, J. R. Dunning, F. G. Slack, Phys. Rev. 55, 981, 1939. — <sup>3)</sup> M. H. Kanner, H. H. Barschall, ebenda 57, 372, 1940.

allein aus der Tatsache, daß die mittlere Gesamtenergie zunimmt, wenn das mittlere Massenverhältnis gegen 1 geht. Aus

$$m_1 E_1 = m_2 E_2; \quad m_1 + m_2 = M; \quad E_1 + E_2 = E,$$

wo  $m_1, E_1$  Masse und Energie des schweren,  $m_2, E_2$  Masse und Energie des leichten Bruchstücks sind, folgt nämlich

$$E_{1,2} = \left(1 - \frac{m_{1,2}}{M}\right) E,$$

und nach dieser Gleichung fallen die Extremwerte von  $E_1$  weiter auseinander als die von  $E_2$ , weil eben große Werte von  $m_1$  zu kleinen Werten von  $E$  gehören, während große Werte von  $m_2$  zu großen Werten von  $E$  gehören.

Den häufigsten Wert der Gesamtenergie haben bereits Kanner und Barschall<sup>1)</sup> gemessen. Ihr Wert von 159 e-MV stimmt befriedigend mit

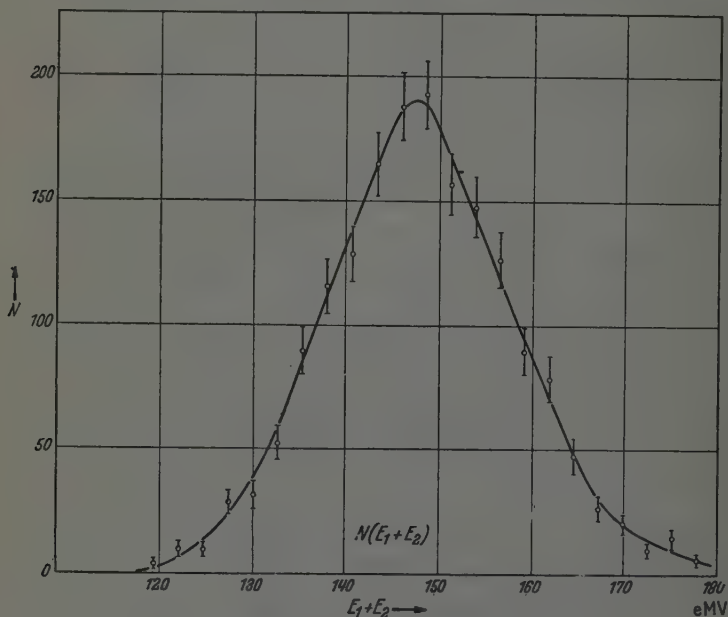


Fig. 12. Gesamtverteilung der Gesamtenergie  $E_1 + E_2$ .

dem unseren von 151 e-MV überein, wobei noch zu berücksichtigen ist, daß sich die Messungen im Gegensatz zu den vorliegenden auf das Isotop  $U^{238}$

<sup>1)</sup> M. H. Kanner, H. H. Barschall, Phys. Rev. 57. 372, 1940.

statt  $U^{235}$  und auf schnelle Neutronen von einigen e-MV bezogen. Kalorimetrische Messungen von Henderson <sup>1)</sup> ergaben für die mittlere Gesamtenergie den höheren Wert von 177 e-MV. Hierin ist jedoch die Zerfallsenergie einer unbekannten Zahl von kurzlebigen  $\beta$ -Strahlern, die als Spaltprodukte und deren Tochtersubstanzen auftreten, mit enthalten. Ob hierdurch der Unterschied voll erklärt wird, oder ob etwa die Ionisationsmessungen noch etwas zu kleine Werte liefern, ist vorläufig schwer zu entscheiden. Das Verfahren der Eichung mit  $\alpha$ -Strahlen bekannter Energie, das bei den Ionisationsmessungen allgemein angewandt wird, birgt ja zweifellos eine gewisse Unsicherheit in sich, erstens wegen der notwendigen starken Extrapolation und zweitens, weil die Urantrümmer eine größere Ladung haben und sehr viel größere Ionendichten auf ihrer Bahn erzeugen als die  $\alpha$ -Teilchen, so daß der Sättigungsgrad etwas verschieden sein könnte. Auch ist nicht ganz sicher, ob der Energieverbrauch je Ionenpaar in beiden Fällen derselbe ist. Es sei aber betont, daß durch die erwähnte Unsicherheit nur der Energiemaßstab, nicht aber die Form der Energieverteilung etwas beeinflußt sein kann, denn nach allgemeiner Erfahrung ist für *gleichartige* Teilchen die Proportionalität zwischen Energie und Ausschlag auch bei mangelnder Sättigung gewahrt.

In Fig. 5 ist die *Verteilung* um das Häufigkeitsmaximum bei  $m_2 : m_1 = 96 : 140$ ,  $E_1 + E_2 = 151$  e-MV keineswegs regelmäßig. Man gewinnt den Eindruck, daß auf den „Flanken“ des Hauptberges ein oder mehrere kleinere Buckel aufgelagert sind, ohne daß es zu einer Sattelbildung zwischen den einzelnen Erhebungen kommt. Dies bedeutet, daß gewisse Paare von Spaltprodukten bevorzugt auftreten. Einen solchen Buckel kann man etwa bei  $m_2 : m_1 = 98 : 138$ ,  $E_1 + E_2 = 165$  e-MV lokalisieren (in Fig. 5 eingezeichnet). Er führt zu den Unsymmetrien in den Kurven Fig. 9e und 10f. Besonders die Unsymmetrie von  $N(E_1)$  in Fig. 11 kann als experimentell gesichert gelten, sie trat nicht nur bei den schon in Ziff. 4, S. 456 erwähnten Vorversuchen auf, sondern auch in den Messungen von Jentschke und Prankl. Man kann also den erwähnten Nebenbuckel wohl als qualitativ gesichert ansehen. Weitere Nebenbuckel könnten in Fig. 5 angedeutet sein, doch reicht die Statistik nicht aus, um sie als ganz gesichert anzusehen. Man könnte vermuten, daß solche Strukturen sich auch in den *Reichweitekurven* der Spaltprodukte zu erkennen geben sollten. Hierbei wirkt jedoch die sehr starke Reichweitenstreuung homogener Spaltungsteilchen <sup>2)</sup> störend.

<sup>1)</sup> M. C. Henderson, Phys. Rev. 58, 774, 1940. — <sup>2)</sup> N. Bohr, ebenda 59, 270, 1941.

Diese ist wohl der Grund, warum bisher in den Reichweitekurven<sup>1)</sup> keine Struktur beobachtet werden konnte.

Die weiteren Ergebnisse werden zweckmäßig gleich im Zusammenhang mit der *Theorie* besprochen. Die Aussagen der bisherigen Theorie sind in dem Diagramm von Bohr und Wheeler zusammengefaßt<sup>2)</sup>. Diese Autoren haben die Energietönung  $E$  für die verschiedenen Aufspaltungsmöglichkeiten des Urankerns berechnet und Kurven konstanter Energietönung in das Proton-Neutron-Diagramm der als Spaltprodukte in Betracht kommenden Kerne eingezeichnet. Diese Kurven sind schmale konzentrische Ellipsen, deren große Achsen annähernd parallel zum Streifen der stabilen Kerne liegen. Man kann sie als „Höhenlinien“ einer „Energiefläche“ auffassen, die ungefähr ein elliptisches Paraboloid ist, und die ihr absolutes Maximum in der Mitte, d. h. bei gleichen Massen und Kernladungen der beiden Spaltprodukte hat. In diesem Falle sollten 1 und 200 e-MV bei der Spaltung frei werden. Die von uns beobachtete *Maximalenergie* von 180 e-MV kommt diesem Wert nahe, ohne ihn aber zu erreichen. Dies ist verständlich, da das Experiment direkt gezeigt hat, daß Trümmer von gleicher Masse praktisch nicht vorkommen. Hierin besteht auch Übereinstimmung mit dem chemischen Befund über die Spaltung durch thermische Neutronen.

Um nun die beobachtete Verteilung der Massen und Energien im einzelnen zu diskutieren, denken wir uns durch die Bohr-Wheelersche Energiefläche Schnitte längs der Geraden konstanter Massenaufspaltung gelegt ( $m_2 = \text{const}$ ), d. h. fast senkrecht zur großen Achse der Ellipsen. Jede so erhaltene Kurve hat ein relatives Maximum in der Nähe der großen Achse. Überträgt man diese Maxima in unsere Darstellung Fig. 5, so entsteht die „Grenzkurve“  $G$ . Die Theorie verlangt also, daß alle beobachteten Spaltungen innerhalb dieser Grenzkurve liegen sollten, wie es auch der Fall ist. Die relative Maximalenergie sollte um so kleiner sein, je verschiedener die beiden Massen sind. Dem entspricht unser experimentelles Ergebnis, daß die *mittlere Gesamtenergie*  $\overline{E_1 + E_2}$  um so kleiner ist, je verschiedener die beiden Massen sind (Tabelle 2). Umgekehrt sollte bei vorgegebener Energietönung  $E$  das extremste auftretende Massenverhältnis um so extremer sein, je kleiner  $E$  ist. Beobachtet wurde dementsprechend, daß das *mittlere Massenverhältnis* um so extremer wird, je kleiner die Gesamtenergie  $E_1 + E_2$  ist (Tabelle 1).

<sup>1)</sup> E. T. Booth, J. R. Dunning u. G. N. Glasoe, Phys. Rev. **55**, 982, 1939. — <sup>2)</sup> N. Bohr, J. A. Wheeler, ebenda **56**, 426, 1939.

Besteht soweit qualitative Übereinstimmung mit den theoretischen Voraussagen, so ist es erheblich schwieriger, die beobachtete *Form der Häufigkeitsverteilung* quantitativ zu deuten. Nimmt man versuchsweise an, daß die Spaltprodukte im Bohr-Wheeler-Diagramm in der Umgegend der großen Achse der Ellipsen einigermaßen gleichmäßig verteilt sind, so ist zu erwarten, daß bei gegebener Massenaufspaltung die jeweilige Maximalenergie die am häufigsten vertretene ist. Die Beobachtungspunkte sollten sich also etwa bei der theoretischen Grenzkurve *G* der Fig. 5 häufen, und die Kurven Fig. 7 bis 10 sollten viel unsymmetrischer sein. Dies ist jedoch nicht der Fall. Hierfür lassen sich mehrere Ursachen anführen:

1. Bei jedem Spaltprozeß werden im Mittel einige Neutronen frei, welche kinetische Energien bis zu etwa 11 e-MV haben können<sup>1)</sup>. Diese Energiebeträge, zuzüglich den Abtrennungsenergien der Spaltungsneutronen, gehen für die kinetische Energie der Spaltprodukte verloren. Dieser Verlust wird in weiten Grenzen schwanken.

2. Die Spaltprodukte werden im allgemeinen nicht in ihrem Grundzustand entstehen, wie in der Theorie von Bohr und Wheeler vorausgesetzt, sondern mehr oder weniger hoch angeregt, bis zu etwa 8 e-MV bei dem leichteren Produkt.

Diese beiden Umstände wirken dahin, daß für unsere Zwecke die Bohr-Wheelersche Energiefläche nicht als strenge Fläche zu denken ist, sondern nach unten verwaschen, als diffuse Schicht mit einem Dichtemaximum irgendwo unter der theoretischen Grenzfläche. Man kann zur Zeit wohl noch nicht sicher sagen, ob diese Verwaschung stark genug ist, um die beobachtete Häufigkeitsverteilung zu erklären, zumal auch die theoretische Berechnung der Grenzfläche selbst noch nicht sehr genau zu sein braucht. Muß man aber nach weiteren Ursachen suchen, so käme noch folgende in Betracht:

3. Die Bereiche der vorkommenden Spaltprodukte liegen nicht, wie oben angenommen, auf der großen Achse der Bohr-Wheelerschen Ellipsen, sondern seitlich davon.

Jedenfalls zeigt sich, daß man aus Messungen wie den vorliegenden zwar auf die Verteilung der Massen und Energien der Spaltprodukte, nicht aber mit Sicherheit auf ihre Kernladungen schließen kann. Eine physikalische Analyse der Spaltprodukte, die an Genauigkeit mit der chemischen Analyse wetteifern könnte, erscheint vorläufig kaum durchführbar.

<sup>1)</sup> G. v. Droste (private Mitteilung); W. Bothe u. W. Gentner. ZS. f. Phys. (im Druck); H. v. Halban, jun., F. Joliot, L. Kowarski. Nature 143, 939, 1939.



### *Zusammenfassung.*

In einer Doppelionisationskammer wurde eine sehr dünne, mit Uran bedeckte Folie mit überwiegend thermischen Neutronen bestrahlt. Die nach entgegengesetzten Richtungen fliegenden Uranbruchstücke wurden getrennt und gleichzeitig mit zwei Proportionalverstärkern nachgewiesen, und die Einzelenergien zusammengehöriger Bruchstücke wurden gemessen.

Es wurden insgesamt 1750 Paare ausgemessen und die Häufigkeit bestimmter Kombinationen der Einzelenergien  $E_1$ ,  $E_2$  bestimmt. Als Ergebnis wurde gefunden:

1. Die Punkte in der Häufigkeitsdarstellung  $N(E_1, E_2)$  (Fig. 5) liegen in einem flächenhaften Bereich zwischen den Gesamtenergien 120 und 180 e-MV und den Energie- bzw. Massenverhältnissen 0,4 : 1 bis fast 1 : 1. Die Spaltung in zwei gleich schwere Teilchen tritt praktisch nicht ein.

2. Der Spaltprozeß, der am häufigsten auftritt, führt zu der Gesamtenergie 151 e-MV und dem Massenverhältnis etwa 96 : 140. Mit zunehmender Entfernung von diesen häufigsten Werten fällt die Häufigkeit allseitig monoton ab; in dem Abfall sind aber ein oder mehrere sekundäre Häufigkeitsbuckel angedeutet. Dies weist auf eine Bevorzugung bestimmter Paare von Spaltprodukten hin.

3. Die Energie des schweren Spaltproduktes (Fig. 11) variiert zwischen 38 und 82 e-MV; die häufigste Energie ist 58 e-MV, die Verteilung um diese ist unsymmetrisch, in Übereinstimmung mit 2. Die Energieverteilung der leichten Spaltprodukte ist schmaler, sie reicht von 70 bis 106 e-MV, mit einem Maximum bei 87 e-MV. Die Halbwertbreiten sind 20 bzw. 16 e-MV. Die Verschiedenheit der Halbwertbreiten hängt mit dem in Abs. 5 Gesagten zusammen: Mit zunehmender Gesamtenergie nimmt die Energie des schwereren Teilchens schneller zu als die des leichteren.

4. Die Gesamtenergie beider Spaltprodukte (Fig. 12) variiert zwischen 120 und 180 e-MV; das Häufigkeitsmaximum ist bei 151 e-MV, die Halbwertbreite beträgt 23 e-MV.

5. Zu einer bestimmten Gesamtenergie sind zahlreiche Massenverhältnisse möglich, ebenso zu einem bestimmten Massenverhältnis verschiedene Werte der Gesamtenergie. Ein Zusammenhang besteht aber in der Weise, daß mit zunehmender Gesamtenergie sich die zugehörigen Massenverhältnisse im Mittel dem Wert 1 : 1 nähern (Tabelle 1). Umgekehrt wird für ein gegebenes Massenverhältnis die mittlere Gesamtenergie um so kleiner, je extremer das Massenverhältnis ist (Tabelle 2).

6. Bei vorgegebener Energie des einen Spaltungsteilchens ändert sich die mittlere Energie des anderen nicht wesentlich mit der des ersten (Fig. 9 und 10).

7. Mit den Voraussagen der Theorie von Bohr und Wheeler besteht qualitative Übereinstimmung, insbesondere hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Gesamtenergie und Massenaufspaltung (vgl. 5.). Jedoch ist eine sichere Bestimmung der Kernladungszahlen der Spaltprodukte auf Grund dieser Theorie vorläufig nicht möglich, weil dabei noch die Spaltungsneutronen und die Anregungszustände der Spaltprodukte zu berücksichtigen wären.

Wir danken Herrn Prof. Bothe für zahlreiche fördernde Diskussionen.

*Heidelberg*, Institut für Physik am Kaiser Wilhelm-Institut für medizinische Forschung, April 1942.

---

## Zündkanalquerschnitt und Zündung mit querschnittsbegrenzter Bestrahlung \*).

Von W. Fucks und H. Bongartz in Aachen.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Vom Elektronenkanal (gekennzeichnet durch die Wege der Elektronen, die sich ohne zu ionisieren vom gleichen Punkt der Kathode zur Anode durch ein Gas bewegen) ist der Zündkanal zu unterscheiden; es ist dies der für das Zustandekommen der Zündung wesentliche Bereich im Moment der Instabilität. Seine radiale Ausdehnung wird hier gemessen unter Ausnützung der Zündspannungssenkung durch Bestrahlung der Kathode mit ultravioletter Licht. Durch Veränderung des bestrahlten Kathodenquerschnitts ergibt sich auf dem Umweg über eine Messung der Zündspannungssenkung der für die Entladung wesentliche Querschnitt. Der Zündkanalquerschnitt wächst mit der Schlagweite. Das Verhältnis des Kanaldurchmessers zur Schlagweite (relativer Kanaldurchmesser) nimmt mit wachsender Schlagweite ab. Die gemessenen relativen Zündkanalquerschnitte liegen ein bis zwei Größenordnungen über den berechneten Elektronenkanalquerschnitten.

1. *Übersicht.* Bei der Untersuchung der *statischen* Zündung einer elektrischen Gasentladung ist die Frage nach der seitlichen Ausdehnung des Entladungsbereiches bisher zurückgetreten; bei *Stoßdurchschlag* wurde dagegen die Ausbildung des Funkenkanals insbesondere durch Nebelkammeruntersuchungen bereits eingehend untersucht. Gerade beim statischen Durchschlag ist nun eine theoretische Durchdringung erfolgt, die zur Aufstellung von Zündgesetzmäßigkeiten über die Townsendsche Zündbedingung hinaus geführt hat, deren experimentelle Prüfung, soweit durchgeführt, eine volle Bestätigung gebracht hat. Die Rechnungen wurden so geführt, als ob es sich um ein ideal ebenes Problem, d. h. um einen seitlich beliebig ausgedehnten Entladungsbereich, handelte. In Wirklichkeit ist mit einem seitlich begrenzten Bereich zu rechnen, der in seiner radialen Ausdehnung von Gasart, Druck und Schlagweite abhängig ist. Dabei ist noch zu berücksichtigen, daß der von der Entladung im Zündmoment in Anspruch genommene Bereich nicht der gleiche sein wird wie der, in dem die fertige Glimmentladung oder der Bogen brennt.

Für unsere Vorstellungen vom Zustandekommen der Zündung ist es von Interesse, welcher Querschnitt des Entladungsraumes im Moment der

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

Instabilität ( $\partial U/\partial J = 0$ ;  $U$  = Spannung,  $J$  = Stromstärke) für die Entladung von Bedeutung ist. Eine Methode zur Messung dieses Querschnitts ist bereits in einer früheren Arbeit kurz mitgeteilt worden<sup>1)</sup>. Sie benutzt die Zündspannungssenkung unter dem Einfluß einer Bestrahlung der Kathode. Der Grundgedanke der Messung besteht darin, durch Veränderung des bestrahlten Kathodenquerschnitts auf dem Umweg über eine Messung der Zündspannungssenkung Auskunft über den für die Zündung wesentlichen Querschnitt zu erhalten.

Im folgenden wird zunächst über Messungen dieser Art in Luft von Atmosphärendruck bei verschiedenen Schlagweiten berichtet. Es ergibt sich ein Anstieg der radialen Ausdehnung des für die Entladung maßgeblichen Bereichs mit der Schlagweite. Der relative Kanaldurchmesser, d. h. das Verhältnis des Kanaldurchmessers  $d$  zur Schlagweite  $L$  nimmt jedoch mit wachsender Schlagweite ab. Zum Vergleich mit theoretischen Vorstellungen wird auf Untersuchungen von Slepian<sup>2)</sup>, Ollendorff<sup>3)</sup> und Raether<sup>4)</sup> über den Querschnitt des Kanals einer Elektronenlawine zurückgegriffen<sup>5)</sup>.

2. Die Meßmethode. Nach Rogowski und Fucks gelten für die Zündstromdichte und die Zündspannung die beiden Gleichungen<sup>6)</sup>

$$i_z = C \sqrt{i_F}; \quad C = C(p; L) \quad (1)$$

$$\frac{\Delta U}{U_0} = K \sqrt{i_F}; \quad K = K(p; L); \quad \Delta U = U_0 - U_z, \quad (2)$$

$i_z$  = Zündstromdichte,  $U_z$  = Zündspannung beim Fremdstrom  $J_F$ ;  $U_0$  = Zündspannung beim Fremdstrom Null;  $\Delta U/U_0$  = relative Zündspannungssenkung durch Bestrahlung. Insbesondere das zweite dieser

<sup>1)</sup> W. Fucks u. H. Bongartz, ZS. f. techn. Phys. **20**, 205, 1939. —

<sup>2)</sup> J. S. Townsend, Electricity in Gases. Oxford 1915; J. Slepian, Elektro. World (1) **91**, 761, 1928. — <sup>3)</sup> F. Ollendorff, Arch. f. Elektrotechnik **26**, 193, 1932; M. Knoll, F. Ollendorff, R. Rompe, Gasentladungstabellen, S. 80. Berlin, Springer, 1935. — <sup>4)</sup> H. Raether, ZS. f. Phys. **107**, 91, 1937; **112**, 464, 1939; Arch. f. Elektrotechn. **34**, 49, 1940; Naturwissensch. **47/48**, 749, 1940. — <sup>5)</sup> Zur Frage nach dem Entladungskanal vgl. auch M. Toepler, Ann. d. Phys. **53**, 217, 1917; L. v. Hamos, ebenda **7**, 857, 1930; F. G. Dunnington, Phys. Rev. (2) **38**, 1535, 1931; P. Rosenlöcher, Arch. f. Elektrotechn. **26**, 19, 1932; H. Kroemer, ebenda **29**, 782, 1935; E. Flegler u. H. Raether, ZS. f. Phys. **99**, 635, 1936; **103**, 315, 1936; H. Raether, ZS. f. techn. Phys. **18**, 564, 1937. — <sup>6)</sup> W. Fucks, ZS. f. Phys. **92**, 467, 1934; W. Rogowski u. W. Fucks, Arch. f. Elektrotechn. **29**, 362, 1935.

Gesetze ist bereits sehr gut bestätigt<sup>1)</sup>. Bestrahlt man die Kathode einer Funkenstrecke etwa mit ultravioletttem Licht, so ergibt sich danach eine Absenkung  $\Delta U$  der Zündspannung  $U_z$  gegenüber einem Wert  $U_0$ , der mit verschwindender Bestrahlung erhalten wird; für festgehaltenen Druck und feste Schlagweite bei einem gegebenen Gas ist  $K$  eine Konstante;  $i_F$  ist, wie bemerkt, die Dichte des Fremdstromes  $J_F$ , wenn mit  $J_F$  der Sättigungswert des dunklen Vorstroms  $J = f(U)$  vor der Zündung gemeint ist; die relative Senkung ist der Wurzel aus der Fremdstromdichte proportional.

Diese volle, dem Gesetz entsprechende Absenkung erhält man natürlich nur dann, wenn die Bestrahlung in radialer Ausdehnung einen hinreichenden Teil der Kathodenoberfläche trifft (vgl. Fig. 1;  $A$  = Anode,  $K$  = Kathode,  $B$  = Blende,  $d$  sei der Durchmesser des bestrahlten Kathodenquerschnitts,  $L$  = die Schlagweite). Die Absenkung muß sich verringern, wenn der von der Strahlung getroffene Bereich der Kathodenoberfläche kleiner wird als der Querschnitt, den die Entladung für ihr ungestörtes Zustandekommen braucht. Trägt man also die Zündspannungssenkung abhängig von dem bestrahlten Kathodenquerschnitt auf, so wird zu verschwindendem bestrahltem Querschnitt eine verschwindende Absenkung gehören; umgekehrt muß sich bei einem beliebig großen bestrahlten Querschnitt der Endwert der Absenkung nach Gleichung (2) einstellen; zwischen den beiden Grenzfällen wird die Absenkung mit wachsendem bestrahltem Querschnitt zunehmen. Man erwartet eine besonders starke Zunahme bis zu demjenigen Querschnitt, der dem ungestörten Entladungskanal im Zündmoment entspricht, bei größeren bestrahlten Querschnitten jedoch nur noch eine geringe Änderung der Senkung. Der Versuch liefert in der Tat diesen Verlauf und damit die Möglichkeit, etwas über die radiale Ausdehnung des für die Entladung im Augenblick der Zündung wesentlichen Bereiches auszusagen.

3. *Apparatur und Durchführung der Messung.* Die bei den Messungen benutzte Funkenstrecke hatte eine ebene, an den Rändern abgerundete Anode und eine kugelförmige Kathode (Fig. 1) von einem im Vergleich zu den gewählten Elektrodenabständen sehr großen Radius<sup>2)</sup>. Als Bestrahlungs-

<sup>1)</sup> W. Rogowski u. A. Wallraff, ZS. f. Phys. **97**, 758, 1935; C. Deimel, Phys. ZS. **37**, 610, 1936; R. Schade, Naturwissensch. **25**, 448, 1937; ZS. f. techn. Phys. **11**, 596, 1937; Phys. ZS. **38**, 1021, 1937; ZS. f. Phys. **108**, 353, 1938; W. Fucks u. G. Schumacher, ZS. f. Phys. **112**, 605, 1939; W. Fucks u. H. Bongartz, ZS. f. techn. Phys. **20**, 205, 1939; C. Brinkmann, Arch. f. Elektrotechn. **33**, 121, 1939; ZS. f. Phys. **111**, 737, 1939; W. Fucks u. G. Schumacher, Naturwissensch. **28**, 110, 1940; W. Fucks u. F. Kettel, ZS. f. Phys. **116**, 657, 1940; H. Scholtheis, Arch. f. Elektrotechn. **34**, 657, 1940. — <sup>2)</sup> W. Fucks u. H. Bongartz, a. a. O.



quelle diente eine Quecksilberdampflampe, die gut geschirmt aufgestellt war. Die Strahlung fiel durch Blenden und durch die durchlöchernte Anode auf die Kathode und traf auf ihr eine Fläche, die bei größeren Querschnitts- querschnitten im folgenden gleich der Summe der durchstrahlten Loch- querschnitte in der Anode gesetzt wurde; bei den zum Teil sehr kleinen Blendenquerschnitten handelt es sich nur um ein einziges feines, in Stanniol gestochenes Loch. Der Abstand der Lampe von den Elektroden war groß im Vergleich zum Elektrodenabstand.

Die direkte galvanometrische Messung der Fremdstromdichte ist bei der Verwendung einer kontinuierlichen Bestrahlung ohne weiteres möglich. Die Apparatur muß überaus hoch isoliert aufgestellt werden und es ist für hinreichende elektrostatische Schirmung zu sorgen. Es müssen die über die Isolation abfließenden Ströme vernachlässigbar klein neben dem Fremdstrom sein. Als Fremdstromdichte wurde der durch Division des Sättigungswertes des dunklen Vorstromes durch die Summe der Lochquerschnitte ermittelte Wert eingesetzt.

Die Messung soll zunächst den Zusammenhang  $\Delta U/U_0 = f(Q)$  liefern, worin  $Q$  der bestrahlte Querschnitt ist. Es wurden also die Blenden vor der Anode ausgewechselt und die übrigen Parameter (Schlagweite, Bestrahlung) konstantgehalten.

4. *Meßergebnisse.* In Fig. 2 sind die Kurven der relativen Zündspannungsänderung  $\Delta U/U_0$ , abhängig vom bestrahlten Kathodenquerschnitt  $Q$ , für sieben verschiedene Schlagweiten zwischen 2,5 und 26 mm aufgezeichnet. Erwartungsgemäß steigt bei wachsendem bestrahltem Kathodenquerschnitt die Zündspannungssenkung zunächst stark an; es gibt dann eine Stelle stärkster Krümmung und der Wert für  $\Delta U/U_0$  geht dann langsam gegen einen Endwert, als den wir den Betrag der Senkung ansehen, der sich bei dem größten bestrahlten Querschnitt ergab, den wir bei unserer Apparatur einstellen konnten (963 mm<sup>2</sup>).

Jede der Kurven von Fig. 2 liefert einen bestimmten Querschnittswert, den man als den für das Zustandekommen der Zündung bei der betreffenden Schlagweite charakteristischen Entladungsquerschnitt ansprechen kann. Man wird ihn an der Stelle suchen, wo der steile Anstieg der Kurven in den mäßigen Anstieg übergeht, d. h. in der Gegend des Krümmungsmaximums der Kurve. Die Krümmungsmaxima der Kurven von Fig. 2 und die zugehörigen Querschnitte finden sich in Tabelle 1.

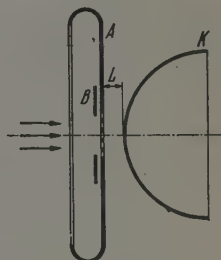


Fig. 1. Elektroden- und Blendenanordnung der Funkenstrecke.



Tabella 1. Querschnitte, die zu den Krümmungsmaxima der Kurven nach Fig. 2 gehören, und zugehörige Schlagweiten.

$L$ [cm] .....	0,25	0,4	0,6	0,9	1,0	1,8	2,6
$Q$ [cm <sup>2</sup> ] .....	0,0225	0,025	0,03	0,034	0,034	0,038	0,052

In den theoretischen Überlegungen zur Frage nach dem Kanalquerschnitt spielt die Abhängigkeit des relativen Kanaldurchmessers  $\zeta = d/L$  ( $d$  = Kanaldurchmesser,  $L$  = Schlagweite) von der Schlagweite  $L$  also die Funktion

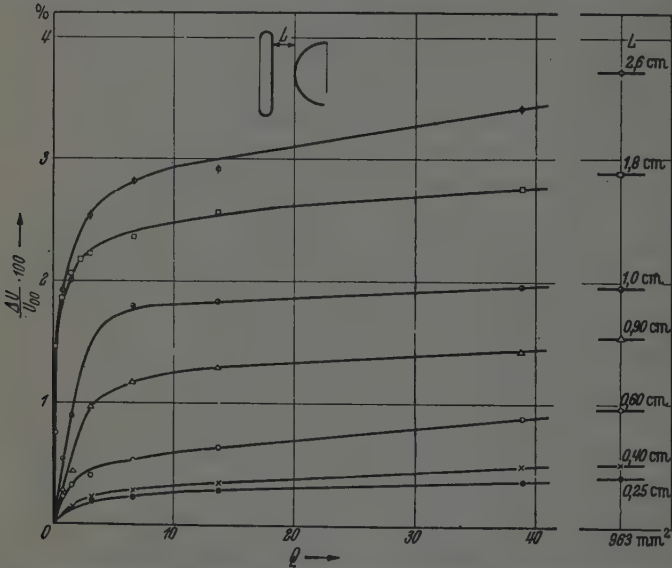


Fig. 2. Relative Zündspannungssenkung in Abhängigkeit vom bestrahlten Kathodenquerschnitt.

$\zeta = f(L)$  eine Rolle. In Fig. 3 sind die gemessenen  $\zeta$ -Werte abhängig von  $L$  aufgetragen.  $\zeta$  sinkt danach um rund eine Zehnerpotenz, wenn der Elektrodenabstand  $L$  um eine Zehnerpotenz wächst.

Es interessiert noch die Frage nach dem Zusammenhang derjenigen bestrahlten Querschnitte mit der Schlagweite, bei denen ein gewisser fester Prozentsatz des Endwertes der Zündspannungssenkung erreicht wird. Einige Kurven dieser Art sind in Fig. 4 aufgezeichnet, wobei wieder nicht der Querschnitt, sondern der relative Durchmesser  $\zeta$  aufgetragen ist.

5. Elektronenkanal, Lawinenkanal, Zündkanal und Funkenkanal. Zur Deutung der hier beim statischen Durchschlag und von anderen Autoren beim Stoßdurchschlag gemessenen Zusammenhänge muß man zwischen verschiedenen Arten von Entladungskanälen unterscheiden. Wenn ein

Elektron von der Kathode startet und unter Einwirkung eines (schwachen) Feldes sich zur Anode bewegt, so wird es durch die Zusammenstöße mit den Gasmolekülen abgelenkt<sup>1)</sup>. Starten von dem gleichen Punkt der Kathode zahlreiche Elektronen, so überstreichen sie auf ihrem Weg zur

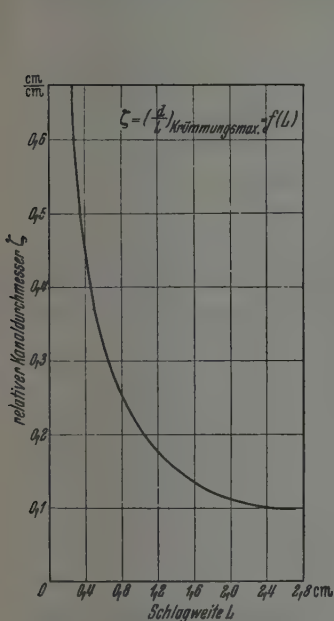


Fig. 3. Relative Kanaldurchmesser der Querschnitte am Krümmungsmaximum abhängig von der Schlagweite.

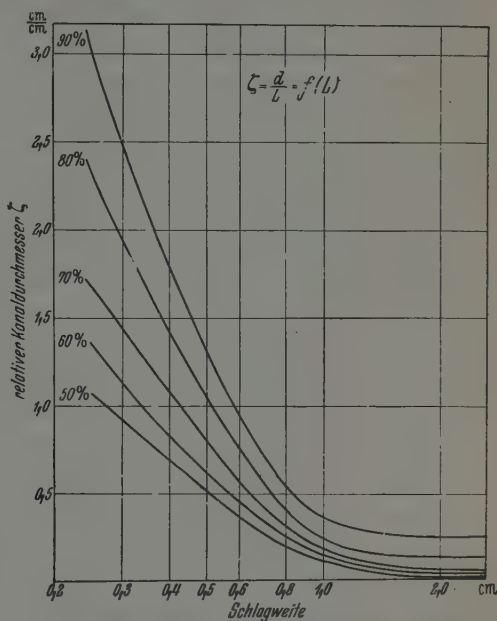


Fig. 4. Relative Kanaldurchmesser bei Absenkungen, die einen festen Bruchteil von der Maximalabsenkung ausmachen.

Anode einen gewissen Raum in der Entladungsbahn, den wir als *Elektronenkanal* bezeichnen wollen, wobei vorausgesetzt ist, daß mit einer Elektronenionisierung nicht gerechnet zu werden braucht.

Lassen wir diese Voraussetzung fallen, so wird ein Elektron, das von der Kathode startet, ionisieren und auch die Tochterelektronen werden ihrerseits auf dem Wege zur Anode neue Träger erzeugen. Wir erhalten dann eine physikalisch anders charakterisierte Entladungsform, die wir als *Lawinenkanal* bezeichnen wollen. Der in Anspruch genommene Raumbereich stimmt mit dem des Elektronenkanals überein, wenn daran festgehalten wird, daß alle Anfangselektronen vom gleichen Punkt der Kathode ausgehen sollen. Statt dessen muß hier angenommen werden, daß die

<sup>1)</sup> J. Slepian, a. a. O.

Anfangselektronen als Startpunkte irgendwelche Punkte des von der Bestrahlung getroffenen Querschnitts haben können. Diese Feststellungen legen den dem „Lawinenkanal“ zuzuschreibenden Raumbereich fest.

Wenn wir die Spannung steigern, so wächst der Strom an und es kann wegen der einsetzenden Rückwirkung ein in seinen Querausdehnungen veränderter Bereich in der Funkenstrecke von Ladungsträgern erfüllt werden. Wir denken uns eine bestimmte Bestrahlung festgehalten und infolgedessen auch einen bestimmten Fremdstrom gegeben. (Die mögliche Änderung von  $i_F$  mit  $E/p$  bei festgehaltener Bestrahlung infolge der Rückdiffusion soll im Augenblick außer Betracht gelassen werden.) Die Spannungssteigerung führt schließlich zur Zündung. Dazu gehört ein bestimmter Zündstrom  $J_z$ , für dessen Stromdichte  $i_z$  das Gesetz nach Gleichung (1) gilt. In dem Augenblick, in dem gerade dieser Strom die Funkenstrecke durchsetzt, wird dazu ein bestimmter von Strömung durchgesetzter Entladungskanal gehören, den wir als *Zündkanal* bezeichnen wollen. Es ist dies also derjenige Entladungsbereich, der zu dem durch  $(\partial U/\partial J = 0)$  gekennzeichneten Punkt und Zeitpunkt der Stromspannungskurve gehört. Der Querschnitt des Zündkanals braucht natürlich längs der Entladungsbahn nicht gleichbleibend zu sein.

Nachdem der stationäre Zustand (Zündmoment) durchschritten ist, geht die Entladung in die Glimmentladung oder den Bogen bzw. Funken über. Die Entladung hängt dann außer vom Entladungsmechanismus selbst auch von den Konstanten des Stromkreises, also der Leistungsfähigkeit und dem inneren Widerstand der Spannungsquelle und weiteren im äußeren Stromkreis befindlichen Schaltelementen ab. Die fertige Entladung unterscheidet sich von der zündenden durch ihre Stromstärke; im Zündmoment haben wir ein nur wenig durch Raumladung verzerrtes Feld, während in der fertigen Entladung die Feldverteilung durch die Raumladung stark verändert sein kann. Außer der Diffusionskraft wird noch eine durch die Feldverteilung bedingte Querkraft<sup>1)</sup> für die Querdimension der Entladung wesentlich. Während im Elektronenkanal der Querschnitt sich nach der klassischen Diffusionstheorie bestimmt (Townsend, Slepian, a. a. O.), muß bei der fertigen Glimmentladung unabhängig vom Druck mit einer überwiegenden Querkraftwirkung gerechnet werden (Fucks, a. a. O.). Diese Umstände bedingen, daß die fertige Entladung im allgemeinen in einem Kanal von anderen Querdimensionen brennen wird als die zündende. Wir nennen den Kanal der ausgebildeten Entladung *Glimmkanal* bzw. *Bogen- oder Funkenkanal*.

<sup>1)</sup> Vgl. W. Fucks, ZS. f. Phys. **87**, 1933, 1939; dort Schrifttumsangaben

Eingehend theoretisch behandelt ist der Elektronenkanal. Nach Ollendorff ergibt sich für die relative Kanalbreite des Elektronenkanals in starken Feldern (Weglängenspannung groß im Vergleich zur thermischen Spannung  $U_{th}$ )

$$\zeta = \sqrt{2\pi \frac{U_{th}}{U}}. \quad (3)$$

Für Luft von Atmosphärendruck ergibt sich damit bei zwei verschiedenen Temperaturen die relative Kanalbreite abhängig von der Schlagweite nach Ollendorff, wie in Fig. 5 gezeichnet.

Unsere Messungen beziehen sich auf den Zündkanal. Für dessen relative Kanalbreite ergibt sich in Abhängigkeit von der Schlagweite ein stark absinkender Verlauf, unabhängig davon, ob wir für den von der Entladung in Anspruch genommenen Kanalquerschnitt die

Stellen stärkster Krümmung unserer Kurven nach Fig. 3, oder einen gewissen Prozentsatz des Endwertes der Senkung nach Fig. 5 und den dazu gehörigen Entladungsquerschnitt als maßgeblich ansehen (vgl. Fig. 5). Die gemessenen Zündkanalquerschnitte liegen ein bis zwei Größenordnungen über den gerechneten Elektronenkanalquerschnitten.

Theoretisch ist der „Zündkanal“, soweit bekannt, bisher nicht behandelt worden. Ob der im Schrifttum durchgeführte Vergleich eines hochtemperierten Elektronenkanals mit der Funkenentladung, wie sie im Blitz vorliegt, begründet ist, müßte geprüft werden. Im Hinblick auf die Rückwirkung und den ausgedehnten Startbereich der Elektronen auf der Kathode ist unter den bei unseren Messungen vorliegenden Verhältnissen damit zu rechnen, daß der Zündkanal beträchtlich ausgedehnter ist als der Elektronenkanal nach Gleichung (3), und es erscheint daher das experimentelle Ergebnis durchaus verständlich. Für den Gang der relativen Kanalbreite mit der Schlagweite erwartet man im Einklang mit dem Experiment für den Zündkanal einen qualitativ ähnlichen Verlauf, wie er für den Elektronenkanal errechnet worden ist.

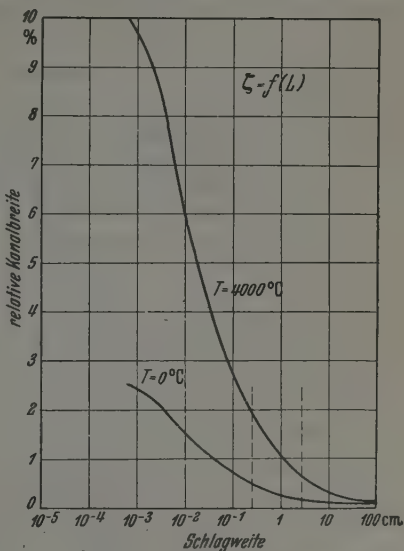


Fig. 5. Berechnete relative Kanalbreite abhängig von der Schlagweite nach Ollendorff.

## Der Ionisierungsaufwand von radioaktiven Rückstoßatomen \*).

Von Chr. Gerthsen und E. Grimm.

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 30. September 1942.)

Es wird eine Methode angegeben, welche die Gesamtionisation der Rückstoßatome von zerfallendem  $\text{ThC}'$  im Einzelprozeß zu messen gestattet. Der aus der gefundenen Anzahl der Ionen berechnete Ionisierungsaufwand stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit dem für  $\alpha$ -Strahlen überein.

### 1. Ziel der Arbeit.

Die Wechselwirkung von  $\alpha$ -Strahlen mit Materie ist — zum großen Teil dank der Pionierarbeiten von Geiger — weitgehend bekannt. Die entwickelten Methoden waren beispielgebend für die Untersuchung anderer Korpuskularstrahlen, vor allem sind die Eigenschaften von Wasserstoffstrahlen, sowohl Wasserstoffkanalstrahlen als auch den bei Atomumwandlungen beobachteten H-Strahlen, mit ähnlicher Sicherheit erforscht.

Dagegen besitzen wir noch recht wenig zuverlässiges Wissen über schwere Kanalstrahlen. Da aber schnell bewegte schwere Atome bei Kernumwandlungen häufig auftreten, beansprucht die Kenntnis ihrer Wechselwirkung mit Materie ein immer wachsendes Interesse. Ist doch z. B. die Messung der von ihnen erzeugten Gesamtionisation häufig das einzige Mittel, ihre kinetische Energie zu bestimmen. Dazu aber ist wiederum die Kenntnis des Ionisierungsaufwandes nötig, d. h. der im Mittel für die Bildung eines Ionenpaares aufzuwendenden Energie. Diese ist aber mit einiger Sicherheit außer für Kathodenstrahlen nur für  $\alpha$ - und H-Strahlen gemessen.

Die vorliegende Arbeit dient nun der Aufgabe, diesen Ionisierungsaufwand für sehr schwere Korpuskularstrahlen, nämlich die Rückstoßatome beim radioaktiven Zerfall, zu ermitteln. Da die Geschwindigkeit der  $\alpha$ -Teilchen sehr genau bekannt ist, kann die Energie der Rückstoßatome mit Hilfe des Energie- und Impulssatzes berechnet werden. Die Aufgabe besteht also darin, die Zahl der von einem Rückstoßatom erzeugten Ionen zu messen.

Während in zahlreichen Arbeiten quantitative und zum Teil recht gut übereinstimmende Angaben über die Reichweite der Rückstoßatome

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.



gemacht werden, ist ihre Ionisierung nur unvollständig bekannt. Wertenstein<sup>1)</sup> findet ein Ionisierungsvermögen, das stärker als das der  $\alpha$ -Strahlen ist und welches wie bei H-Kanalstrahlen und  $\alpha$ -Strahlen kurz vor dem Ende ihrer Reichweite mit abnehmender Geschwindigkeit abnimmt. Er folgert aber aus seinen Messungen, daß ein wesentlich geringerer Bruchteil der vorhandenen Energie der Rückstoßatome zur Ionisierung verwendet wird als bei  $\alpha$ -Strahlen, so daß der Ionisierungsaufwand erheblich größer sein müßte. Gegen eine quantitative Auswertung der Beobachtungen Wertensteins sind erhebliche, hier nicht im einzelnen zu nennende Einwendungen zu erheben. Einen wirklichen Fortschritt darf man wohl nur erwarten, wenn man von Messungen an einem Bündel von Rückstoßatomen zu Beobachtungen und Messungen am Einzelteilchen vordringt.

Joliot<sup>2)</sup> hat den Zerfall von Ac Em- bzw. Ac A-Atomen in einer Tiefdruck-Wilson-Kammer untersucht und dabei Resultate erhalten, die mit den Bestimmungen der Reichweite der Rückstoßatome, welche von Kolhörster<sup>3)</sup> mit dem Geigerschen Spitzenzähler ausgeführt worden sind, nicht in Einklang zu bringen sind. Während aus Kolhörsters Messungen auf eine gut definierte Reichweite der Rückstoßatome geschlossen werden muß, entnehmen man den Nebelspurbildern, daß eine einheitliche Reichweite nicht vorkommt. Die Bahn des Rückstoßatoms zeigt mit sehr großer Wahrscheinlichkeit eine oder gar mehrere Verzweigungen, die offenbar von gestoßenen Atomen des Kammerfüllgases herrühren. Die dabei übertragenen großen Energiebeträge bewirken, daß die Reichweiten sich um mehr als 1 zu 5 unterscheiden können. Ein Versuch, die eigenartigen Ergebnisse dieser Joliotschen Untersuchungen zu deuten, führt aber zu sehr ernststen Schwierigkeiten. Um mit dem Energie- und Impulssatz in Einklang zu bleiben, müssen gekünstelte und bisher durch keinerlei weitere Beobachtungen gestützte Annahmen über den radioaktiven Zerfall gemacht werden.

## 2. Die Meßmethode.

Bei der Planung der hier verwendeten Methode ist daher zunächst auf die Joliotschen Beobachtungen keine Rücksicht genommen; in der Diskussion der Ergebnisse wird darauf eingegangen, inwieweit sie mit den Nebelspurbildern vereinbar sind.

---

<sup>1)</sup> L. Wertenstein, Ann. Phys. (9) 1, 347, 393, 1914. (Zusammenfassender Bericht über seine Arbeiten über R. S. A.) — <sup>2)</sup> F. Joliot, Journ. de Phys. (5) 7, 219, 1934; siehe auch M. Akyama, Japan Journ. Phys. 2, 287, 1924. — <sup>3)</sup> W. Kolhörster, ZS. f. Phys. 2, 257, 1920.



Aus dem Energie- und Impulssatz berechnet man für die Energie der Rückstoßatome  $E_R$  des Th C'

$$E_R = \frac{m_\alpha}{m_{\text{Th D}}} E_\alpha = \frac{4}{208} \cdot E_\alpha = 169,5 \text{ e-kV}$$

( $E_\alpha$  Energie der  $\alpha$ -Strahlen von Th C' =  $8,76 \cdot 10^6$  e-Volt). Man muß daher erwarten, daß die Zahl der von einem Teilchen erzeugten Ionenpaare schwerlich mehr als 5000 betragen wird. Ihre direkte Messung in einer Ionisationskammer mit einem Proportionalverstärker erscheint aussichtslos, da die zu ihnen gehörenden sehr kleinen Impulse nicht mit ausreichender Genauigkeit von den unvermeidlichen Störungen eines empfindlichen Ver-

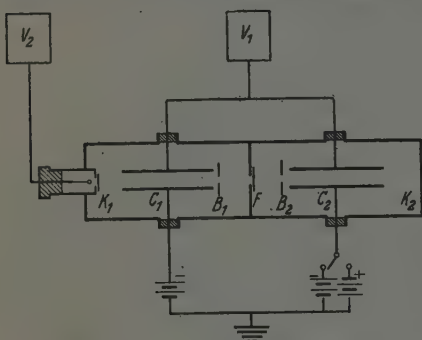


Fig. 1. Schema der Versuchsanordnung.

stärkers zu trennen sind. Wohl aber können zehnfache Mengen, z. B. die Ionisation von  $\alpha$ -Strahlen entlang einiger Zentimeter ihrer Bahn, mit so großer Genauigkeit gemessen werden, daß auch Unterschiede, die etwa 20% betragen, hinreichend exakt bestimmbar sind. Deshalb wurde folgender Weg eingeschlagen: Die Th C'-Atome befinden sich auf einer dünnen Folie F, welche zwei Ionisationskammern  $K_1$  und  $K_2$  voneinander trennt. Die  $\alpha$ -Strahlen treten durch sie hindurch in die Kammer  $K_1$ ; zwischen den Platten des Kondensators  $C_1$  erzeugen sie eine genau angebbare Ionenmenge, von der die negativen Ionen dem Verstärker  $V_1$  zugeführt werden. Dann gelangen die  $\alpha$ -Teilchen noch in einen Geigerschen Spitzenzähler, dessen Abschlußfolie gegen  $K_1$  wohl die  $\alpha$ -Strahlen von Th C', aber nicht die von Th C durchläßt. Die Impulse dieses Spitzenzählers müssen also mit denjenigen der Th C'- $\alpha$ -Strahlen in  $C_1$  Koinzidenzen ergeben. Die zugehörigen Rückstoßatome aber durchsetzen die Kammer  $K_2$ . Wahlweise können nun entweder die von ihnen erzeugten negativen oder die positiven Ionen in  $C_2$  gesammelt und dem gleichen Verstärker zugeführt werden. Seien  $I_\alpha$  und  $I_R$  die Ionenmengen in  $C_1$  und  $C_2$ , so werden dem Verstärker also entweder  $I_\alpha + I_R$  oder  $I_\alpha - I_R$  Ionen zugeführt, welche in dem angeschlossenen Oszillographen zwei Impulsgruppen auslösen. Ihre Differenz entspricht also der doppelten Ionisation der Rückstoßatome.

Neben diese Impulsgruppen treten noch diejenigen, welche von den Th C- $\alpha$ -Strahlen zwischen  $C_1$  und den beiden  $\alpha$ -Strahlengruppen in  $C_2$

erzeugt werden. Zu diesen gibt aber der Spitzenzähler keine Koinzidenzen, sie werden also bei der Auswertung nicht berücksichtigt.

### 3. Apparaturbeschreibung.

Träger des aus ThEm niedergeschlagenen ThB-Präparats ist eine bei  $F$  befindliche 0,0048 mm dicke Aluminiumfolie, welche vor der Aktivierung durch Kathodenzerstäubung zum Schutz gegen Korrosion auf der Präparatseite mit einer 10 m $\mu$  starken Platinschicht überzogen wurde. Das ThB befindet sich auf der der Kammer  $K_1$  abgewandten Seite, wirksamer Durchmesser bei  $F$  ist 0,7 mm. Die  $\alpha$ -Strahlen treten durch die Al-Folie hindurch

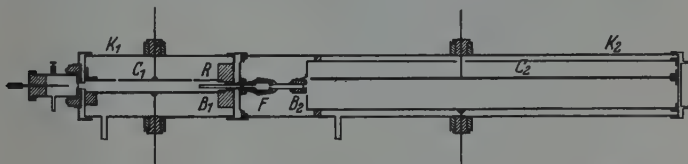


Fig. 2. Schnitt durch die Ionisationskammern und den Spitzenzähler.

und gelangen durch eine Blende  $B_1$  (0,7 mm Durchmesser) in die mit Luft gefüllte Kammer  $K_1$ .  $B_1$  ist mit einer ebenfalls 0,0048 mm dicken Aluminiumfolie bedeckt, die das 66 mm lange Röhrchen  $R$ , in dem der gleiche Druck wie in  $K_2$  herrscht, dicht gegen  $K_1$  abschließt. Die mit dem Verstärker  $V_1$  verbundene Meßplatte des Kondensators  $C_1$  ist 70 mm lang und mit einem Schutzring versehen. Der Abstand der dem Präparat zugewandten Kante von  $B_1$  ist 5 mm. Die eigentliche Ausblendung des  $\alpha$ -Strahlenbündels übernimmt die Eintrittsöffnung zum Spitzenzähler, ihr Durchmesser beträgt 2 mm, sie ist mit einer 0,01 mm dicken Aluminiumfolie bedeckt. Ihr Abstand von  $B_1$  beträgt 110,5 mm. Bei allen Messungen ist der Druck in  $K_1$  330 Torr.

Die zu den in  $K_1$  beobachteten  $\alpha$ -Strahlen gehörenden Rückstoßatome treten durch die 31 mm von  $F$  entfernte Blende  $B_2$  (0,8 mm Durchmesser) in die Ionisationskammer  $K_2$ . Weil hier die Gesamtionisation gemessen werden soll, wird ein Zylinderkondensator  $C_2$  verwendet. Damit auf dem Wege von  $F$  nach  $B_2$  möglichst wenig Ionen verloren gehen, wird bei niedrigem Druck gearbeitet, was eine große Kammerlänge (372 mm) erfordert. Die Öffnung von  $B_2$  ist so gewählt, daß für 20% der in den Spitzenzähler eintretenden  $\alpha$ -Teilchen die zugehörigen Rückstoßkerne nicht in  $C_2$  eintreten können, d. h. daß bei 20% der Koinzidenzen die Mitwirkung der Rückstoßatome ausgeschaltet ist. Die zusammengeschalteten Meßelektroden von  $C_1$  und  $C_2$  sowie der Spitzenzähler sind mit je einem empfindlichen

Proportionalverstärker  $V_1$  bzw.  $V_2$  verbunden, an deren Endstufen Schleifenoszillographen angeschlossen werden. Ihre Ausschläge werden nebeneinander auf einem photographischen Filmstreifen registriert (s. Fig. 3). Die Ausschläge werden in Intervallen von  $2/10$  mm ausgewertet. Ein Beispiel für das Auflösungsvermögen des Verstärkers  $V_1$  gibt die Fig. 4. Sie enthält die Oszillographenausschläge von etwa 370  $\alpha$ -Teilchen in  $C_1$ ,

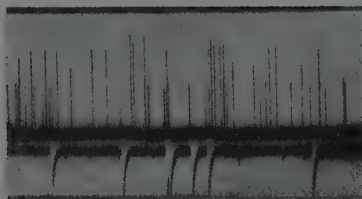


Fig. 3. Registrierstreifen mit Koinzidenzen der Oszillographenausschläge.

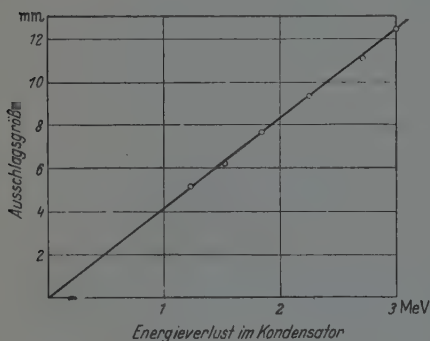


Fig. 5. Zum Nachweis der Proportionalität zwischen der Zahl der Ionen und den Ausschlägen des Oszillographen.

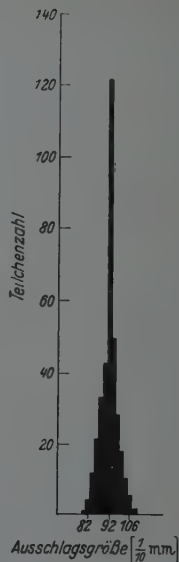


Fig. 4. Beispiel für das Auflösungsvermögen des Verstärkers.

wobei die Anzahl der  $\alpha$ -Teilchen als Funktion der Ausschlagsgrößen aufgetragen ist. In Fig. 5 sind die Oszillographenausschläge für verschiedene Drucke in  $K_1$  als Funktion der auf der Meßstrecke absorbierten Energie und damit auch der Anzahl der Ionen in  $C_1$  aufgetragen. Sie beweist, daß der Verstärker in weitem Bereich proportional arbeitet. Deshalb bedarf er keiner besonderen Eichung. Es muß nur der Ausschlag bekannt sein, den in  $C_1$  gesammelten, durch die  $\alpha$ -Strahlen erzeugten Ionen entspricht. Deren Zahl ermittelt man aus dem Energieverlust im Raum des Schutzringkondensators und dem Ionisierungsaufwand für  $\alpha$ -Strahlen (35 e-Volt). Er wird unter Berücksichtigung des Luftäquivalents der Folien aus der be-

kannten Abhängigkeit der Energie von der Reichweite<sup>1)</sup> bestimmt. Für einen Kammerdruck von 390 Torr, der bei allen Messungen eingehalten wurde, beträgt der Energieverlust 2,43 e-MV, ihm entsprechen  $I_\alpha = \frac{2,43 \cdot 10^6}{35} = 69480$  Ionenpaare.

#### 4. Meßergebnisse.

Bei konstantem Druck in  $K_1$  wird der Druck in  $K_2$  zwischen 0,3 und 1,5 Torr geändert. Die Fig. 6 zeigt als Beispiel für zwei verschiedene Drucke in  $K_2$  (0,31 und 0,58 Torr) die Ausschlagsverteilungskurven, und zwar jeweils links diejenigen, die der Subtraktion  $I_\alpha - I_R$  und jeweils rechts die der

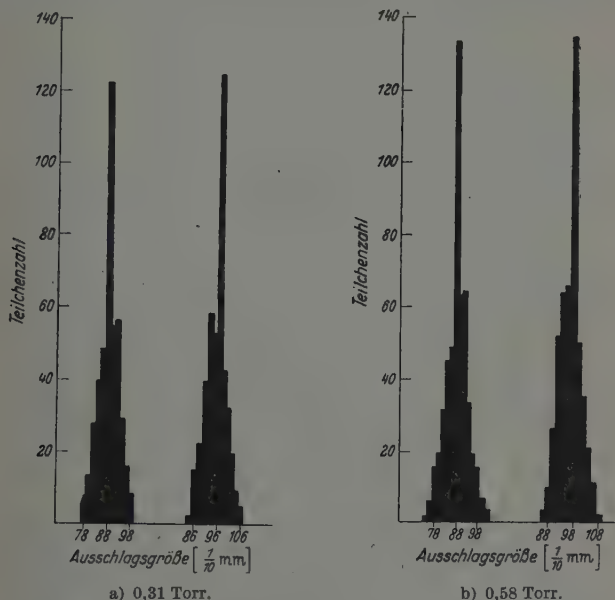


Fig. 6. Ausschlagsgruppen bei Überlagerung der Ionisation durch die Rückstoßatome.

Addition  $I_\alpha + I_R$  entsprechen. Fig. 7 enthält die Unterschiede  $\Delta$  der am häufigsten auftretenden Ausschläge (Maxima) dieser beiden Gruppen, und zwar auf eine Verstärkerempfindlichkeit umgerechnet, bei der die Oszillographenausschläge für die  $\alpha$ -Strahlenionisation in  $C_1$  100 Zehntel Millimeter betragen. Wegen der Proportionalität des Verstärkers gilt dann:

$$\frac{(I_\alpha + I_R) - (I_\alpha - I_R)}{I_\alpha} = \frac{\Delta}{100} \quad \text{oder} \quad I_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta \cdot I_\alpha}{100}.$$

<sup>1)</sup> Z. B. bei M. S. Livingston u. H. A. Bethe, Rev. of mod. Phys. 9, 266, 1937.

So gewinnt man aus den Werten für  $\Delta$  die in Fig. 8 eingetragene Zahl der von den Rückstoßatomen in  $C_2$  in Abhängigkeit vom Druck erzeugten Ionen.

Die Genauigkeit der Messungen hängt einerseits von den Fehlern ab, welche bei der Bestimmung der Verschiebungen  $\Delta$  auftreten, andererseits

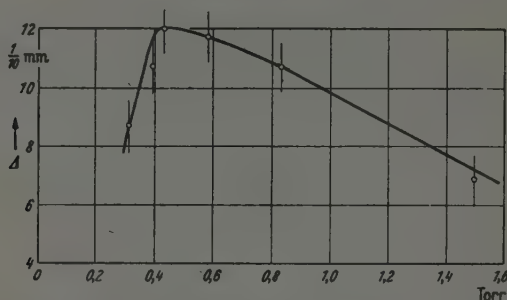


Fig. 7. Verschiebung  $\Delta$  der Maxima der Ausschlagsgruppen bei der Überlagerung der Ionisation der Rückstoßatome über die der  $\alpha$ -Strahlen in Abhängigkeit vom Druck.

von dem Fehler, mit welchem der Wert  $I_\alpha$  bestimmt werden kann. Letzterer tritt völlig zurück, er geht kaum über die Fehler hinaus, welche in der von

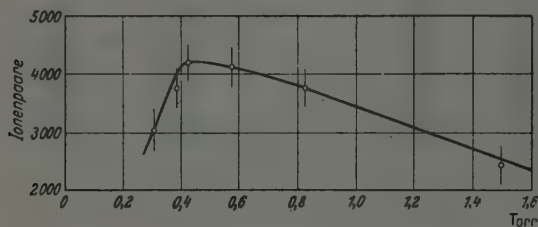


Fig. 8. Ionisation in der Kammer  $K_2$  in Abhängigkeit vom Druck.

Livingston und Bethe (a. a. O.) mitgeteilten Kurve enthalten sind. Hier hängt er nur noch von der Genauigkeit ab, mit der das Luftäquivalent der Al-Folien gemessen werden kann. Er beträgt weniger als 2%. Die Oszillographenausschläge werden in Intervallen von je  $2/10$  mm ausgemessen; doch läßt sich der Schwerpunkt der Ausschlaggruppen genauer festlegen. Wir nehmen an, daß der Fehler bei der Bestimmung von  $\Delta$  im Maximum der Kurve in Fig. 7 nicht mehr als 10% betragen kann. Dieser Fehler ist in Fig. 7 und 8 für alle Meßpunkte eingetragen.

### 5. Diskussion der Meßergebnisse.

a) *Streuung der Rückstoßatome.* Fig. 6 zeigt, daß neben den Hauptmaxima entweder rechts oder links von ihnen noch stets ein Nebenmaximum auftritt, welches genau an der Stelle liegt, an der das Maximum der Häufigkeit der Ausschläge für die  $\alpha$ -Strahlen allein liegen muß, zu denen also die zugehörigen Rückstoßatome nicht in den Kondensator  $C_2$  eintreten. Ein Versuch, aus den gemessenen Verteilungskurven die Häufigkeit solcher Impulse abzuschätzen, führt durchweg auf 15 bis 20% derjenigen der verschobenen Impulse. Das entspricht aber der auf S. 479 angegebenen Zahl der wegen der engen Ausblendung bei  $B_2$  ausfallenden Koinzidenzen. Es besteht daher überhaupt keine Veranlassung, anzunehmen, daß durch Streuung eine merkliche Anzahl von Rückstoßatomen auf dem Wege von der Folie bis zur Blende  $B_2$  ausscheiden. Das steht nun aber in einem starken Widerspruch zu den Nebelspurbeobachtungen von Joliot (a. a. O.): In einer Statistik über 312 Photographien zweigt bei 80 von 100 der Rückstoßatome auf dem ersten Zwanzigstel der Bahn (bei uns also innerhalb  $F B_2$ ) ein Atom beträchtlicher Reichweite von der Spur des Rückstoßatoms ab. Hierbei erfährt dieses eine Richtungsänderung, die durchweg erheblich größer ist, als nach den Erhaltungssätzen von Energie und Impuls zugelassen werden dürfte und die, wenn sie auch bei unseren Untersuchungen auftreten würde, die Strahlen daran hindern würde, durch  $B_2$  in die Ionisationskammer einzutreten. Es ist weiter bemerkenswert, daß die Halbwertsbreite der Verteilungskurven in Fig. 6 nicht merklich von derjenigen in Fig. 4 sich unterscheidet, woraus gefolgert werden muß, daß die Schwankung der von den Rückstoßatomen in  $C_2$  gebildeten Ionenmengen nicht über die statistisch zu erwartende merklich hinausgeht.

b) *Reichweite der Rückstoßatome.* Die Ionisation in  $C_2$  erreicht bei einem Druck von 0,43 Torr ihr Maximum. Bei höheren Drucken nimmt sie wieder ab, weil ein wachsender Anteil der Ionisation zwischen  $F$  und  $B_2$  erfolgt und daher der Kammer  $C_2$  verloren geht. Bei 0,43 Torr erreichen die Rückstoßatome gerade noch die Stirnwand von  $K_2$ , legen also den Weg von 403 mm zurück. Auf 760 Torr und 18° C umgerechnet, erhält man eine Reichweite von 0,228 mm <sup>1)</sup> in guter Übereinstimmung mit Kolhörster (a. a. O.), der 0,224 mm angibt.

c) *Gesamtionenmenge und Ionisierungsaufwand.* Um die gesamte Ionenmenge zu erhalten, muß zu der größten in  $C_2$  gemessenen Zahl von

<sup>1)</sup> Dieser Wert für die Reichweite kann dann, wenn gemäß den Beobachtungen von Joliot mehrere Verzweigungen an der Bahn des Rückstoßatoms vorkommen, nur als obere Grenze für die Reichweite gelten.



4180 Ionenpaaren noch die hinzugezählt werden, die schon auf dem Wege von  $F$  nach  $B_2$  erzeugt wird. Macht man die sicher angenähert richtige Annahme, daß das Ionisierungsvermögen am Anfang der Bahn, über eine Strecke, die das Doppelte von  $F B_2$  beträgt, noch nicht wesentlich abnimmt, so kann man folgendermaßen schließen:  $x$  sei die Menge der bei 0,43 Torr zwischen  $F$  und  $B_2$  erzeugten Ionen,  $I_1$  die in  $C_2$  bei gleichem Druck entstandenen. Die Gesamtzahl  $I$  also deren Summe.

$$x + I_1 = I.$$

Bei doppeltem Druck entstehen dann zwischen  $F$  und  $B_2$   $2x$ , in  $C_2$  aber nur noch  $I_2$ , wieder wird

$$2x + I_2 = I.$$

Hieraus folgt

$$x = I_1 - I_2 = 4180 - 3660 = 520.$$

Die Gesamtzahl der erzeugten Ionenpaare beträgt also  $4180 + 520 = 4700$ . Der Abfall der Ionisierung in  $C_2$  mit wachsendem Druck ist etwas stärker als für ein von der Geschwindigkeit unabhängiges Ionisierungsvermögen zu erwarten wäre, er findet seine Deutung in dem gegen das Ende der Reichweite abnehmenden Ionisierungsvermögen<sup>1)</sup>. Keinesfalls aber ist die Abnahme so stark, daß man zur Annahme einer merklichen Streuung zwischen  $F$  und  $B_2$  genötigt wäre. Daß Verzweigungen, wie sie die Joliotischen Beobachtungen ergeben haben, häufiger als bei  $\alpha$ -Strahlen vorkommen können, ist aus dem Mechanismus der Stöße schwerer Teilchen mit ihren hohen Kernladungen zu erwarten. Nach dem Energie- und Impulserhaltungssatz ist die auf ein gestoßenes Atom übertragene Energie

$$E_A = 4 \cdot \frac{m_R \cdot m_A}{(m_R + m_A)^2} E_R \cos^2 \varphi.$$

Hier bedeuten  $m_A$  die Masse des gestoßenen Atoms und  $\varphi$  den Winkel, unter dem dieses gegen die Stoßrichtung fortgeschleudert wird. Ein gestoßenes Stickstoffatom kann demnach höchstens 11,9 % von  $E_R$ , das ist also eine Energie von 20 e-kV, übernehmen. Da ein solches Atom die Außenelektrode von  $C_2$  erreichen kann, bevor seine Energie ganz verzehrt wurde, kann die gemessene Gesamtionenzahl etwas zu klein sein. Die Abschätzung der Häufigkeit solcher Prozesse kann aber ohne besondere Versuche nicht gegeben

---

<sup>1)</sup> Würde das Ionisierungsvermögen nicht abnehmen, so wäre die Gesamtzahl der Ionenpaare, abgeschätzt aus der Zahl der am Anfang auf 31 mm Weg erzeugten,  $520 \cdot \frac{403}{31} = 6800$ , also erheblich mehr als gefunden wurde.

werden. Die Zahl der bei einem Druck von 0,43 Torr zwischen  $F$  und  $B_2$  erzeugten Ionen gestattet eine rohe Abschätzung des Ionisierungsvermögens (Zahl der pro cm bei einem Druck von 1 Atm. erzeugten Ionenpaare), wenn man mögliche Verzweigungen nicht berücksichtigt. Man erhält etwa  $3 \cdot 10^5$  Ionenpaare. Das ist etwa das 15fache des Ionisierungsvermögens der  $\alpha$ -Strahlen von  $\text{ThC}'$  am Anfang der Bahn und immerhin noch das 4,5fache des größten, bei  $\alpha$ -Strahlen beobachteten Ionisierungsvermögens. Es werden mehr als 1 Ionenpaar bei einer gaskinetischen Begegnung erzeugt.

Aus der Gesamtzahl der Ionen erhält man den Ionisierungsaufwand  $\varepsilon_R$

$$\varepsilon_R = \frac{169\,500}{4700} = 36 \text{ e-Volt.}$$

Er stimmt also innerhalb der Fehlergrenzen mit dem der  $H$ - bzw.  $\alpha$ -Strahlen überein.

Zweifellos sind die Elementarprozesse (z. B. die Umladungen oder die direkte Energieübertragung auf gestoßene Atome) bei der Anregung und Ionisation durch sehr schwere Teilchen wesentlich andere als bei leichten. Vor allem wird die Wahrscheinlichkeit, mit der eine oder andere Prozeß auftritt, von Fall zu Fall sehr verschieden sein. Wenn trotzdem der statistische Mittelwert, der in der Zahl für den Ionisierungsaufwand vorliegt, und aus dem man gar nichts über die Einzelprozesse bei Anregung und Ionisation herleiten kann, für so extrem verschiedene Fälle der gleiche zu sein scheint, so wird man wohl nicht in der Annahme fehlgehen, daß der Ionisierungsaufwand von der individuellen Natur der ionisierenden Strahlen weitgehend unabhängig ist.

Für die freundliche Hilfe bei der Aktivierung der Folien, die im Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie in Berlin-Dahlem durchgeführt wurde, danken wir den Herren Prof. Dr. Erbacher und Prof. Dr. Philipp.

*Berlin*, I. Physikalisches Institut der Universität.

## Energie und Reichweite langsamer $\alpha$ -Strahlen \*).

Von D. Hacman und O. Haxel in Berlin-Charlottenburg.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Die experimentell wenig bekannte Energie-Reichweitenbeziehung für  $\alpha$ -Strahlen unter 2 cm Reichweite wurde ausgemessen. Die bei diesen Messungen sonst störende Reichweitenstreuung der abgebremsten  $\alpha$ -Strahlen konnte dadurch umgangen werden, daß eine Meßmethode verwendet wurde, die im Prinzip auf der Messung an einem einzelnen  $\alpha$ -Teilchen beruht. Die Ergebnisse, die in Übereinstimmung mit denen von Holloway und Livingston stehen, ergaben eine Abweichung gegenüber der allgemein als gültig angesehenen Energie-Reichweitenbeziehung nach Livingston und Bethe.

Im Reichweitengebiet der natürlichen  $\alpha$ -Strahlen ist der Zusammenhang zwischen Reichweite und Energie mit großer Genauigkeit bekannt<sup>1)</sup>. Für kleinere Reichweiten liegen die magnetischen Ablenkmessungen von Briggs<sup>2)</sup> und Mano<sup>3)</sup> an abgebremsten  $\alpha$ -Strahlen vor. Diese Methode liefert jedoch nur für Reichweiten bis herab zu 1,7 cm einwandfreie Werte, da die Energien der  $\alpha$ -Strahlen eines ursprünglich homogenen Bündels bei der Abbremsung — infolge der natürlichen Reichweitenstreuung — schließlich so inhomogen werden, daß exakte Energiebestimmungen nicht mehr möglich sind. Unterhalb dieser Grenze ist nur das Reichweitengebiet von 0 bis 0,25 cm von Blackett und Lees<sup>4)</sup> durch Wilson-Aufnahmen an einzelnen gestreuten  $\alpha$ -Teilchen erforscht. In der Lücke zwischen 0,25 und 1,7 cm Reichweite waren bis vor kurzem keine Messungen vorhanden. Livingston und Bethe<sup>5)</sup> haben daher für dieses Gebiet eine teils theoretisch, teils empirisch begründete Energie-Reichweitenbeziehung aufgestellt, die sich in ihrem unteren Teil an die Werte von Blackett und Lees, und in ihrem oberen Teil an die Werte von Mano anlehnt. Außerdem wurde im Zwischengebiet eine Reichweitenmessung von Neuert<sup>6)</sup> an der Reaktion  ${}^6\text{Li}({}^1\text{H}, {}^3\text{He}){}^4\text{He}$  verwertet. Die einzige zusammenhängende Messung

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> H. Geiger, Proc. Roy. Soc. London (A) **83**, 505, 1910; G. H. Henderson, Phil. Mag. **42**, 538, 1921; Lord Rutherford u. a., Proc. Roy. Soc. London (A) **139**, 617, 1933; G. H. Briggs, ebenda **157**, 183, 1936; S. Rosenblum, C. R. **202**, 1274, 1936. — <sup>2)</sup> G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **114**, 341, 1927. — <sup>3)</sup> G. Mano, Ann. de Phys. **1**, 407, 1934. — <sup>4)</sup> P. M. S. Blackett u. D. S. Lees, Proc. Roy. Soc. London (A) **134**, 658, 1932. — <sup>5)</sup> M. St. Livingston u. H. A. Bethe, Rev. of Mod. Phys. **9**, 261, 1937. — <sup>6)</sup> H. Neuert, Phys. ZS. **36**, 629, 1935.

zwischen 0,25 und 1,7 cm Reichweite wurde in neuerer Zeit von Holloway und Livingston<sup>1)</sup> durchgeführt. Sie ermittelten mit Ionisationskammer und Proportionalverstärker die Braggsche Kurve eines  $\alpha$ -Teilchens mittlerer Reichweite. Ihre Ergebnisse lagen in dem fraglichen Gebiet bei etwas höheren Energiewerten, als sie die Livingston-Bethesche Kurve angibt. Im folgenden wird über eine weitere Untersuchung dieses Gebietes mit Hilfe einer neuen Meßmethode berichtet, deren Prinzip auf der Messung von Energie und Reichweite an einem einzelnen Teilchen beruht, so daß Meßfehler, wie sie an einem abgeregten  $\alpha$ -Strahlenbündel unvermeidlich sind, keine Rolle spielen können.

*Meßmethode.* Ein  $\alpha$ -Strahlenbündel dringt durch ein Glimmerfenster in das Innere eines im Proportionalbereich arbeitenden Zählrohres ein. Die Ausschlaggröße der Zählimpulse ist dabei der von den einzelnen Teilchen erzeugten Ionenmenge proportional. Durch die Veränderung der Vorabsorption mittels einer Luftschicht von veränderlichem Druck kann die Eindringtiefe der Strahlen in das Zählrohr um bekannte kleine Stücke (etwa 0,05 cm) verändert werden. Zunächst wird die Vorabsorption derart gewählt, daß das längste Teilchen des Bündels eben nicht mehr in das Zählrohrinnere eindringt. Nun läßt man das  $\alpha$ -Strahlenbündel Schritt für Schritt tiefer in das Zählrohr eindringen und mißt dabei jeweils die dazugehörige Impulsgröße des längsten Teilchens aus. Damit erhält man die Zahl der Ionenpaare des längsten Teilchens in Abhängigkeit von der Reichweite. Die Tiefe des Zählrohres muß dabei so groß sein, daß die Bahn des  $\alpha$ -Teilchens ganz im Zählraum verläuft. Unter der Voraussetzung, daß der Energieaufwand pro Ionenpaar bekannt und geschwindigkeitsunabhängig ist, erhält man damit den Zusammenhang zwischen Reichweite und Energie eines einzelnen  $\alpha$ -Teilchens.

Bei der praktischen Durchführung wurde für jede Eindringtiefe nicht nur die Impulsgröße des längsten Teilchens, sondern die gesamte Teilchenzahl-Impulsgrößenkurve aufgenommen. In Fig. 1 ist eine solche bei einer Meßreihe gewonnene Kurvenschar eingezeichnet. Auf der Ordinate ist die Zahl der Impulse, deren Ausschlag größer als der dazugehörige Abszissenwert ist, aufgetragen. Die Kurven entsprechen verschiedenen Vorabsorptionen. Die Impulsgröße des längsten Teilchens ergibt sich dann aus dem Schnittpunkt der jeweiligen Kurve mit der Abszissenachse. Trägt man diese Impulsgrößen  $I_0$ ,  $I_1$  usw. gegen die jeweilige Eindringtiefe auf, so erhält man die gesuchte Ionenzahl-Reichweitenkurve. Zu demselben Ergebnis

<sup>1)</sup> M. G. Holloway u. M. St. Livingston, Phys. Rev. **54**, 18, 1938.

kommt man, wenn die Auswertung nicht auf der Abszissenachse, sondern längs einer Horizontalen  $H-H$  durchgeführt wird, die gerade durch den Schnittpunkt der untersten Kurve (4,23 cm) mit der Ordinatenachse hindurchgeht. Damit werden Energie und Reichweite nicht am jeweils längsten Teilchen des Bündels gemessen, sondern an demjenigen Teilchen, das bei der dieser Kurve entsprechenden Eindringtiefe gerade das Zählrohrinnere berührt. Trägt man daher die Impulsgröße  $I_1'$ ,  $I_2'$  usw. gegen die jeweiligen Eindringtiefen auf, so erhält man ebenfalls die Ionenzahl-Reichweitenbeziehung. Da die Schnittpunkte der einzelnen Kurven mit der

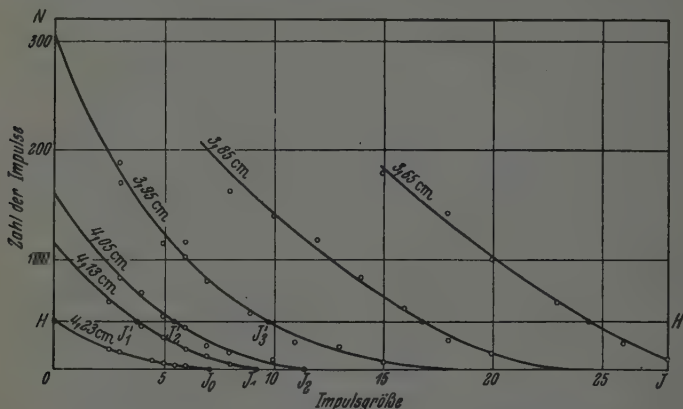


Fig. 1. Anzahl der  $\alpha$ -Strahlenimpulse in Abhängigkeit von ihrer Größe, gemessen bei verschiedenen Luftäquivalenten in der Vorabsorptionskammer (Impulsgrößen in Volt).

Horizontalen  $H-H$  wesentlich genauer ermittelt werden können als diejenigen mit der Abszissenachse, wurde die Auswertung immer in der zuletzt besprochenen Weise ausgeführt. Selbstverständlich kann die Auswertung auch längs jeder anderen Horizontalen durchgeführt werden, sofern diese durch einen der Schnittpunkte der Kurven mit der Ordinate hindurchgeht. Immer muß sich naturgemäß dieselbe Energie-Reichweitenbeziehung ergeben.

**Meßapparatur.** Der größte Teil der Messungen wurde mit dem in Fig. 2 dargestellten Längszählrohr, bei dem das Strahlenbündel parallel zur Rohrachse läuft, durchgeführt. Das maximale Luftäquivalent der Gasfüllung, mit dem gearbeitet wurde, betrug 2 cm. In diesem Fall war die Zählspannung des mit 182 mm Hg trockener Luft gefüllten Zählrohres 2700 Volt. Die  $\alpha$ -Strahlen eines ThC'-Präparates gelangten nach Durchsetzung der Vorabsorptionskammer  $K$  durch einen Metallkanal  $M$ , der mit einem Glimmerfenster  $G$  (Luftäquivalent 3,37 cm) verschlossen war, in das



Innere des Zählrohres. Durch geeignete Spannungen an dem Metallrohr  $M$  und an den Schutzringen  $S_1$  und  $S_2$  wurde für einen gleichmäßigen Feldverlauf in der Nähe der Isolatoren gesorgt, so daß sich dort kein für die Zählung toter Raum ausbilden konnte. Der Öffnungswinkel des  $\alpha$ -Strahlenbündels war so klein, daß alle  $\alpha$ -Strahlen praktisch den gleichen Abstand vom Zählendraht hatten und somit Empfindlichkeitsänderungen, wie sie von Brubacker und Pollard<sup>1)</sup> festgestellt wurden, nicht auftreten konnten.

Die Ausschlagsgröße der Impulse wurde mit einem Thyatron ermittelt. Der von den  $\beta$ -Strahlen herrührende Untergrund ergab Impulse von maximal

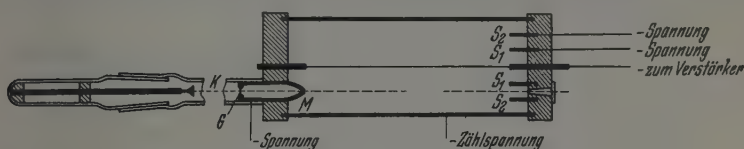


Fig. 2.  $\alpha$ -Strahlenzählrohr mit Vorabsorptionskammer.

3 Volt. Die  $\alpha$ -Strahlenimpulse konnten daher nur bis zu dieser Ausschlagsgröße herab verfolgt werden. Die Zahl der Ausschläge für die Impulsgröße Null, die für die Festlegung der Horizontalen  $H-H$  wichtig ist (siehe Fig. 1), konnte aber durch Extrapolation mit genügender Genauigkeit ermittelt werden.

**Meßergebnisse.** Der aus 20 Meßreihen<sup>2)</sup>, von denen eine in Fig. 1 zum Teil dargestellt ist, gewonnene Zusammenhang zwischen Ionenzahl und Reichweite eines  $\alpha$ -Teilchens ist in Fig. 3 aufgezeichnet. Die Messungen, die teils mit Querszählrohren, teils mit Längszählrohren bei verschiedenen Füllgasdrucken durchgeführt wurden, ergaben übereinstimmende Ergebnisse. Auf der Abszisse sind die Reichweiten in cm Luft von 760 mm Hg und 15° C, auf der Ordinate die relativen Ionenzahlen bzw. die  $\alpha$ -Strahlenenergie aufgetragen. Der Maßstab der Energieskala wurde so gewählt, daß sich die Meßpunkte für Reichweiten über 1,5 cm an die in diesem Gebiet aus den Messungen von Mano und Briggs gut bekannte Energie-Reichweitenbeziehung anschließen.

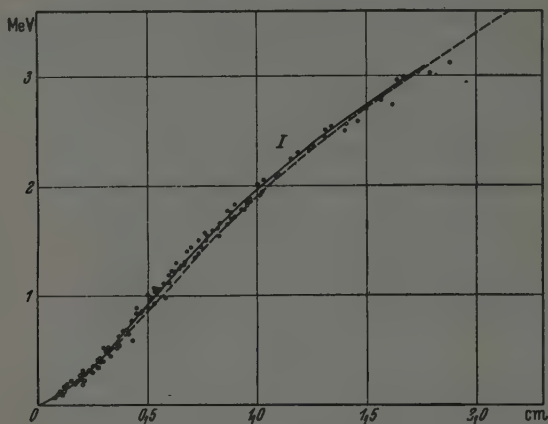
Der Energiemaßstab kann auch dadurch festgelegt werden, daß die Impulsgröße von  $\alpha$ -Strahlen größerer Reichweite ausgemessen wird, deren Energie-Reichweitenbeziehung bzw. Ionisations-Reichweitenbeziehung be-

<sup>1)</sup> G. Brubacker u. E. Pollard, Rev. of Scient. Instr. 8, 254, 1937. —

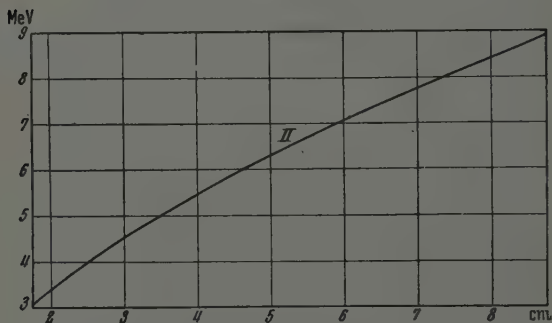
<sup>2)</sup> Einige Meßreihen zwischen 0 und 0,4 cm verdanken wir Herrn Dipl.-Ing. H. Kotowski.



kannt ist. Bei Verwendung der Ionisations-Reichweitenkurve (Braggsche Kurve) von Stetter und Jentschke<sup>1)</sup> mußte ein geschwindigkeits-unabhängiger Energieaufwand von 31 e-Volt pro Ionenpaar angenommen werden, um ebenfalls die in Fig. 3 eingezeichnete Energieskala zu erhalten.



Kurve I.



Kurve II.

Fig. 3. Kurve I: Energie-Reichweitenbeziehung eines  $\alpha$ -Teilchens in Luft von 760 mm Hg und 15° C. (Gestrichelte Kurve nach Livingston und Bethe.).

Kurve II: Dieselbe Kurve für  $\alpha$ -Strahlen über 2 cm Reichweite (nach Livingston und Bethe).

*Diskussion.* Die ausgezogene Kurve I in Fig. 3 gibt den nach unseren Messungen wahrscheinlichsten Verlauf der Energie-Reichweitenbeziehung eines einzelnen  $\alpha$ -Teilchens wieder. Sie stellt damit auch den Zusammenhang zwischen der Energie und der mittleren Reichweite eines homogenen  $\alpha$ -Strahlenbündels dar. Daneben ist gestrichelt die Energie-Reichweiten-

<sup>1)</sup> G. Stetter u. W. Jentschke, Phys. ZS. 36, 441, 1935.

beziehung nach Livingston und Bethe eingezeichnet, deren Energiewerte im Gebiet zwischen 0,4 und 1,7 cm Reichweite unter den hier gefundenen Energiewerten liegen. Die Meßpunkte von Holloway und Livingston<sup>1)</sup> würden zwischen die beiden eingezeichneten Kurven zu liegen kommen. Der Vollständigkeit halber ist außerdem die Livingston-Bethesche Kurve (Kurve II) auch für größere Reichweiten, bei denen sie experimentell völlig gesichert ist, wiedergegeben.

Die Livingston-Bethesche Kurve für Reichweiten unter 2 cm (gestrichelt) wurde aus einer von Bethe berechneten Kurve gewonnen, indem die Energiewerte in dem Reichweitengebiet zwischen 0,4 und 1,7 cm gegenüber der berechneten Kurve gedrückt wurden<sup>2)</sup>, um in bessere Übereinstimmung mit den Meßwerten von Mano zu kommen. Macht man diese Korrektur der theoretischen Kurve wieder rückgängig, so ergibt sich innerhalb der Streubreite unserer Meßpunkte genau die von uns gefundene (ausgezogene) Kurve. Unsere Messungen bestätigen daher die ursprünglich von Bethe berechnete Energie-Reichweitenkurve. Die Tatsache, daß unsere sowie die Holloway-Livingstonschen Meßwerte höher liegen als die von Mano, ist verständlich, da bei den Manoschen Messungen die Reichweitenstreuung der auf 1 cm Reichweite abgebremsten  $\alpha$ -Strahlen erheblich ins Gewicht fällt und Mano daher in diesem Gebiet nicht die Genauigkeit erreichen konnte, die er bei höheren Reichweiten erzielt hatte. Der kleine Unterschied unserer Meßwerte gegenüber denen von Holloway und Livingston liegt innerhalb der beiderseitigen Meßfehlergrenze. Diese ist bei der von uns verwendeten Meßmethode etwas kleiner, so daß unsere bei etwas höheren Energiewerten liegende Kurve der Wirklichkeit am nächsten kommen dürfte.

Unsere und ebenso die Holloway-Livingstonsche Meßmethode setzt voraus, daß der für die Bildung eines Ionenpaares nötige Energieaufwand von der  $\alpha$ -Strahlengeschwindigkeit unabhängig ist. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so kann es allerdings sein, daß die von uns und Holloway und Livingston gefundenen höheren Werte durch eine Abnahme des Energieaufwandes in dem Reichweitengebiet zwischen 0,4 und 1,7 cm vorgetäuscht worden sind. Dies ist jedoch sehr unwahrscheinlich um so mehr, als bei Kathodenstrahlen, bei denen genaue Messungen vorliegen<sup>3)</sup>, der Energieaufwand pro Ionenpaar von der Geschwindigkeit völlig unabhängig ist.

---

<sup>1)</sup> M. G. Holloway u. M. St. Livingston, l. c. — <sup>2)</sup> M. St. Livingston u. H. A. Bethe, l. c. S. 267. — <sup>3)</sup> A. Eisl, Ann. d. Phys. 3, 277, 1929.

*Zusammenfassung.* Die Energie-Reichweitenbeziehung wurde für  $\alpha$ -Strahlen von 0 bis 2 cm Reichweite bestimmt. Die Meßwerte liegen, in Übereinstimmung mit Messungen von Holloway und Livingston, bei etwas höheren Energiewerten, als sie die Livingston-Bethesche Kurve, die allgemein als gültig angesehen wird, angibt. In Fig. 3 ist die nach unseren Messungen gewonnene Energie-Reichweitenkurve für Reichweiten zwischen 0 und 2 cm wiedergegeben.

Herrn Prof. Dr. H. Geiger danken wir für die Möglichkeit, in seinem Institut arbeiten zu dürfen. Ein Teil der Apparate, sowie das benutzte Präparat stammten aus Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft. Einer von uns (D. Hacman) ist dem Rumänischen Unterrichtsministerium und der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg für die Ermöglichung seines Aufenthaltes als Austauschassistent Rumäniens am Physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Dank verpflichtet.

*Berlin-Charlottenburg, Juli 1942.*

---

## Über die Absorption von Neutronen in wässrigen Lösungen\*).

Von O. Haxel und H. Volz in Berlin-Charlottenburg.

Mit 10 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Die Aktivität wässriger Silbernitratlösungen wird in Abhängigkeit von der Silberkonzentration sowie in Abhängigkeit von der zugesetzten Cadmiummenge untersucht. Aus den Messungen lassen sich Vergleichswerte für die thermischen Absorptionsquerschnitte von Cadmium, Wasserstoff und Silber gewinnen. Setzt man für Cadmium den Wert  $\sigma_{\text{Cd}} = 3300 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , so ergibt sich  $\sigma_{\text{H}} = 0,24 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{Ag}} = 55 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Ferner wird die Einfangwahrscheinlichkeit der Neutronen im Resonanzgebiet des Silbers untersucht und proportional zu der Wurzel aus der Silberkonzentration gefunden. In einer Silberlösung von 100 g  $\text{AgNO}_3$  auf 300 g  $\text{H}_2\text{O}$  werden 32% aller von der Quelle ausgehenden Neutronen bereits im Resonanzgebiet eingefangen. Die theoretische Betrachtung zeigt, daß die Resonanzeinfangung in mehreren Linien erfolgt.

1. *Einleitung.* Die Wirkungsquerschnitte von Atomkernen gegenüber langsamen Neutronen lassen sich aus der Schwächung bestimmen, die ein Neutronenstrahl beim Durchgang durch eine Schicht der betreffenden Substanz erfährt. Man erhält auf diese Weise den Gesamtquerschnitt, d. h. die Summe aus dem Streu- und dem Einfangquerschnitt. Für diejenigen Stoffe, die bei der Neutronenanlagerung radioaktiv werden, lassen sich mit Hilfe von Aktivitätsmessungen auch Vergleichswerte für die Einfangquerschnitte allein gewinnen. Im folgenden werden Messungen an Silber- und Cadmiumnitratlösungen beschrieben, welche die Möglichkeit bieten, die Einfangquerschnitte dieser Stoffe unmittelbar mit dem des Wasserstoffs zu vergleichen, welcher letzterer bisher nur indirekt aus der Diffusionslänge langsamer Neutronen in wasserstoffhaltigen Substanzen berechnet wurde. Als zweites wird in den folgenden Messungen derjenige Bruchteil aller von der Neutronenquelle emittierten Neutronen bestimmt, welcher im Resonanzgebiet des Silbers, also schon vor Erreichen thermischer Energie, eingefangen wird. In Lösungen hängt dieser Bruchteil nicht, wie bei Messungen an festen Substanzen, von der zufälligen Geometrie der Meßanordnung, sondern nur noch von den physikalischen Konstanten der absorbierenden Kerne und ihrer Konzentration in der Lösung ab. Mit Hilfe der von Furry<sup>1)</sup> für diesen Zusammenhang hergeleiteten theoretischen

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> W. H. Furry, Phys. Rev. 51, 592, 1937.

Formeln lassen sich aus unseren Messungen Aussagen gewinnen über die charakteristischen Konstanten der Resonanzlinie des Silbers, also über die Resonanzenergie, den Resonanzwirkungsquerschnitt und die Breite der Resonanzlinie.

2. Versuchsanordnung und Meßmethode. Fig. 1 zeigt die Versuchsanordnung. Zur Aktivierung wird die Silberlösung in das kugelförmige Glasgefäß  $G_1$  ( $r_0 = 4$  cm) gebracht, in dessen Mittelpunkt die Neutronenquelle  $P$ , ein  $Rn$ -Be-Präparat von etwa 30 mc Stärke, an einem feinen Nickeldraht aufgehängt ist. Die Kugel selbst befindet sich in einem großen Wassergefäß, der Kugelhals ist während der Exposition mit einem passenden Paraffinzylinder ausgefüllt. Nach beendeter Exposition wird die aktivierte Lösung in das zylindrische Glasgefäß  $G_2$  gegossen, in das axial das Zählrohr  $Z$

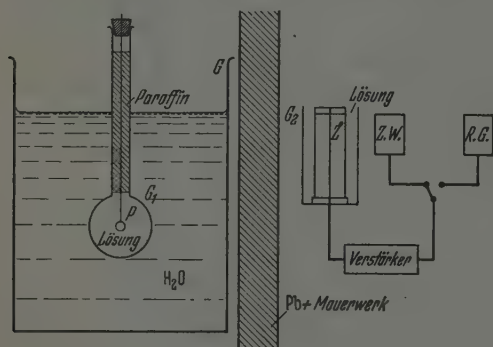


Fig. 1. Versuchsanordnung.

eingebaut ist. Die Wand des Zählrohrs besteht aus einer dünnen Al-Folie, die auf der Außenseite zum Schutz gegen die chemische Wirkung der Lösung mit einer dünnen Wachsschicht überzogen ist. Die Impulse des Zählrohrs werden über einen Verstärker auf ein mechanisches Zählwerk (Z.W.), oder, bei Messungen mit

sehr hohen Teilchenzahlen, auf ein Registriergalvanometer (R.G.) gegeben, das direkt einen durch die Zählrohrimpulse ausgelösten und durch Kondensatoren und Widerstände geglätteten Strom anzeigt.

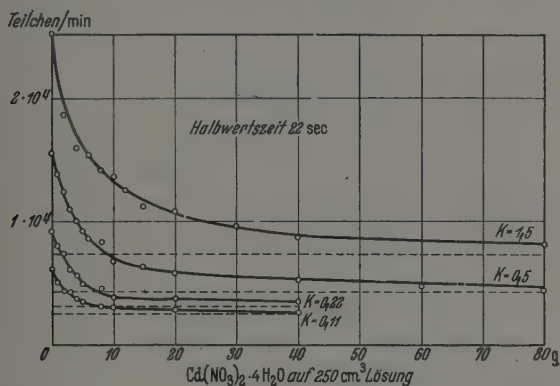
Die Silbernitratlösungen wurden durch Auflösen von festem  $AgNO_3$  in Wasser hergestellt. Es wurden folgende Konzentrationen verwendet:

Konzentration	$K =$	0,11	0,22	0,50	1,00	1,50
Gramm $AgNO_3$ auf 300 cm <sup>3</sup> $H_2O$		11	22	50	100	150

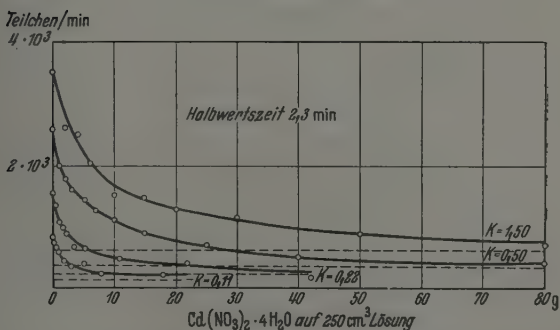
Zur Fällung der Kugel wurden 250 cm<sup>3</sup> benötigt. Um den thermischen Anteil der Aktivität von dem Resonanzanteil zu trennen, wurden den Lösungen wachsende Mengen von Cadmiumnitrat zugesetzt. Da Cadmium thermische Neutronen sehr stark absorbiert, verbleibt bei hohen Cd-Zu-

sätzen nur noch der von den Resonanzneutronen herrührende Anteil der Aktivität. Um die bei Silber auftretenden zwei Halbwertszeiten voneinander trennen zu können, wurden die Lösungen je einmal 20 Sekunden und einmal 15 Minuten lang exponiert und aus den beiden Meßwerten die Anfangsaktivitäten für die beiden Halbwertszeiten, umgerechnet auf unendlich lange Exposition, berechnet. Korrekturen wurden angebracht für den Abfall der Rn-Be-Quelle und das endliche Auflösungsvermögen des Zählwerks<sup>1)</sup>.

Die so gewonnenen Anfangsaktivitäten, umgerechnet auf unendlich lange Exposition, entsprechen der Zahl der innerhalb der Kugel pro Sekunde absorbierten Neutronen, die zu der betreffenden Aktivität führen, und stellen die Zahlen dar, die wir der weiteren Auswertung zugrunde legen.



a) Die 22-Sekunden-Halbwertszeit.



b) Die 2,3-Minuten-Halbwertszeit.

Fig. 2. Die Aktivität von Silbernitratlösungen verschiedener Konzentration in Abhängigkeit von der zugesetzten Cadmiummenge.

<sup>1)</sup> H. Volz, ZS. f. Phys. 93, 539, 1935.



3. *Meßergebnisse.* Der Verlauf der Anfangsaktivität für die verschiedenen Silberlösungen in Abhängigkeit von der zugesetzten Cadmiummenge ist für die 22-Sekunden-Halbwertszeit in Fig. 2 a, für die 2,3-Minuten-Halbwertszeit in Fig. 2 b dargestellt. Wie zu erwarten, ergibt der Cadmiumzusatz, da er die thermischen Neutronen wegabsorbiert, bei beiden Halbwertszeiten einen anfänglich raschen, später langsameren Abfall der Aktivität, der für hohe Cadmiumkonzentrationen in einen nahezu horizontalen Verlauf

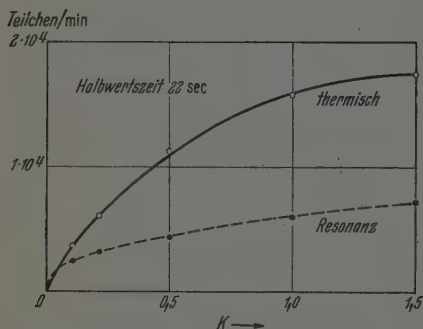


Fig. 2. Aktivität der 22-Sekunden-Komponente in Abhängigkeit von der Konzentration. Die ausgezogene Kurve stellt den thermischen, die gestrichelte den Resonanzanteil dar

übergeht. Wie im nächsten Abschnitt auseinandergesetzt wird, sind die zu erwartenden Kurven Hyperbeln, deren horizontale Asymptoten in der Figur gestrichelt eingezeichnet sind. Der oberhalb derselben liegende Anteil der Aktivität ist der thermische, der unterhalb liegende der Anteil der Resonanzaktivität. Messungen bei sehr hohen Cd-Zusätzen (bis 120 g bei  $K = 0,5$ ) ergaben, daß der letztere durch den Cd-Zusatz

praktisch nicht beeinflußt wird. Der Abfall, der auf Grund der „Verdünnung“ der Lösung durch den Cd-Zusatz erwartet werden kann, ist geringfügig und in den Figuren bei der Einzeichnung der Asymptoten berücksichtigt.

Wie man aus Fig. 2 a ersieht, weist die 22-Sekunden-Halbwertszeit einen starken Resonanzanteil auf. Doch macht auch bei der 2,3-Minuten-Halbwertszeit der Resonanzanteil noch einen merklichen Bruchteil der Gesamtaktivität aus (Fig. 2 b).

Der Zusammenhang zwischen der Aktivität der verschiedenen Silbernitratlösungen und ihrer Konzentration ohne Zusatz von Cadmium ist in Fig. 3 dargestellt. Wie man sieht, steigt die thermische Aktivität bei kleinen Konzentrationen zunächst linear, bei höheren Konzentrationen jedoch wesentlich schwächer mit der Konzentration an, so daß weiterer Silberzusatz nur noch einen schwachen Anstieg der Aktivität zur Folge hat. Ein solches Verhalten ist zu erwarten, da für die sekundliche Absorption nur eine begrenzte, durch die Stärke der Neutronenquelle bestimmte Zahl von Neutronen zur Verfügung steht. Bei Erhöhung der Konzentration strebt die Aktivität einem durch diese Zahl bestimmten Grenzwert zu. Der Verlauf der Resonanzaktivität wird in Abschnitt 6 näher besprochen.

4. *Der theoretische Verlauf der thermischen Aktivität.* Zur Vereinfachung der Bezeichnung nehmen wir in diesem Abschnitt an, es seien in der Lösung nur H-Atome, Ag-Atome und Cd-Atome vorhanden, die für thermische Neutronen die Einfangquerschnitte  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  haben. Die entsprechenden Atomzahlen pro  $\text{cm}^3$  seien  $n_0$ ,  $n_1$  und  $n_2$ , und es sei  $n_i \sigma_i = \gamma_i$ . Ein thermisches Neutron, das sich in der Lösung befindet, hat dann die Wahrscheinlichkeit  $\gamma_1 / \Sigma \gamma_i$ , in einem Silberatom absorbiert zu werden. Von  $N$  Neutronen, die pro Sekunde in der Lösung absorbiert werden, werden also

$$N \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2}$$

Neutronen im Silber absorbiert und tragen zu der gemessenen Aktivität  $A$  bei. Bis auf eine zunächst unwesentliche Konstante können wir also setzen

$$A = N \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2} \quad (1)$$

In einer unendlich ausgedehnten Lösung, in der keine Resonanzabsorption stattfindet, ist die Zahl der insgesamt absorbierten thermischen Neutronen einfach gleich der Zahl der von der Quelle emittierten Neutronen, also eine von der Konzentration unabhängige Konstante. Da unsere mit Lösung gefüllte Kugel nur eine endliche Größe hat, wird in ihr nur ein gewisser Bruchteil aller Neutronen absorbiert. Dieser Bruchteil ist jedoch nicht konstant, sondern hängt von der Konzentration ab. Durch das Einbringen von absorbierender Lösung in die Kugel werden nämlich viele Neutronen, die bei Wasserfüllung in den Außenraum gelangt wären, bereits in der Kugel absorbiert. Die Zahl  $N$  der in der Kugel absorbierten Neutronen wächst daher mit steigender Konzentration an. Wenn man vom Einfluß der Resonanzabsorption zunächst absieht, läßt sich die Zahl  $N$  in Abhängigkeit vom Gesamtabsorptionskoeffizienten  $\Gamma = \Sigma \gamma_i$  der Lösung berechnen. Diese Berechnung ist im Anhang durchgeführt, ihr Ergebnis ist in Fig. 4 dargestellt.

Man sieht, wie mit steigendem Absorptionsquerschnitt, d. h. mit steigender Konzentration, die Zahl  $N$  zunimmt, und bei extrem hoher Absorption nahezu viermal so groß wird wie bei wassergefüllter Kugel, für die die Absorption gleich 1 gesetzt wurde.

Die gestrichelte Kurve stellt den Anteil derjenigen Neutronen an der Absorption in der Kugel dar, welche sich schon als Resonanzneutronen im Kugellinnern befanden.

Wir können nunmehr den Verlauf der Aktivität in Abhängigkeit von der Konzentration nach Gleichung (1) vollständig angeben und tun dies für folgende zwei Spezialfälle:

1. Abhängigkeit der (thermischen) Aktivität von Silberlösungen von der Silberkonzentration, ohne Cadmiumzusatz;
2. Abhängigkeit der Silberaktivität vom Cadmiumzusatz. Dabei soll der Silberzusatz als klein angesehen werden und nur als Indikator dienen.

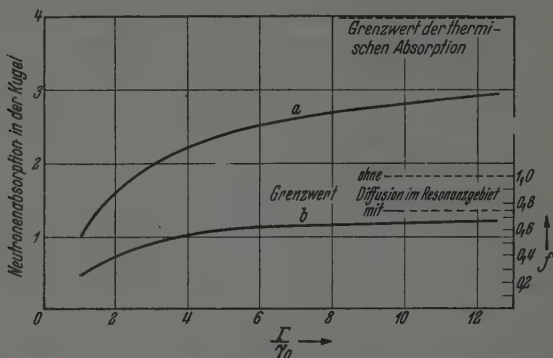


Fig. 4. Zahl der im Innern der Kugel von 4 cm Radius absorbierten Neutronen in Abhängigkeit vom Gesamtabsorptionskoeffizienten der Lösung.

Im ersten Falle wird die Aktivität  $A = N (\gamma_1) \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1}$ . Um einen Einblick in den Verlauf dieses Ausdrucks zu erhalten, beachten wir folgendes: Wäre  $N$  eine Konstante, so würde zwischen  $1/A$  und  $1/\gamma_1$  ein linearer Zusammenhang bestehen, wie er durch die gestrichelte Gerade in Fig. 5 dargestellt ist. Wir fragen uns nun, was aus dieser Geraden wird, wenn wir die Abhängigkeit von  $N$  von der Konzentration berücksichtigen, wie sie durch Fig. 4 dargestellt ist. Führen wir die Rechnung durch, so erhalten wir die in Fig. 5 durch Kreise gekennzeichneten Punkte, die überraschenderweise in dem uns interessierenden Bereich wiederum mit sehr guter Annäherung auf einer Geraden liegen. Als Gleichung dieser Geraden entnehmen wir der Figur:

$$\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{N_0} \cdot \left(0,26 + 0,94 \gamma_0 \left(\frac{1}{\gamma_1}\right)\right). \quad (2)$$

$N_0$  ist dabei die Zahl von Neutronen, die bei Wasserfüllung im Kugellinnern absorbiert wird, also in den Einheiten der Fig. 4 gleich eins.

Die Gesamtzahl der pro Sekunde, sei es durch Diffusion von außen oder durch Verlangsamung im Innern, neu in die Kugel gelangenden thermischen Neutronen ist nach Fig. 4 gleich  $3,97 \cdot N_0$ , nämlich gleich der Zahl der bei unendlich hoher Konzentration in der Kugel absorbierten Neutronen. Wenn wir dies beachten und den Zusammenhang (2) in der Form schreiben

$$A = \frac{N_0}{0,26} \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 3,62 \gamma_0} = 3,85 \cdot N_0 \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1 + 2,62 \gamma_0}, \quad (2')$$

läßt sich dieser Beziehung eine sehr hübsche und anschauliche Deutung geben: Der Faktor  $3,85 N_0 \approx 3,97 \cdot N_0$  ist die Zahl der pro Sekunde in der Kugel entstehenden thermischen Neutronen. Wir wissen, daß jedes dieser Neutronen entweder durch Absorption in H oder in Ag oder aber durch Hinausdiffusion verschwinden kann, und sehen aus (2'), daß wir den letzteren Vorgang einfach dadurch erfassen können, daß wir der Kugeloberfläche einen „Einfangquerschnitt“ der Größe  $2,62 \gamma_0$  zuschreiben.

Für den Schnittpunkt der Geraden (2) erhalten wir

$$\gamma_1 = 3,62 \cdot \gamma_0, \quad (3)$$

wir können also aus der Lage dieses Schnittpunktes bei bekanntem  $\gamma_0$  sofort  $\gamma_1$  und damit auch  $\sigma_1$  bestimmen. Dabei ist es, wie auch in dem nachher zu besprechenden Fall 2, ganz gleichgültig, welche der beiden Halbwertszeiten wir zur Auswertung heranziehen, da der Kurvenverlauf nur von dem Gesamtwirkungsquerschnitt  $\gamma_1$  der beiden Komponenten abhängt.

Im Falle 2, Abhängigkeit der Aktivität vom Cadmiumzusatz, wird für  $\gamma_1 \ll \gamma_0, \gamma_2$  die Aktivität

$$\begin{aligned} A &= N \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2} = N \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_2} = f(\gamma_0 + \gamma_2) \cdot \frac{\gamma_1}{\gamma_0 + \gamma_2} \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \cdot f(\gamma_0 + \gamma_2) \cdot \frac{\gamma_2}{\gamma_0 + \gamma_2}. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Faktoren ergeben wie vorhin die rechte Seite von (2'), nur daß die Variable jetzt  $\gamma_2$  heißt. Fügen wir den ersten Faktor noch hinzu, so erhalten wir

$$A = 3,85 \cdot N_0 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{1}{3,62 \gamma_0 + \gamma_2}. \quad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen  $A$  und  $\gamma_2$  ist hier also ein reziproker, der Abfall der Aktivität in Abhängigkeit vom Cadmiumzusatz wird also durch Hyperbeln dargestellt, was auch durch die Experimente bestätigt wurde.

Den Abfall der Aktivität auf den halben Wert erhalten wir für

$$\gamma_2 (\text{Halbw.}) = 3,62 \cdot \gamma_0. \quad (5)$$

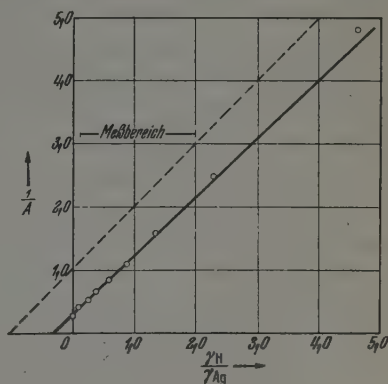


Fig. 5. Zusammenhang zwischen reziproker Aktivität und reziproker Konzentration (theoretisch).

Der Fall, daß Cadmium und Silber in vergleichbaren Mengen in der Lösung vorhanden sind, läßt sich in einfacher Weise ganz entsprechend behandeln.

Bei den bisherigen Überlegungen haben wir von der Resonanzabsorption ganz abgesehen. Dies ist im Falle 2, wenn wir eine verschwindend kleine Silberkonzentration annehmen, gerechtfertigt. Im Falle 1, also bei wachsender Silberkonzentration, tritt jedoch in steigendem Maße eine Absorption von Neutronen in der Resonanzstelle des Silbers auf, die bei der Auswertung der Resultate berücksichtigt werden muß. Dies kann auf Grund der von uns gemessenen Resonanzaktivität geschehen, wie im nächsten Abschnitt ausgeführt werden soll.

5. *Auswertung der Meßergebnisse.* Wenn wir den Kurven in Fig. 2a und 2b die Cadmiummengen entnehmen, die zu einem Abfall der thermischen Aktivitäten auf die Hälfte des Anfangswertes führen, und sie in Abhängigkeit von der zugehörigen Silberkonzentration auftragen, erhalten wir Fig. 6. Man sieht, daß die Cadmiumhalbwertsmenge um so größer ist, je mehr Silber in der Lösung enthalten ist. Indem wir den durch die Meßpunkte gegebenen Zusammenhang auf Silberkonzentration Null extrapolieren, haben wir die Möglichkeit, den Wirkungsquerschnitt des Cadmiums mit dem des Wasserstoffs zu vergleichen. Wir finden nämlich auf diese Weise

$$n_{\text{Cd}} (\text{Halbw.}) \sim 2,2 \text{ g Cd} (\text{NO}_3)_2 \cdot 4 \text{ H}_2\text{O} \text{ auf } 250 \text{ g H}_2\text{O},$$

also

$$\frac{n_{\text{Cd}}}{n_{\text{H}}} = \frac{2,2}{310} / 250 \cdot \frac{2}{18}.$$

Andererseits ist nach Gleichung (5) in diesem Fall  $\gamma_{\text{Cd}} = 3,62 \gamma_{\text{H}}$ . Durch Kombination der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\frac{\sigma_{\text{Cd}}}{\sigma_{\text{H}}} = 3,62 \cdot \frac{310 \cdot 250 \cdot 2}{2,2 \cdot 18} = 14\,100.$$

Setzen wir für  $\sigma_{\text{Cd}}$  den von Dunning und Mitarbeitern<sup>1)</sup> bestimmten Wert  $3300 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  ein, so erhalten wir für den Wirkungsquerschnitt des Wasserstoffs

$$\sigma_{\text{H}} = 0,235 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Dieser Wert ist in Übereinstimmung mit dem Ergebnis von Frisch, v. Halban und Koch<sup>2)</sup> wesentlich niedriger als der ursprünglich von Amaldi und Fermi<sup>3)</sup> angegebene Wert  $\sigma_{\text{H}} = 0,81 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ .

<sup>1)</sup> I. R. Dunning, G. B. Pegram, G. A. Fink u. D. P. Mitchell, Phys. Rev. **48**, 265, 1935. — <sup>2)</sup> O. R. Frisch, H. v. Halban u. J. Koch, Medd. Kopenhagen **15**, Nr. 10, 1938. — <sup>3)</sup> E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. **50**, 899, 1936.

Um den Wirkungsquerschnitt des Silbers zu bestimmen, tragen wir zunächst die in Fig. 3 dargestellten Meßwerte für die thermische Aktivität der 22-Sekunden-Komponente in der Form  $1/A = f(1/K)$  auf und erhalten so die in Fig. 7 durch Kreise gekennzeichneten Punkte. Man sieht, daß sich diese mit guter Näherung auf einer Geraden anordnen. Dies ist nach den Ausführungen des vorigen Abschnitts zu erwarten, wenn nur thermische Absorption vorliegt, muß jedoch hier bei der starken Resonanzabsorption

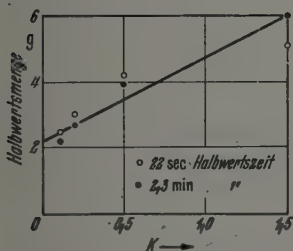


Fig. 6. Cadmiumhalbwertsmenge für verschiedene Silberkonzentrationen.

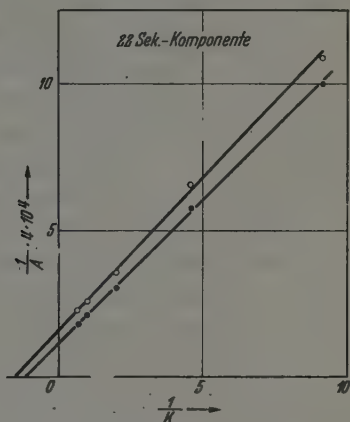


Fig. 7. Der experimentelle Zusammenhang zwischen reziproker Aktivität und reziproker Konzentration. Kreise: Meßwerte ohne Korrektur, volle Punkte: mit Korrektur für Resonanzabsorption.

als unerwartet angesprochen werden. Immerhin können wir nach den Methoden des vorigen Abschnitts aus dem Schnittpunkt der Geraden mit der Abszissenachse einen Wirkungsquerschnitt entnehmen, den wir wenigstens näherungsweise als richtig ansehen können. Aus der Konzentration  $K = 1/1,5$ , die dem Schnittpunkt entspricht, ergibt sich nach (8)

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_H} = 3,62 \text{ für } 66,7 \text{ g AgNO}_3 \text{ auf } 300 \text{ g H}_2\text{O}$$

und damit näherungsweise

$$\sigma_1 = 73 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Den so erhaltenen Näherungswert benutzen wir nun dazu, um den Einfluß der Resonanzabsorption auf die Absorption im thermischen Gebiet zu berechnen. Dazu brauchen wir zunächst das Verhältnis der beobachteten Resonanzabsorption zur gesamten thermischen Absorption innerhalb der Kugel. Diese erhalten wir, indem wir zu der Absorption im Silber mit Hilfe



der nunmehr (näherungsweise) bekannten Wirkungsquerschnitte diejenige im Wasser hinzufügen. Der oben bestimmte Silberwirkungsquerschnitt ist nun aber der Gesamtquerschnitt für beide Halbwertszeiten (bzw. der Mittelwert für die beiden Silberisotope). Da sich Resonanz- und thermischer Anteil auf die beiden Komponenten verschieden aufteilen und die Härte der beiden  $\beta$ -Strahlungen verschieden ist, müssen wir zunächst das wahre, d. h. den Einzelwirkungsquerschnitten der beiden Isotope entsprechende Verhältnis der beiden Silberaktivitäten bestimmen. Dazu wurde eine sehr dünne Silberfolie aktiviert und dann mit einem Zählrohr ausgemessen, dessen Wandung ebenfalls aus einer sehr dünnen Silberfolie bestand, so daß die Absorption der  $\beta$ -Strahlen in der Zählerwand und in der aktivierten Schicht keine Rolle spielte. Es ergab sich so für das wahre Verhältnis der beiden thermischen Aktivitäten der Wert 3,05 : 1, während die Messungen an Lösungen den Wert 5,4 : 1 ergaben. Um den Ausbeutefaktor zu eliminieren und die beiden Komponenten vergleichbar zu machen, können wir also beispielsweise die 2,3-Minuten-Komponente mit dem Faktor 5,4 : 3,05 multiplizieren. Wenn wir die so umgerechneten Werte der Resonanz- bzw. thermischen Aktivitäten der 2,3-Minuten-Komponente zu den entsprechenden Anteilen der 22-Sekunden-Komponente addieren, erhalten wir die in Zeile 1 und 2 der Tabelle 1 angegebenen Werte. Die gesamte thermische Absorption in der Kugel erhalten wir, indem wir die Werte von Zeile 1 mit  $(\gamma_{\text{H}_2\text{O}} + \gamma_{\text{Ag}})/\gamma_{\text{Ag}}$  multiplizieren. Wir erhalten so die in Zeile 3 eingetragenen Zahlen, die naturgemäß ebenfalls nur erste Näherungswerte darstellen.

Tabelle 1.

	Konzentration $K =$	0,11	0,22	0,50	1,00	1,50
1	Therm. Aktivität $A_1 + \frac{5,4}{3,05} A_2$	4,95	8,42	15,25	21,90	$22,70 \cdot 10^3$
2	Resonanzaktivität $A_1 + \frac{5,4}{3,05} A'_2$	2,78	3,55	5,02	7,01	$8,6 \cdot 10^3$
3	Ges. therm. Absorption in der Kugel	13,4	15,6	20,9	26,0	$25,5 \cdot 10^3$
4	Bruchteil	0,356	0,425	0,548	0,625	0,643
5	Korr. gesamte therm. Absorption	14,4	17,1	23,65	30,4	$31,0 \cdot 10^3$
6	Korr. Anteil der 22-Sek.-Aktivität	4,0	6,96	12,94	19,2	$20,8 \cdot 10^3$

Nunmehr fragen wir uns, um welchen Betrag sich die thermische Absorption erhöhen würde, wenn keine Resonanzabsorption vorhanden wäre. Dies ist nicht der volle Betrag der in Zeile 2 stehenden Resonanzaktivität, da ein Teil der betreffenden Resonanzneutronen die Kugel entweder schon im Resonanzgebiet oder als thermische Neutronen verlassen hätte und damit der Beobachtung entgangen wäre. Derjenige Bruchteil  $f$  dieser Neutronen, der tatsächlich innerhalb der Kugel zur thermischen Absorption beiträgt, hängt wiederum von der Konzentration ab und ist aus Fig. 4 zu ersehen. In Zeile 4 der Tabelle 1 sind die unseren Konzentrationen entsprechenden Werte von  $f$  aufgeführt. Mit diesen multiplizieren wir die Werte von Zeile 2 und fügen sie zu den Werten der Zeile 3 hinzu. Damit erhalten wir den Betrag der thermischen Absorption, wie er bei fehlender Resonanzabsorption vorhanden wäre (Zeile 5 der Tabelle 1). Wenn wir davon wieder den Anteil der 22-Sekunden-Komponente abspalten, erhalten wir die Zahlen der Zeile 6, deren Reziprokwerte als korrigierte Meßwerte (volle Punkte) wiederum in Fig. 7 eingetragen sind. Wie es sein muß, liegen diese Punkte auf einer Geraden. Aus dem Schnittpunkt dieser Geraden mit der Abszissenachse entnehmen wir wie oben nunmehr den verbesserten Wert  $\sigma_1 = 56,5 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Führen wir, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, mit diesem genaueren Wert von neuem die in der Tabelle 1 dargestellte Rechnung durch, so erhalten wir entsprechend für den Wirkungsquerschnitt den Wert  $56,0 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , der sich innerhalb unserer Meßgenauigkeit nicht mehr von demjenigen der vorhergehenden Näherung unterscheidet. Wir können diesen Wert daher als den endgültigen ansehen. Da wir gleichzeitig mit jedem Silberatom noch ein Stickstoff- und drei Sauerstoffatome der Lösung zugefügt haben, entspricht der hier bestimmte Wirkungsquerschnitt der Kombination  $\sigma_{\text{Ag}} + \sigma_{\text{N}} + 3\sigma_{\text{O}}$ , wobei, wie schon erwähnt,  $\sigma_{\text{Ag}}$  den Mittelwert der beiden Silberisotope darstellt und  $\sigma_{\text{O}}$  wegen seiner Kleinheit keine Rolle spielt. Wir haben also

$$\sigma_{\text{Ag}} + \sigma_{\text{N}} = (56 \pm 5) \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Bei dem hier bestimmten Wert handelt es sich um den reinen Absorptionsquerschnitt. Bisherige Messungen ergeben entweder den Gesamt- (Absorptions- + Streu-) Querschnitt<sup>1)</sup>, oder den Streuquerschnitt allein<sup>2)</sup>. Für Stickstoff wurde ferner, ebenfalls durch Messungen an Lösungen, der reine Absorptionsquerschnitt bestimmt<sup>3)</sup>. Die Kombination dieser Mes-

<sup>1)</sup> M. Goldhaber u. G. H. Briggs, Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 127, 1937. — <sup>2)</sup> A. C. G. Mitchell, E. I. Murphy u. M. D. Whitaker, Phys. Rev. **50**, 133, 1936. — <sup>3)</sup> C. Lapointe u. F. Rasetti, Phys. Rev. **58**, 554, 1940.

sungen läßt auf einen reinen Absorptionsquerschnitt des Silbers zwischen  $51$  und  $56 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , auf einen solchen des Stickstoffs zwischen  $1$  und  $2 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  schließen, was in bester Übereinstimmung mit unseren Messungen steht und gleichzeitig nochmals unseren Wert für den Einfangquerschnitt des Wasserstoffs bestätigt.

6. *Die Absorption im Resonanzgebiet.* Jedes Neutron, das in der Silberlösung verlangsamt wird, hat eine gewisse Wahrscheinlichkeit  $w$  dafür, daß es schon vor Erreichen des thermischen Gebietes in einer Resonanzstelle des Silbers absorbiert wird. In einer unendlich ausgedehnten Lösung ist  $w$  daher gleich dem Verhältnis der Resonanzabsorption zur gesamten (Resonanz- + thermischen) Absorption. Die Bestimmung der Größe  $w$  aus unseren Messungen wird etwas komplizierter, da der im Kugellinnern befindliche Bruchteil für die Resonanz- und für die thermischen Neutronen verschieden ist.

In Zeile 1 und 2 der Tabelle 2 sind zunächst nochmals die experimentellen Daten eingetragen. In Zeile 1 steht die beobachtete Resonanzaktivität, aufgeteilt in die Anteile der beiden Halbwertszeiten, wobei die 2,3-Minuten-Halbwertszeit wieder mit dem Ausbeutefaktor 5,4/3,05 multipliziert ist, um die verschiedene Härte der  $\beta$ -Strahlen zu eliminieren. Die zweite Zeile enthält die gesamte thermische Absorption innerhalb der Kugel, jetzt aber, im Gegensatz zu Tabelle 1, Zeile 3, mit dem exakten Wert des Silbereinfangquerschnitts berechnet.

Tabelle 2.

	Konzentration $K =$	0,11	0,22	0,50	1,00	1,50
1	Resonanz-aktivität $\left\{ \begin{array}{l} 22''\text{-Komp.} \\ 2,3'\text{-Komp.} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 2,5 \\ 0,28 \end{array}$	$\begin{array}{l} 3,15 \\ 0,40 \end{array}$	$\begin{array}{l} 4,3 \\ 0,72 \end{array}$	$\begin{array}{l} 6,1 \\ 0,9 \end{array}$	$\begin{array}{l} 7,4 \\ 1,2 \end{array} (\cdot 10^3)$
	zus.	2,78	3,55	5,02	7,0	$8,6 (\cdot 10^3)$
2	Therm. Absorption . . .	15,7	17,6	22,5	27,2	26,4
3	Resonanzabsorption (theoretisch) . . . . .	$1,82 w$	$1,82 w$	$1,82 w$	$1,82 w$	$1,82 w$
4	Therm. Absorption (theoretisch) . . . . .	$1,33$ $-0,62 w$	$1,58$ $-0,72 w$	$2,02$ $-0,93 w$	$2,43$ $-1,11 w$	$2,66$ $-1,13 w$
5	Res.-Einfangwahr- scheinl. $\left\{ \begin{array}{l} 22''\text{-Komp.} \\ 2,3'\text{-Komp.} \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} 0,11 \\ 0,01 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,14 \\ 0,02 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,19 \\ 0,03 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,28 \\ 0,04 \end{array}$	$\begin{array}{l} 0,33 \\ 0,05 \end{array}$
	$w =$ zus.	0,12	0,16	0,22	0,32	0,38

Um  $w$  zu bestimmen, gehen wir so vor, daß wir die in den beiden ersten Zeilen angegebenen Zahlen nunmehr, allerdings in anderen Einheiten, auch theoretisch in Abhängigkeit von  $w$  angeben; und durch Vergleich der

so gewonnenen Verhältniszahlen mit den experimentellen Werten  $w$  bestimmen.

Wir betrachten dazu die Kurve  $b$  der Fig. 4, die den Beitrag der im Kugellinnern befindlichen Resonanzneutronen zur thermischen Absorption in der Kugel angibt. Der obere Grenzwert dieser Kurve stellt den Beitrag dar, den die Resonanzneutronen liefern würden, wenn sie ohne jede Diffusion auf der Stelle thermisch und dann sofort absorbiert würden, er ist einfach gegeben durch die Gesamtzahl aller überhaupt in der Kugel befindlichen Resonanzneutronen, deren Anzahl demnach in den Einheiten der Figur 1,82 beträgt. Wenn der Bruchteil  $w$  von diesen wegabsorbiert wird, sind dies also in unseren Einheiten  $1,82 \cdot w$  Neutronen. Dieser Betrag ist in Zeile 3 der Tabelle 2 eingetragen, und entspricht der beobachteten Resonanzaktivität. Die thermische Absorption in der Kugel entnehmen wir der Kurve  $a$  in Fig. 4, die wir jedoch wegen des Vorhandenseins der Resonanzabsorption um das  $w$ -fache der Kurve  $b$  vermindern müssen. Die so gewonnenen Werte sind für die in Frage kommenden Konzentrationen in Zeile 4 der Tabelle eingetragen.

Indem wir das Verhältnis der Zahlen in der ersten und in der zweiten Zeile gleich dem Verhältnis der Zahlen in der dritten und vierten Zeile setzen, gewinnen wir für die beiden Komponenten die in Zeile 5 eingetragenen Werte für  $w$ .

Die so gewonnenen Werte für die Einfangwahrscheinlichkeit diskutieren wir nun an Hand des von Furry<sup>1)</sup> hergeleiteten theoretischen Ausdrucks. Unter der Annahme, daß die Resonanzeinfangung in einer einzigen Linie vom Breit-Wignerschen Typus erfolgt, findet Furry für die Einfangwahrscheinlichkeit  $w$  den Ausdruck

$$w = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma}{E_r} \cdot \frac{\frac{N_{Ag} \sigma_r}{N_H \sigma_H}}{\sqrt{1 + \frac{N_{Ag} \sigma_r}{N_H \sigma_H}}} \quad (6)$$

Darin bedeuten  $\Gamma$  die Linienbreite,  $E_r$  die Resonanzenergie und  $\sigma_r$  den Resonanzwirkungsquerschnitt des Silbers und  $\sigma_H = 14 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  den Streuquerschnitt des Wasserstoffs für die betreffende Neutronenenergie.

Für den Fall, daß  $N_{Ag} \sigma_r$  groß gegen  $N_H \sigma_H$  ist, d. h. für den Fall hoher Silberkonzentrationen, wird

$$w \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma}{E_r} \cdot \sqrt{\frac{N_{Ag} \sigma_r}{N_H \sigma_H}} \quad (7)$$

<sup>1)</sup> W. H. Furry, Phys. Rev. 51, 592, 1937.

d. h. die Einfangwahrscheinlichkeit wächst mit der Wurzel aus der Konzentration an. Um dies nachzuprüfen, tragen wir in Fig. 8 die Größe  $w$  für die beiden Komponenten in Abhängigkeit von der Wurzel aus der Konzentration auf. Tatsächlich besteht für die 22-Sekunden-Komponente die nach (7) zu erwartende Proportionalität. Für kleine Konzentrationen wäre nach Gleichung (6) eine Abweichung von der Proportionalität zu erwarten. Da eine solche auch bei der kleinsten, von uns verwendeten Konzentration innerhalb der Fehlergrenzen, die für diesen Punkt allerdings  $\pm 20\%$  betragen, nicht feststellbar ist, müssen wir schließen, daß schon bei dieser Konzentration  $N'_{Ag}\sigma_r$  wenigstens nicht kleiner als  $N_H\sigma_H$  ist, wobei  $N'_{Ag} = 1/2 N_{Ag}$  die Zahl der Silberatome bedeutet, die zu der 22-Sekunden-Aktivität führt. Damit bekommen wir als untere Grenze für den Resonanzwirkungsquerschnitt der 22-Sekunden-Komponente den Wert  $14000 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Eine genauere Bestimmung von  $\sigma_r$  aus dem Intensitätsverlauf bei kleinsten Konzentrationen wurde unterlassen, da hier wegen der geringen Aktivitäten die Meßfehler zu groß werden.

Aus Fig. 8 entnehmen wir  $w = 0,28 \cdot \sqrt{K} = 3,0 \cdot \sqrt{N'_{Ag}/N_H}$ , was in Verbindung mit Gleichung (7)

$$\frac{\Gamma}{E_r} \sqrt{\sigma_r} = A = 7,1 (10^{-12} \text{ cm}) \quad (8)$$

ergibt. Falls die Voraussetzung zutrifft, daß nur eine Resonanzlinie vorhanden ist, bestimmt dieser Zahlenwert im wesentlichen auch die Größe

des thermischen Wirkungsquerschnitts. Es ist nämlich<sup>1)</sup>

$$\sigma_{th} = \left(\frac{E_r}{E_{th}}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{A}{2}\right)^2.$$

Setzen wir in dem ersten Faktor der rechten Seite für  $E_r$  nach Messungen von Coster und Mitarbeitern<sup>2)</sup> den Wert 6,5 e-Volt ein, so ergibt sich mit  $E_{th} = 1/30$  e-Volt:  $\sigma_{th} = 175 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , während wir aus unseren Messungen für dieses

Isotop allein  $\sigma$  (22 Sekunden)  $= 85 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , also nur etwa die Hälfte davon finden. Da wir nicht annehmen können, daß der oben eingesetzte

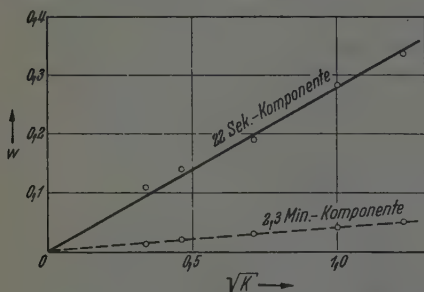


Fig. 8. Einfangwahrscheinlichkeit im Resonanzgebiet des Silbers in Abhängigkeit von der Wurzel aus der Konzentration.

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. H. A. Bethe, Rev. of Mod. Phys. 9, 144, 1937, Gleichung (537). — <sup>2)</sup> D. Coster, H. de Vries, G. Diemer u. P. Noteboom, Physica 8, 825, 1941.



Wert von  $E_r$  um einen Faktor 4 zu klein ist, müssen wir schließen, daß die Annahme einer einzigen Resonanzlinie nicht zutrifft, daß vielmehr mehrere Linien an der Resonanzeinfangung beteiligt sind, von denen jedoch im wesentlichen nur die unterste zum thermischen Wirkungsquerschnitt beiträgt. Die Größe  $A$  in (8) haben wir dann als die Summe der Beiträge aller dieser Linien aufzufassen, wobei etwa 70% auf die tiefste Linie, der Rest auf höhere Linien entfallen.

Auch bei der 2,3-Minuten-Komponente scheint sich bei höheren Konzentrationen ein Gang etwa mit der Wurzel aus der Konzentration einzustellen. Eine genauere Diskussion ist hier nicht möglich, da einmal die Meßgenauigkeit wegen der kleinen Intensitäten geringer und andererseits über die Lage der Resonanzenergie nichts bekannt ist.

**7. Zusammenfassung.** Mit Hilfe von Aktivitätsmessungen an wässrigen Lösungen werden die Absorptionsquerschnitte von Cadmium, Wasserstoff und Silber miteinander verglichen. Setzt man  $\sigma_{\text{Cd}} = 3300 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ , so wird  $\sigma_{\text{H}} = 0,24 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_{\text{Ag}} = 55 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$ . Die Wahrscheinlichkeit der Einfangung von Neutronen im Resonanzgebiet des Silbers wurde untersucht und ergab sich proportional zur Wurzel aus der Silberkonzentration in der Lösung. Der Vergleich der Resonanzabsorption mit der thermischen Absorption des Silbers zeigt, daß an der Resonanzabsorption mehrere Linien beteiligt sein müssen.

### Anhang.

#### Zur Berechnung der Neutronenabsorption im Kugellinnern.

Von H. Volz.

**1. Die Verteilung der thermischen Neutronen.** Wir betrachten eine kugelsymmetrische Anordnung, in deren Zentrum sich die Neutronenquelle befindet. Der Raum  $r < r_0 = 4 \text{ cm}$  sei von wässriger Lösung, der Raum  $r > r_0$  von reinem Wasser erfüllt. Um die Verteilung der thermischen Neutronen zu berechnen, gehen wir aus von der Diffusionsgleichung in ihrer stationären Form

$$D \Delta \varrho - \frac{\varrho}{\tau} + q(r) = 0. \quad (1)$$

Hierin bedeutet  $\varrho$  die Neutronendichte,  $D = \frac{1}{3} \lambda v$  ihre Diffusionskonstante,  $\lambda$  die freie Weglänge,  $\tau$  die mittlere Lebensdauer und  $q(r)$  die Zahl der in einem Abstand  $r$  vom Zentrum pro Sekunde und  $\text{cm}^3$  neu entstehenden



thermischen Neutronen. Führt man durch  $D \cdot \tau = l^2$  die Diffusionslänge  $l$  ein und setzt  $r \cdot \rho = u$ , so wird daraus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{u}{l^2} + \frac{\tau}{l^2} q(r) = 0. \quad (2)$$

Bezeichnen wir die in dem betrachteten Volumen vorhandenen Stoffe mit dem Index  $i$ , ihre Einfangquerschnitte mit  $\sigma_i$  und ihre Streuquerschnitte mit  $\sigma_i^*$ , so ist

$$l = \frac{1}{\sqrt{3 \sum N_i \sigma_i \cdot \sum N_i \sigma_i^*}}. \quad (3)$$

Wegen des großen Streuquerschnittes und der überwiegenden Zahl der H-Atome in den bei unseren Messungen verwendeten Lösungen kann man den zweiten Faktor unter der Wurzel als konstant ansehen, während im ersten Faktor auch die Beiträge der Silber-, Stickstoff- und Cadmiumatome zu berücksichtigen sind. Wenn wir für Wasserstoff die Werte  $\sigma_H = 0,26 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ ,  $\sigma_H^* = 40 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  einsetzen, wird für gewöhnliches Wasser die Diffusionslänge  $l = 2,65 \text{ cm}$ .

Als Quellen für die thermischen Neutronen können wir die Resonanzneutronen ansehen, also Neutronen, die Energien von einigen Volt besitzen. Ihre Verteilung über die verschiedenen Abstände von der Neutronenquelle in Wasser wurde von Amaldi und Fermi<sup>1)</sup> ausgemessen. Ihre Ergebnisse sind durch die ausgezogene Kurve in Fig. 9 dargestellt. Wir können annehmen, daß diese Verteilung sich auch dann einstellt, wenn ein Teil des Wasservolumens durch wässrige Lösung ersetzt wird, wenigstens solange keine Resonanzabsorption in den gelösten Stoffen auftritt. Für die Rechnung müssen wir die experimentelle Verteilung durch eine möglichst einfache mathematische Funktion darstellen, die den Verlauf in der Nähe der Kugeloberfläche ( $r_0 = 4 \text{ cm}$ ) möglichst gut wiedergibt. Diese Forderung läßt sich in befriedigender Weise erfüllen, wenn wir für die Dichte der Resonanzneutronen eine Exponentialfunktion der Form  $e^{-r/l_0}$  ansetzen. In Fig. 9 sind entsprechende Verteilungskurven ( $\sim r^2 e^{-r/l_0}$ ) für verschiedene Werte von  $l_0$  eingezeichnet, wobei der Funktionswert bei  $r_0 = 4 \text{ cm}$  mit dem experimentellen Wert zur Deckung gebracht ist. Die beste Übereinstimmung ergibt sich für  $l_0 = 3,6 \text{ cm}$ , wobei die Abweichungen der so berechneten Verteilungskurve von der experimentellen Kurve in der gleichen Richtung gehen wie diejenigen der wirklich vorhandenen bzw. anzunehmenden Quellenverteilung, die ja nicht exakt mit der Verteilung der

<sup>1)</sup> E. Amaldi u. E. Fermi, Phys. Rev. 50, 899, 1936.

Resonanzneutronen übereinstimmt. Wir rechnen also im folgenden mit der Quellenverteilung

$$q(r) = e^{-r/l_0} \text{ mit } l_0 = 3,6 \text{ cm.} \quad (4)$$

Die Lösung der Gleichung (2) setzt sich zusammen aus der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung im Gebiet  $r < r_0$  (Index 1) bzw.  $r > r_0$  (Index 2):

$$u'_{1,2} = \alpha_{1,2} e^{+\frac{r}{l_{1,2}}} + \beta_{1,2} e^{-\frac{r}{l_{1,2}}}$$

und der partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung

$$u''_{1,2} = [A_{1,2} + r \cdot B_{1,2}] \cdot e^{-\frac{r}{l_0}},$$

wo

$$A = -2 \frac{L^4}{D \cdot l_0}, \quad B = \frac{L^2}{D}, \quad L_{1,2}^3 = \frac{l_0^3 l_{1,2}^3}{l_0^3 - l_{1,2}^3}$$

ist. Bei der Bildung der Gesamtlösung

$$u = u' + u''$$

müssen wir die Grenzbedingungen erfüllen: Endlichkeit von  $\varrho$  bei  $r = 0$  und  $r = \infty$ , Stetigkeit von  $\varrho$  und  $D \cdot \text{grad } \varrho$  bei  $r = r_0$ . Da  $D$  in Wasser und Lösung praktisch denselben Wert hat, führen die beiden letzten Bedingungen zu der Forderung der Stetigkeit von  $u$  und  $\text{grad } u$ . Damit lassen sich die Konstanten  $\alpha_{1,2}$  und  $\beta_{1,2}$  bestimmen. Es ergeben sich die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{D} \cdot \frac{\left\{ 2 L_1^4 (l_2 - l_1) e^{-\frac{r_0}{l_1}} + l_1 e^{-\frac{r_0}{l_0}} \left[ (r_0 l_0 - r_0 l_2 + l_0 l_2) (L_2^3 - L_1^3) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \left( 1 - \frac{l_2}{l_0} \right) (L_2^4 - L_1^4) \right] \right\}}{2 l_0 \left[ l_2 \cos \frac{r_0}{l_1} + l_1 \sin \frac{r_0}{l_1} \right]}; \\ \beta_1 &= \frac{1}{D} \cdot \frac{2 L_1}{l_0} - \alpha_1; \quad \alpha_2 = 0; \\ \beta_2 &= e^{\frac{r_0}{l_2}} \left\{ 2 \alpha_1 \sin \frac{r_0}{l_1} + \frac{1}{D} \left[ \frac{2 L_1^4}{l_0} e^{-\frac{r_0}{l_1}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{-\frac{r_0}{l_0}} \left( \frac{2}{l_0} (L_2^4 - L_1^4) - r_0 (L_2^3 - L_1^3) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Damit läßt sich die Gesamtlösung  $u$  sowohl im Innen- wie im Außenraum vollständig hinschreiben. Wenn wir im Kugellnner die Konzentration

ändern, entspricht dies in den obigen Ausdrücken einer Variation von  $l_1$  und damit gleichzeitig von  $L_1$ , während  $l_2$  und  $L_2$  konstant und gleich den für reines Wasser gültigen Werten sind. In Fig. 10 ist für verschiedene Werte der Diffusionslänge  $l_1$  im Kugellinnern die so berechnete Dichteverteilung der thermischen Neutronen eingezeichnet. Zu der Kurve für  $l_1 = l_2 = 2,65$  cm (innen und außen reines Wasser) ist gestrichelt die

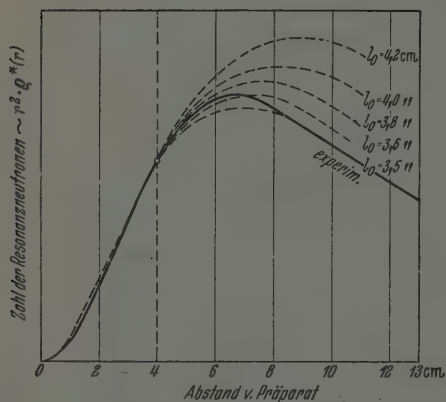


Fig. 9. Anzahl der Resonanzneutronen in verschiedenen Abständen von der Neutronenquelle.

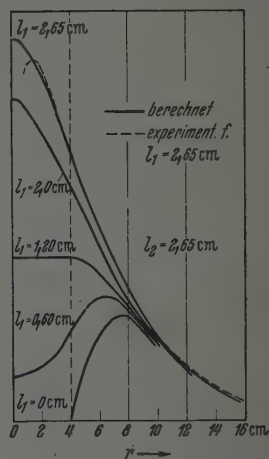


Fig. 10. Dichteverlauf der thermischen Neutronen.

experimentelle Verteilung eingezeichnet, die von Stuhlinger<sup>1)</sup> mit einem sehr kleinen Borzähler erhalten wurde. Man sieht die gute Übereinstimmung zwischen der berechneten und der experimentell gefundenen Verteilung.

2. Die Absorption im Innern der Kugel. Wegen  $u = r \cdot q$  ist die Zahl der pro Sekunde absorbierten Neutronen

$$N = \frac{1}{r} \int_0^{r_0} 4\pi r u \cdot dr.$$

Führt man die Integration aus und setzt für  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  die Ausdrücke (5) ein, so ergibt sich für die Gesamtzahl der pro Sekunde in der Kugel absorbierten Neutronen, wenn die Quellenverteilung

$$q(r) = e^{-r/l_0} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

<sup>1)</sup> Nach freundlicher persönlicher Mitteilung von Herrn Dr. Stuhlinger.

ist, der Ausdruck

$$N = \frac{4\pi r_0^3}{3} \cdot 3 \left\{ \begin{aligned} & \frac{2A_1^4}{\lambda_0} + \frac{2A_1^2\lambda_0^3}{\lambda_1^2} - \frac{2A_1^4\lambda_0}{\lambda_1^2} + \\ & + e^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left\{ 2(1+\lambda_0) \frac{A_1^4}{\lambda_1^2} - \frac{\lambda_0 A_1^2}{\lambda_1^2} (1+2\lambda_0+2\lambda_0^2) \right\} - \\ & - e^{-\frac{1}{\lambda_1}} \cdot \frac{2A_1^4}{\lambda_0\lambda_1} (1+\lambda_1) + \\ & + \left\{ 2A_1^4(\lambda_2-\lambda_1) e^{-\frac{1}{\lambda_1}} + \right. \\ & + e^{-\frac{1}{\lambda_0}} \left[ (A_2^2-A_1^2)\lambda_1(\lambda_0-\lambda_2+\lambda_0\lambda_2) - \right. \\ & \left. \left. - 2(A_2^4-A_1^4)\lambda_1 \left( 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_0} \right) \right] \right\} \cdot \frac{\frac{1}{\lambda_1} \cot \frac{1}{\lambda_1} - 1}{\lambda_0\lambda_2 \cot \frac{1}{\lambda_1} + \lambda_0\lambda_1} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Der Verlauf dieses Ausdrucks in Abhängigkeit von  $\frac{I'}{\gamma_0} = \frac{l_2^3}{l_1^3}$  ( $l_1$  variabel) ist in Fig. 4 durch Kurve *a* dargestellt. Bei unendlich hoher Konzentration, d. h. wenn jedes in die Kugel gelangende thermische Neutron dort absorbiert wird, ist die Gesamtzahl der absorbierten Neutronen rund das Vierfache der Zahl, die bei Füllung mit reinem Wasser in der Kugel absorbiert wird.

3. *Der Beitrag der im Kugellinnern befindlichen Resonanzneutronen zur Absorption innerhalb der Kugel.* Wenn wir die oben verwendete Quellenverteilung am Kugelrand abbrechen und im Außenraum durch den Wert 0 ersetzen und dann die entsprechende Rechnung durchführen, ergeben sich die neuen Konstanten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$  und  $B$  und damit der Ausdruck für die Zahl der innerhalb der Kugel absorbierten Neutronen einfach dadurch aus den bisherigen Ausdrücken (5) und (6), daß wir überall  $L_2 = 0$  setzen. Wir bekommen so die Kurve *b* der Fig. 4. Wenn also ein gewisser Bruchteil der Quellen im Innern der Kugel durch Absorption im Resonanzgebiet verlorengeht, vermindert sich die Gesamtabsorption in der Kugel um denselben Bruchteil der durch diese Kurve gegebenen Werte. Dem Umstand, daß die Resonanzneutronen, bevor sie wirklich „Quellen thermischer Neutronen“ werden, je nach ihrer Energie noch eine gewisse Diffusion durchmachen, ist dadurch Rechnung getragen, daß mit einer etwas vergrößerten thermischen Diffusionslänge gerechnet wurde, die wir nach dem Gesetz

$$L^2 = L'^2 + l^2$$

<sup>1)</sup>  $\lambda = l/r_0$ ,  $A_i = L_i/r_0$  usw.

aus der wirklichen thermischen Diffusionslänge  $l$  und der Diffusionslänge im Resonanzgebiet  $L'$  bilden. Die letztere ergibt sich aus der mittleren Zahl  $Z$  der Zusammenstöße des Neutrons zwischen der Energie der Resonanzstelle ( $\sim 5$  e-Volt) und der Energie der chemischen Bindung ( $\sim 0,2$  e-Volt) nämlich

$$Z = \ln \frac{5}{0,2} \approx 3,$$

und der mittleren freien Weglänge in diesem Energiebereich,  $\lambda' \approx 1$  bis  $1,5$  cm zu  $L' \approx \lambda' \sqrt{Z/3} \approx 1$  bis  $1,5$  cm. Die Rechnung wurde mit dem mittleren Wert  $L' = 1,2$  cm durchgeführt, doch zeigte eine Kontrollrechnung, daß der genaue Wert von  $L'$  ohne Einfluß auf die hier abgeleiteten Resultate ist.

Der Verlauf der Kurve  $b$  ist ein ähnlicher wie derjenige für die Gesamtabsorption, doch sieht man, daß von den im thermischen Gebiet absorbierten Neutronen sich nur etwa 30 bis 40% schon bei der betreffenden Resonanzenergie innerhalb der Kugel befanden.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg ausgeführt. Wir gestatten uns, dieselbe unserem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. H. Geiger, zu seinem 60. Geburtstage zu widmen.

## Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen \*).

Von W. Heisenberg in Berlin,

Max Planck-Institut der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft.

(Eingegangen am 8. September 1942.)

Die bekannten Divergenzschwierigkeiten in der Theorie der Elementarteilchen zeigen, daß die zukünftige Theorie in ihren Grundlagen eine universelle Konstante von der Dimension einer Länge enthalten wird, die in die bisherige Form der Theorie offenbar nicht widerspruchsfrei eingebaut werden kann. Im Hinblick auf diese spätere Abänderung der Theorie versucht die vorliegende Arbeit, aus dem Begriffsgebäude der Quantentheorie der Wellenfelder diejenigen Begriffe herauszuschälen, die von der zukünftigen Änderung wahrscheinlich nicht betroffen werden und die daher einen Bestandteil auch der zukünftigen Theorie bilden werden. Die Arbeit gliedert sich in folgende Abschnitte: I. Die beobachtbaren Größen und ihre mathematische Darstellung. a) Formulierung der Grundannahmen. b) Die mathematische Darstellung der beobachtbaren Größen. c) Die Singularitäten im Impulsraum. d) Die charakteristische Matrix. e) Die Emission mehrerer Teilchen. — II. Die Eigenschaften der Matrix  $S$ . a) Die allgemeinen quantenmechanischen Eigenschaften von  $S$ . b) Die singulären Teile der Matrix  $S$ . c) Berücksichtigung von Spin und Statistik der verschiedenen Elementarteilchen. d) Das relativistische Verhalten der Matrix  $S$ . — III. Beziehungen zwischen den beobachtbaren Größen. a) Das durch die Matrix  $S$  gegebene Eigenwertproblem. b) Beziehungen zwischen Streu- und Emissionskoeffizienten. c) Beziehungen zwischen den beobachtbaren Größen, die nicht aus den allgemeinen Eigenschaften der Matrix  $S$  folgen.

In den vergangenen Jahren ist vielfach<sup>1)</sup> auf die Schwierigkeiten hingewiesen worden, die einer Theorie der Elementarteilchen einstweilen noch im Wege stehen. Diese Schwierigkeiten zeigen sich am auffallendsten in dem Auftreten von Divergenzen (unendliche Selbstenergie des Elektrons, unendliche Polarisation des Vakuums u. dergl.), die den Ausbau einer mathematisch geschlossenen Theorie verhindern, und müssen wohl als Ausdruck der Tatsache aufgefaßt werden, daß bei den in Rede stehenden Erscheinungen eine neue universelle Konstante von der Dimension einer Länge eine entscheidende Rolle spielt, die in den bisherigen Theorien nicht berücksichtigt wird. Einstweilen ist nichts darüber bekannt, welche physi-

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstage am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> Z. B. bei N. Bohr, Kongreß über Kernphysik in Rom 1931, S. 119. V. Weißkopf, ZS. f. Phys. **89**, 27, 1934; A. March, ebenda **104**, 93, 161, 1936; **105**, 620, 1937; G. Wataghin, ebenda **88**, 92; **92**, 547, 1934; W. Heisenberg, Ann. d. Phys. **32**, 20, 1938.



kalischen Begriffe neu gebildet werden müssen, um den richtigen Einbau dieser Konstante in die mathematische Formulierung der Naturgesetze zu ermöglichen, und in welcher Weise dann diese Konstante z. B. die Massen der Elementarteilchen bestimmt.

Bei dieser Sachlage scheint es zweckmäßig, die Frage zu stellen, welche Begriffe der bisherigen Theorie auch in der zukünftigen beibehalten werden können, und diese Frage ist ungefähr gleichbedeutend mit der anderen Frage, welche Größen der bisherigen Theorie „beobachtbar“ seien. Denn auch die zukünftige Theorie soll natürlich in erster Linie Beziehungen zwischen „beobachtbaren Größen“ enthalten. Dabei wird freilich stets erst durch die fertige Theorie entschieden, welche Größen wirklich „beobachtbar“ sind. Aber auch schon vor der Kenntnis der endgültigen Theorie kann das Studium der Schwierigkeiten der früheren Theorie Anhaltspunkte dafür liefern, daß gewisse Begriffe in Zukunft nicht mehr angewendet werden können, während andere Begriffe von den Schwierigkeiten gar nicht berührt werden. So kann man zu Beziehungen zwischen beobachtbaren Größen gelangen, die ein Bestandteil nicht nur der alten, sondern wahrscheinlich auch der zukünftigen Theorie sind. Die folgende Untersuchung soll aus dem Begriffsgebäude der Quantentheorie der Wellenfelder gewisse Begriffe herauschälen, die trotz der bekannten Schwierigkeiten wohl auch in der zukünftigen Theorie als „beobachtbare physikalische Größen“ angesehen werden können, und soll Beziehungen zwischen diesen Größen herleiten, die zum mindesten prinzipiell an der Erfahrung geprüft werden können.

### *I. Die beobachtbaren Größen und ihre mathematische Darstellung.*

a) *Formulierung der Grundannahme.* Die Existenz einer „kleinsten Länge“, d. h. einer universellen Konstante von der Dimension einer Länge und der Größenordnung  $10^{-13}$  cm macht alle diejenigen Aussagen der Quantentheorie problematisch, bei denen es sich um die genaue Festlegung eines Ortes oder eines Zeitpunktes, d. h. allgemein um einen raum-zeitlichen Ablauf handelt. Es ist zwar sicher möglich, solche raum-zeitlichen Abläufe mit einem hohen Grad von Genauigkeit zu beobachten, aber es ist sehr zweifelhaft, ob man den Ort eines Teilchens genauer als mit einer Unsicherheit von  $10^{-13}$  cm und einen Zeitpunkt genauer als mit einer Unsicherheit von  $\frac{10^{-13}}{c} \sim 3 \cdot 10^{-24}$  sec festlegen kann. Tatsächlich beobachtet man ja auch raumzeitliche Abläufe im allgemeinen nur mit einer im Verhältnis dazu sehr bescheidenen Genauigkeit.

Man interpretiert die experimentellen Ergebnisse nachträglich als Aussagen über Energien von stationären Zuständen oder über Wirkungsquerschnitte für irgendwelche Stoßprozesse. Schon daraus geht hervor, daß es eine andere Kategorie von Größen gibt, deren Bestimmung durch die Existenz der „kleinsten Länge“ gar nicht berührt wird, nämlich die Energien und Impulse von freien Teilchen, und die Wirkungsquerschnitte als ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen erzeugt wird oder Energie und Impuls ändert. Es liegt nahe, eben diese Größen als die „beobachtbaren Größen“ auch in einer zukünftigen Theorie anzusehen.

Im einzelnen sollen die Konsequenzen aus folgenden Annahmen über die „beobachtbaren Größen“ untersucht werden:

1. Die diskreten Energiewerte der stationären Zustände abgeschlossener Systeme sind „beobachtbar“.

2. Bei stationären Stoßprozessen, Emissions- und Absorptionsvorgängen usw. (z. B. einfallende ebene Welle und gestreute Kugelwelle usw.) soll das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen im Unendlichen prinzipiell „beobachtbar“ sein.

Die beiden in den Annahmen 1. und 2. bezeichneten Arten von beobachtbaren Größen scheinen zunächst ohne inneren Zusammenhang und es sieht so aus, als müsse man für die räumlich abgeschlossenen Systeme mit diskreten Energiewerten einerseits, die unabgeschlossenen Stoß- und Streuvorgänge mit kontinuierlichem Energiespektrum andererseits ganz verschiedene Größen als „beobachtbar“ vor den anderen auszeichnen.

In Wirklichkeit hängen die beiden Arten von Größen aber sehr eng zusammen. Als Beispiel betrachten wir die Streuung eines Teilchens an einem Zentralfeld kurzer Reichweite. Nach der Annahme 2. soll hier als beobachtbar gelten das Verhalten der ein- und auslaufenden Welle im Unendlichen; d. h. insbesondere die Phasendifferenz zwischen der ein- und auslaufenden Kugelwelle, die zu einer bestimmten Winkelabhängigkeit (d. h. zu einem bestimmten Drehimpuls des Systems) gehört. Wenn man nun das System durch eine Kugelschale in großem Abstand vom Kraftzentrum abschließt, so werden die Energiewerte des Systems diskret. Die Lage der Energiewerte hängt aber allein ab von der Phasendifferenz zwischen der ein- und der auslaufenden Welle. Wenn man die Energiewerte des so veränderten Systems als beobachtbar ansieht, so ist dies also dasselbe, wie wenn man die Phasendifferenzen als beobachtbar betrachtet; die Annahmen 1. und 2. sagen daher hier das gleiche aus.

Die Annahmen 1. und 2. lassen die Frage unentschieden, inwieweit der räumliche Verlauf einer Eigenfunktion bei kleinen Abständen der be-

teiligten Teilchen als beobachtbar gelten kann. Nach der Quantenmechanik kann dieser Verlauf (bis auf die unbestimmte Phasenkonstante der Wellenfunktion) grundsätzlich stets beobachtet werden. Auch in der zukünftigen Theorie wird wohl der physikalische Inhalt, der durch den Verlauf der Wellenfunktion dargestellt war, irgendeine Darstellung finden. Nur muß man damit rechnen, daß hierbei von der universellen Länge der Größenordnung  $10^{-13}$  cm grundsätzlich nicht mehr abgesehen werden kann. Man muß hier daran denken, daß z. B. die räumliche Dichteverteilung der Elektronen im Atom nur durch Stoßversuche mit sehr energiereichen Teilchen (Elektronen oder Photonen) ermittelt werden kann. Die hierbei auftretenden Streuwellen werden zwar sicher wieder zu den beobachtbaren Größen gehören, aber es bleibt zweifelhaft, inwieweit man von den Streuwellen rückwärts auf eine bestimmte „Dichteverteilung“ schließen kann.

b) *Die mathematische Darstellung der beobachtbaren Größen.* Nach diesen Vorbemerkungen soll die Frage angegriffen werden, wie die Größen, die hier als beobachtbar bezeichnet werden, mathematisch dargestellt werden können. Dabei wird es besonders darauf ankommen, auch das relativistische Verhalten der betreffenden Größen klarzustellen.

Bei den diskreten Energiewerten der abgeschlossenen Systeme liegt kein Problem vor. Diese Energiewerte sind relativistische Invarianten, wie die Ruhmassen von Teilchen. Wenn die abgeschlossenen Systeme bewegt sind, so folgen Energie und Impuls des Systems aus diesen Invarianten und aus der Geschwindigkeit in der üblichen Weise nach der Lorentz-Transformation.

Sehr viel komplizierter liegen die Verhältnisse jedoch bei den Größen, die das Endresultat eines Streu- oder Emissionsprozesses festlegen.

Zur Vereinfachung soll zunächst der Stoß zweier Elementarteilchen betrachtet werden, der zur Streuung oder auch zur Emission von neuen Teilchen führt. Der Ausgangszustand ist hier etwa beschrieben durch eine ebene Welle in dem Koordinatenraum der beiden Koordinaten  $r_1, r_2$ . Diese „primäre Welle“ ist im stationären Betrieb verbunden mit einer Streuwelle, die wieder aufgefaßt werden kann als Produkt einer ebenen Welle in dem Raum der Schwerpunktskoordinaten  $\frac{r_1 + r_2}{2}$  und einer auslaufenden Kugelwelle im Raum der Relativkoordinaten  $r_1 - r_2$ . Wenn beim Stoß noch ein neues, drittes Teilchen (z. B. ein Lichtquant) erzeugt wird, so verbindet sich mit der primären Welle noch eine auslaufende Welle im Raum der drei Koordinaten  $r_1, r_2$  und  $r_3$ . Diese Welle ist wieder ein Produkt aus einer ebenen Welle im Raum der Schwerpunktskoordinaten

und einer auslaufenden Kugelwelle im Raum der Koordinaten  $r_1 - r_2$  und  $r_1 - r_3$ . Dabei sind die auslaufenden Wellen in  $r_1 - r_2$  und  $r_1 - r_3$  in der Weise gekoppelt, daß in einem Gebiet, in dem  $r_1 - r_2$  klein ist, die Wellenfunktion nur dort merklich von Null verschieden ist, wo auch  $r_1 - r_3$  klein ist. Die gestreute Welle erfüllt also nur einen Teil des Raumes der Koordinaten  $r_1, r_2, r_3$ . Dieser Teilraum ist physikalisch durch die Bedingung gekennzeichnet, daß immer dann, wenn das eine Teilchen in einer gewissen Entfernung vom Streuzentrum angetroffen wird, das andere Teilchen ebenfalls in der Nähe einer bestimmten, aus dem Verhältnis der Geschwindigkeiten folgenden Entfernung vom Streuzentrum angetroffen werden muß.

Eine weitere Beziehung zwischen den primären und den auslaufenden Wellen ist durch Energie- und Impulssatz gegeben. Wenn  $\mathfrak{f}'_1, \mathfrak{f}'_2$  die Impulse,  $k_1^0, k_2^0$  die Energien der Teilchen vor dem Stoß, die zweigestrichenen Größen die entsprechenden Größen nach dem Stoß bedeuten, so muß

$$\sum \mathfrak{f}'_i = \sum \mathfrak{f}''_i; \quad \sum k_i^{0'} = \sum k_i^{0''} \quad (1)$$

sein. Wir benutzen im folgenden stets  $\hbar$  und  $c$  als Einheiten, so daß die Dimension irgendwelcher physikalischer Größen durch eine Potenz einer Länge ausgedrückt werden kann<sup>1)</sup>.  $\mathfrak{f}$  und  $k^0$  haben in diesen Einheiten die Dimension  $\text{cm}^{-1}$ . In der üblichen quantenmechanischen Störungsrechnung ist die erste der Bedingungen (1) stets von selbst erfüllt, da die Störungsenergie nur Übergänge vermittelt, bei denen der Impulssatz gewahrt ist. Dagegen folgt die Erfüllung der zweiten Bedingung erst aus der Mittelung über lange Zeiten, d. h. aus der Forderung der Stationarität.

Wenn die einlaufenden und auslaufenden Wellen in großem Abstand vom Streuzentrum gegeben sind, so kann man aus diesem asymptotischen Verhalten im Raum der  $r$ -Koordinaten auch durch Fourier-Transformation das „asymptotische“ Verhalten im Impulsraum, d. h. im Raum der  $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3$  herleiten. Dabei entsprechen offenbar die Gebiete des  $r$ -Raumes, die in großem Abstand vom Streuzentrum liegen, gerade den Gebieten im  $\mathfrak{f}$ -Raum, in denen die Bedingungen (1) erfüllt sind. Das asymptotische Verhalten der Wellenfunktionen im  $r$ -Raum ist also eindeutig verknüpft mit dem Verhalten der Wellenfunktion im  $\mathfrak{f}$ -Raum gerade an den Stellen, an denen die Beziehungen (1) gelten.

c) *Die Singularitäten im Impulsraum.* Dieser Zusammenhang im folgenden noch mathematisch näher ausgeführt werden. Die Eigen-

<sup>1)</sup> Vgl. W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 101, 533, 1936.

funktion im Impulsraum, die zu einem Streuvorgang gehört, wird offenbar in der Nähe der durch die Bedingungen (1) gegebenen Stellen in einer bestimmten Weise singulär. Zunächst kann die primäre Welle selbst offenbar einfach als Produkt von Diracschen  $\delta$ -Funktionen in der Form  $\prod_i \delta(\mathbf{f}_i' - \mathbf{f}_i'')$

geschrieben werden, wobei die  $\mathbf{f}_i''$  die Variablen des Impulsraumes bedeuten, während die  $\mathbf{f}_i'$  den betreffenden Zustand als Konstanten charakterisieren. Zu dieser primären Welle kommt aber noch die Streuwelle. Die Streuwelle enthält zunächst wegen der Bedingungen (1) den Faktor  $\delta(\sum \mathbf{f}_i' - \sum \mathbf{f}_i'')$ . Für die Abhängigkeit von den Energien  $k_i^{0''}$  ergibt sich jedoch trotz der Bedingungen (1) nicht einfach ein Faktor  $\delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$ . Vielmehr zeigen die Untersuchungen Diracs<sup>1)</sup>, daß die Streuwelle im Impulsraum den Faktor  $\frac{1}{\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}} + i\pi \delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$  enthält und daß sich die besondere Form dieses Faktors aus der Bedingung ergibt, daß nur eine auslaufende, keine einlaufende Streuwelle vorhanden sein soll.

Die Art der Singularität der Eigenfunktion an der Stelle des Impulsraumes, an der die Energie der gestreuten Teilchen gleich der einfallenden Energie ist, bedarf also noch einer besonderen Untersuchung. Zunächst ist klar, daß an dem genannten Diracschen Faktor nur die Art der Singularität, nicht aber das Verhalten für endliche Werte von  $\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}$  für das asymptotische Verhalten der Wellen im  $\mathbf{r}$ -Raum wesentlich ist. Denn für das asymptotische Verhalten gelten die Bedingungen (1) streng. Dann ist schon gelegentlich früher darauf hingewiesen worden, daß man den Diracschen Faktor auch einfach durch den Faktor  $\frac{1}{\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}}$  ersetzen könne, wenn man die Zusatzbedingung hinzufüge, daß bei der Integration über den  $\mathbf{f}$ -Raum, die beim Übergang vom Impuls zum Ortsraum durchzuführen ist, der singuläre Punkt  $\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} = 0$  auf einer bestimmten Seite der reellen Achse (etwa auf der negativ imaginären Seite) umgangen werden muß.

Diesen ganzen Sachverhalt kann man einfach ausdrücken, indem man in der folgenden Weise die Diracsche  $\delta$ -Funktion in zwei Teile spaltet: Man beginnt etwa mit der bekannten Fourier-Zerlegung der  $\delta$ -Funktion

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikt} dt. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> P. A. M. Dirac, Quantum mechanics. 2. Aufl. S. 197 u. f. Oxford 1935.



Dann definiert man

$$\left. \begin{aligned} \delta_+(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{ikt} dt \\ \delta_-(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{ikt} dt \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\delta = \delta_+ + \delta_-, \quad \delta_- = \delta_+^* \quad (4)$$

Für diese Funktionen  $\delta_+$  und  $\delta_-$  erhält man offenbar die Darstellungen

$$\left. \begin{aligned} \delta_+(k) &= -\frac{1}{2\pi i k} \quad \text{für } \Im(k) > 0, \\ \delta_-(k) &= \frac{1}{2\pi i k} \quad \text{,, } \Im(k) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Wir behaupten nun, daß die Funktion  $\delta_+(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$  dem Dirac'schen Faktor entspricht und dafür sorgt, daß nur auslaufende Wellen vorhanden sind, während  $\delta_-$  umgekehrt nur einlaufende Wellen darstellt. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man das Fourier-Integral

$$J_+ = \int d\mathbf{r}'' e^{i\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}} \delta_+(k' - k'') \quad (6)$$

betrachtet (von der Ruhmasse der Teilchen sei der Einfachheit halber abgesehen und daher  $k$  statt  $k^0$  gesetzt). Man erhält

$$\left. \begin{aligned} J_+ &= 2\pi \int_0^{\infty} d k'' k''^2 \int_{-1}^{+1} d\zeta e^{i k'' r \zeta} \delta_+(k' - k'') \\ &= \frac{2\pi}{i r} \int_0^{\infty} d k'' k'' (e^{i k'' r} - e^{-i k'' r}) \delta_+(k' - k''). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Funktion  $\delta_+(k' - k'')$  kann nun nach (5) durch  $-\frac{1}{2\pi i (k' - k'')}$  ersetzt werden, wenn man das Integral in der komplexen  $k''$ -Ebene so ausführt, daß man den singulären Punkt  $k'' = k'$  auf der negativ imaginären Seite umgeht. Das Integral wird zweckmäßig in einem endlichen Abstand unterhalb der reellen Achse ausgeführt. Dann verschwindet für hinreichend große  $r$  offenbar das Glied  $e^{-i k'' r}$  und es bleibt nur das Glied mit  $e^{+i k'' r}$  über. Zur Berechnung dieses Teiles des Integrals deformiert und zerlegt man den Integrationsweg zweckmäßig so, daß er in einen Kreis um den singulären Punkt  $k'' = k'$  und einen Weg oberhalb der reellen Achse zerfällt. Der letztere trägt für große  $r$  zum Wert von  $J_+$  nichts bei, weil  $e^{i k'' r}$  überall



beliebig klein wird, es bleibt also nur das Integral um den singulären Punkt übrig. Daher folgt

$$J_+ = -\frac{2\pi i}{r} k' e^{ik'r}, \quad (8)$$

d. h. nur eine auslaufende Welle.

In der gleichen Weise folgt

$$J_- = \int d\mathbf{r}'' e^{i\mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}} \delta_-(k' - k'') = \frac{2\pi i}{r} k' e^{-ik'r}, \quad (9)$$

d. h. eine einlaufende Welle. (Die gewählten Darstellungen  $e^{-ik'r}$  bzw.  $e^{+ik'r}$  für die ein- bzw. auslaufende Welle setzen voraus, daß der Zeitfaktor der Wellenfunktion in der üblichen Weise  $e^{-ik^0 t}$  gesetzt wird.)

Mit Hilfe der Funktionen (3) kann man das Verhalten der Streuwelle im Impulsraum einfach ausdrücken. Die Wellenfunktion enthält für die gestreute Welle den Faktor  $\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta_+(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$ . Dieser Faktor ist eine relativistische Invariante, ebenso wie die Produkte  $\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta_-(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$  und  $\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$ , wie aus den Gleichungen (2) und (3) unmittelbar hervorgeht. Die Zerlegung (4) ermöglicht auch, die primäre Welle  $\prod_i \delta(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}''_i)$ , die in der Form

$$\prod_i \delta(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}''_i) = \delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}) \cdot \Delta(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}''_i) \quad (10)$$

geschrieben werden kann, in einen einlaufenden und einen auslaufenden Teil zu zerlegen.  $\Delta$  ist dabei im wesentlichen eine  $\delta$ -Funktion, d. h. die Einheitsmatrix in den Variablen, die übrigbleiben, wenn man vier von den Variablen  $\mathbf{k}''_i$  durch Gesamtenergie und Gesamtimpuls eliminiert. Für diese Zerlegung braucht man nur  $\delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$  in (10) in  $\delta_+ + \delta_-$  zu spalten.

d) *Die charakteristische Matrix.* Nach diesen Vorbemerkungen können wir behaupten: Zu einer primären Welle  $\prod_i \delta(\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}''_i)$  gehört als asymptotischer Ausdruck der Wellenfunktion im  $\mathbf{k}''$ -Raum als

$$\left. \begin{aligned} &\text{einfallende Welle:} \\ &\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta_-(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}) \Delta(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}''_i), \\ &\text{auslaufende Welle:} \\ &\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta_+(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''}) [\Delta(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}''_i) + R(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}''_i)]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Funktion  $R(\mathbf{k}'_i, \mathbf{k}''_i)$  stellt offenbar die eigentliche Streuwelle dar. Wenn neben der Streuung auch die Emission von neuen Teilchen vorkommt, so zerfällt  $R$  in mehrere Funktionen, von denen die erste nur von  $\mathbf{k}''_1$

und  $\mathfrak{f}_2''$ , die zweite von  $\mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_2''$  und  $\mathfrak{f}_3''$ , die dritte von  $\mathfrak{f}_1'', \mathfrak{f}_2'', \mathfrak{f}_3'', \mathfrak{f}_4''$  usw. abhängt. Wir fassen die Matrix  $\Delta$  und  $R$  zu einer Matrix  $S$  zusammen:

$$S(\mathfrak{f}_i', \mathfrak{f}_i'') = \Delta(\mathfrak{f}_i', \mathfrak{f}_i'') + R(\mathfrak{f}_i', \mathfrak{f}_i'') \quad (12)$$

und bezeichnen  $S(\mathfrak{f}_i', \mathfrak{f}_i'')$  als die für das Streuproblem charakteristische Matrix. Von dieser Matrix haben wir bisher nur die erste Zeile betrachtet, bei der nur zwei Variablen  $\mathfrak{f}_1', \mathfrak{f}_2'$  vorkommen. Die allgemeine Form der Matrix kann schematisch in folgender Weise angedeutet werden:

$$S \begin{array}{c} \mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \\ \mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \mathfrak{f}_3' \\ \mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \mathfrak{f}_3' \mathfrak{f}_4' \end{array} \begin{array}{c} \mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2'' \\ \mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2'' \mathfrak{f}_3'' \\ \mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2'' \mathfrak{f}_3'' \mathfrak{f}_4'' \end{array} \quad (12a)$$

	$\mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2''$	$\mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2'' \mathfrak{f}_3''$	$\mathfrak{f}_1'' \mathfrak{f}_2'' \mathfrak{f}_3'' \mathfrak{f}_4''$	
$\mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2'$				
$\mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \mathfrak{f}_3'$				
$\mathfrak{f}_1' \mathfrak{f}_2' \mathfrak{f}_3' \mathfrak{f}_4'$				

Wegen der Darstellung (11) sind ihre Matrixelemente nur definiert für Übergänge, bei denen die Bedingungen (1) gelten, d. h. Energie und Impuls erhalten bleiben.

Die Matrix  $S(\mathfrak{f}_i', \mathfrak{f}_i'')$  enthält die mathematische Darstellung der Größen, die wir in der Annahme (2) als beobachtbar bezeichnet haben.

e) Die Emission mehrerer Teilchen. Bevor die Eigenschaften dieser Matrix im einzelnen besprochen werden, ist noch zu zeigen, daß auch die Teile der Matrix, die von mehr als zwei Variablen  $\mathfrak{f}_i''$  abhängen, die auslaufende Welle richtig darstellen können. Die Diracschen Betrachtungen sowie die Gleichungen (2) bis (9) beziehen sich ja zunächst nur auf den einfachen Streuvorgang, nicht auf die Emission neuer Teilchen. Wir betrachten zu diesem Zweck ein Fourier-Integral der Form ( $\mathfrak{R}$  Gesamtimpuls,  $K^0$  Gesamtenergie):

$$J_+ = \int d\mathfrak{f}_1 \dots d\mathfrak{f}_r e^{i \sum_l \mathfrak{f}_l \tau_l} \delta(\mathfrak{R} - \sum \mathfrak{f}_l) \delta_+(K^0 - \sum k_l^0) g(\mathfrak{f}_l). \quad (13)$$

Durch Integration über  $\mathfrak{f}_1$  kann zunächst die erste  $\delta$ -Funktion beseitigt werden ( $\kappa$  = Ruhmasse der Teilchen in  $\text{cm}^{-1}$ ):

$$J_+ = \int d\mathfrak{f}_2 \dots d\mathfrak{f}_r e^{i \sum_l \mathfrak{f}_l (\tau_l - \tau_1) + i \mathfrak{R} \tau_1} \delta_+ \left( K^0 - \sqrt{\kappa^2 + \left( \mathfrak{R} - \sum_2 \mathfrak{f}_l \right)^2} - \sum_2 k_l^0 \right) \cdot g \left( \mathfrak{R} - \sum_2 \mathfrak{f}_l, \mathfrak{f}_2 \dots \right). \quad (14)$$

Führt man wie in (7) Polarkoordinaten im Raum  $\mathfrak{r}_2$  ein, wobei die Richtung von  $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  die Polarachse bestimmt — wir setzen  $\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} = \mathbf{e}$  —, so erhält man unter Berücksichtigung der gleich zu besprechenden Beziehung (17) durch die Integration über  $\mathfrak{r}_2$

$$J_+ = 2\pi i \int d\mathfrak{r}_3 \dots d\mathfrak{r}_f \frac{\bar{k}_2}{e^{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}} \cdot e^{i\bar{k}_2|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| + i \sum_3^f \mathfrak{r}_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1) + i\mathfrak{R}\mathbf{r}_1} \cdot g\left(\mathfrak{R} - \bar{k}_2\mathbf{e} - \sum_3^f \mathfrak{r}_i, \dots\right), \quad (15)$$

wobei  $\bar{k}_2$  den Wert von  $k_2$  bedeutet, der bei gegebenen Werten von  $\mathfrak{r}_3 \dots \mathfrak{r}_f$  den Energiesatz befriedigt, d. h. der das Argument der  $\delta$ -Funktion zu Null macht.  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  sind (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit) die Geschwindigkeiten der Teilchen 1 und 2, die sich aus den Erhaltungssätzen ergeben. Diese Werte hängen von  $\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4 \dots \mathfrak{r}_f$  ab. Da nun noch die Integration über  $\mathfrak{r}_3$  bis  $\mathfrak{r}_f$  vorgenommen werden muß, ist für große  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|$  der Wert des Integrals nur dort merklich von Null verschieden, wo die Ableitung des Exponenten nach  $\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_4 \dots \mathfrak{r}_f$  verschwindet — es sei denn, daß die Funktion  $g$  sehr schnell mit  $\mathfrak{r}_i$  veränderlich ist, was wir ausschließen wollen.

Das Argument der  $\delta_+$ -Funktion lautet

$$A = K^0 - \sqrt{x^2 + \left(\mathfrak{R} - k_2\mathbf{e} - \sum_3^f \mathfrak{r}_i\right)^2} - \sqrt{x^2 + k_2^2} - k_3^0 - \dots - k_f^0. \quad (16)$$

Das totale Differential  $dA$  (bei konstanter Richtung  $\mathbf{e}$ ) wird daher

$$dA = dk_2\mathbf{e}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \sum_3^f d\mathfrak{r}_i(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_i), \quad (17)$$

wobei wieder  $\mathbf{v}_i = \mathfrak{r}_i/k_i^0$  die Geschwindigkeiten der Teilchen (in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit) bedeuten. Differenziert man den Exponenten von (15), so erhält man aus (15) und (17) als das zu  $d\mathfrak{r}_i$  proportionale Glied

$$i d\mathfrak{r}_i \left[ \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1 - \frac{\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1}{e^{(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}} \cdot |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \right]. \quad (18)$$

Die Wellenfunktion wird also nur dort merklich von Null verschieden, wo sich die Abstände  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_1|$  und  $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$  verhalten wie die zugehörigen Geschwindigkeiten  $|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_1|$  und  $|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1|$ .

Eben dieses Verhalten ist physikalisch zu erwarten, da ja alle Teilchen gleichzeitig beim Streuvorgang entstehen, wie bereits früher (Abs. Ib) besprochen wurde. Man erkennt hieraus, daß auch die Teile der Matrix  $S$ , die zur Emission von mehreren Teilchen gehören, zusammen mit dem

Faktor  $\delta(\sum \mathfrak{f}'_i - \sum \mathfrak{f}''_i) \delta_+(\sum k^{0'}_i - \sum k^{0''}_i)$  das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion im Koordinatenraum richtig darstellen.

## II. Die Eigenschaften der Matrix $S(\mathfrak{f}'_i; \mathfrak{f}''_i)$ .

a) Die allgemeinen quantenmechanischen Eigenschaften von  $S$ . Die Matrix  $S$  vermittelt nur Übergänge zwischen Zuständen gleicher Energie und gleichen Impulses. Sie ist also reduzibel in unendlich viele Teilmatrizen, von denen jede zu einem bestimmten Wert von Gesamtenergie und Gesamtimpuls gehört.

Die Matrix  $S$  ist ferner unitär, d. h. sie genügt der Matrixgleichung

$$\tilde{S}^* S = 1. \quad (19)$$

(Das Zeichen  $\sim$  bedeutet Vertauschung von Zeilen und Spalten.)

Diese Behauptung kann man folgendermaßen begründen: Man betrachte etwa die Eigenfunktion im  $\mathfrak{f}''$ -Raum, die zu der gegebenen Primärwelle gehört:

$$\psi_{\mathfrak{f}'_1 \dots \mathfrak{f}'_r}(\mathfrak{f}''_1 \dots \mathfrak{f}''_r). \quad (20)$$

Diese Funktion genügt der Schrödinger-Gleichung

$$\int (\mathfrak{f}''_i | H | \mathfrak{f}'''_i) d\mathfrak{f}'''_1 \dots d\mathfrak{f}'''_r \cdot \psi(\mathfrak{f}'''_i) = (\sum_i k^{0'}_i) \cdot \psi(\mathfrak{f}''_i), \quad (21)$$

ihr singulärer Teil ist durch (11) dargestellt.

Man kann die Lösung (20) der Wellengleichung auch aus der primären Welle (10) mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung herleiten; denn nach langer Zeit geht die primäre Welle, wenn etwa zur Zeit  $t = 0$  die Wechselwirkung der Teilchen eingeschaltet wird, in die Lösung (20) über:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{f}'_1 \dots \mathfrak{f}'_r}(\mathfrak{f}''_1 \dots \mathfrak{f}''_r) &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{i \sum k^{0'}_i t} \cdot \int (\mathfrak{f}'' | e^{-i H t} | \mathfrak{f}''') d\mathfrak{f}'''_1 \dots d\mathfrak{f}'''_r \Pi \delta(\mathfrak{f}_i - \mathfrak{f}'''_i) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{i \sum k^{0'}_i t} (\mathfrak{f}'' | e^{-i H t} | \mathfrak{f}'). \end{aligned} \quad (22)$$

Man erhält offenbar auch eine [von (20) verschiedene] Lösung der Gleichung (21), wenn man in (22) das Vorzeichen der Zeit umkehrt:

$$\psi_{\mathfrak{f}'_1 \dots \mathfrak{f}'_r}(\mathfrak{f}''_1 \dots \mathfrak{f}''_r) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-i \sum k^{0'}_i t} (\mathfrak{f}'' | e^{+i H t} | \mathfrak{f}'). \quad (23)$$

Diese zweite Lösung (23) geht wegen des hermiteschen Charakters von  $H$  aus der ersten (22) dadurch hervor, daß man den konjugiert komplexen Wert von (22) nimmt und in ihm die Variablen  $\mathfrak{f}'$  und  $\mathfrak{f}''$  (nicht jedoch  $k^{0'}$  und  $k^{0''}$  in den für die Singularität maßgebenden Gliedern) vertauscht.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-i \sum k^{0'}_i t} (\mathfrak{f}' | e^{i H t} | \mathfrak{f}') = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-i \sum k^{0'}_i t} (\mathfrak{f}' | e^{i H t} | \mathfrak{f}) = \varphi. \quad (24)$$

Man erhält schließlich aus (4), (11) und (24) für den singulären Teil

$$\left. \begin{aligned} \text{von } \psi: & \delta \left( \sum \mathfrak{f}_i' - \sum \mathfrak{f}_i'' \right) \delta_- \left( \sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} \right) \Delta \left( \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'' \right) + \\ & + \delta \left( \sum \mathfrak{f}_i' - \sum \mathfrak{f}_i'' \right) \delta_+ \left( \sum k_i^{0'} - k_i^{0''} \right) S \left( \mathfrak{f}', \mathfrak{f}'' \right); \\ \text{von } \varphi: & \delta \left( \sum \mathfrak{f}_i' - \sum \mathfrak{f}_i'' \right) \delta_+ \left( \sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} \right) \Delta^* \left( \mathfrak{f}'', \mathfrak{f}' \right) + \\ & + \delta \left( \sum \mathfrak{f}_i' - \sum \mathfrak{f}_i'' \right) \delta_- \left( \sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} \right) S^* \left( \mathfrak{f}'', \mathfrak{f}' \right). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Nun führt man statt der einzelnen Teilchenimpulse zweckmäßig als neue Variablen den Gesamtimpuls  $\mathfrak{R}$ , die Gesamtenergie  $K^0$ , und weitere  $3f - 4$  Koordinaten  $x_5 \dots x_{3f}$  ein. Die Matrix  $S$  zerfällt dann in Teilmatrizen, die jeweils nur zu einem bestimmten Wert von  $K^0$  und  $\mathfrak{R}$  gehören:

$$S = S(\mathfrak{R}', K^{0'}; x', x'') = S(x', x''). \quad (26)$$

Das gleiche gilt von der Matrix  $\Delta$ , die einfach als Einheitsmatrix in den Variablen  $x$  aufzufassen ist:

$$\Delta(x', x'') = (x' | 1 | x'').$$

Wir setzen jetzt in der zweiten Zeile von (25) an die Stelle der  $\mathfrak{f}_i'$  die Größen  $\mathfrak{R}, K^0, x'$ , ersetzen  $x'$  durch  $x''$ , multiplizieren mit  $S(x', x'')$  und integrieren über alle  $x''$ . Durch diesen Prozeß muß man wieder eine Lösung der Wellengleichung (21) erhalten, da ja die Summe von Lösungen wieder eine Lösung ist. Die Integration ergibt für den singulären Teil von

$$\int \varphi_{\mathfrak{R}', K^{0'}, x'''} dx''' S(x' x''): \delta(\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}'') \delta_+(K^{0'} - K^{0''}) S(x', x'') + \\ + \delta(\mathfrak{R}' - \mathfrak{R}'') \delta_-(K^{0'} - K^{0''}) \int S^*(x'' x''') dx''' S(x' x''). \quad (27)$$

Die so konstruierte Lösung stimmt hinsichtlich der auslaufenden Welle genau mit  $\psi$  überein, sie muß also auch hinsichtlich der einlaufenden Welle mit  $\psi$  übereinstimmen. Daraus folgt

$$\int dx''' S^*(x'' x''') S(x' x'') = \Delta(x' x'') \quad (28)$$

oder in Matrixschreibweise:

$$S \tilde{S}^* = 1 = \tilde{S}^* S. \quad (29)$$

Der unitäre Charakter der Matrix  $S$  ist damit bewiesen. Wenn die Hamiltonsche Funktion als Matrix nicht nur hermitisch, sondern auch reell ist, dann ist nicht nur  $H$ , sondern nach (22) auch  $\psi$  und damit auch  $S(\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'')$  eine symmetrische Matrix:

Aus  $H = \tilde{H}$  folgt auch

$$S = \tilde{S}. \quad (30)$$

Unter dieser speziellen Voraussetzung gilt dann

$$S^* S = 1. \quad (31)$$

b) *Die singulären Teile der Matrix S.* Die Matrix  $S$  ist keine reguläre Funktion der Variablen  $\mathbf{k}'$  und  $\mathbf{k}''$ , sondern schon aus Gleichung (12):  $S = 1 + R$  geht hervor, daß  $S$   $\delta$ -funktionsartige Teile besitzt. Diese singulären Anteile der Matrix  $S$  sollen jetzt bestimmt werden.

Eine kleine formale Schwierigkeit entsteht hier aus dem Umstand, daß man kaum auf einfache Weise erreichen kann, daß die  $3f - 4$  Variablen  $x$  von den Impulsen der verschiedenen Teilchen symmetrisch abhängen. Man kann daher entweder auf die Symmetrie verzichten und etwa immer die drei Impulskoordinaten des ersten Teilchens und die Energie des zweiten:  $\mathbf{k}_1$  und  $k_2^0$  mit Hilfe von Gesamtenergie und -impuls eliminieren. Man führt dann als Variablen  $x$  zweckmäßig den Einheitsvektor in Richtung  $\mathbf{k}_2$ :  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{k}_2/k_2$  und die Impulse  $\mathbf{k}_3 \dots \mathbf{k}_f$  ein. Oder aber man erweitert  $S$ , indem man  $S$  mit  $\delta(\sum \mathbf{k}'_i - \sum \mathbf{k}''_i) \delta(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})$  multipliziert. Die so erweiterte Matrix kann in sämtlichen Variablen  $\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_f$  symmetrisch geschrieben werden (sofern nicht physikalische Unterschiede der Teilchenarten die Symmetrie stören); dafür muß man stets diesen  $\delta$ -Funktionsfaktor mitschleppen.

Wir entscheiden uns zunächst für die erste Alternative und untersuchen das Verhalten der einzelnen Teilmatrizen von  $S$ , die in der Darstellung (12a) durch einzelne Kästen gekennzeichnet sind. Die erste Zeile von (12a) gehört zu all den Streuprozessen, bei denen zwei Teilchen zusammenstoßen, wobei dann entweder nur Streuung oder Streuung und Emission neuer Teilchen stattfindet.

Die Richtung  $\mathbf{e}_2$  kann man durch zwei Winkel  $\vartheta$  und  $\varphi$  ausdrücken, wobei dann gelten soll

$$d\mathbf{e}_2 = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi; \quad d\mathbf{k}_2 = dk_2 k_2^0 dk_2^0. \quad (32)$$

Ferner kann man schreiben

$$\Delta(\mathbf{e}'_2 \mathbf{e}''_2) = \Delta(\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}''_2). \quad (33)$$

Für die erste Zeile von  $S$  in (12a) erhält man die folgende Darstellung:

	$\mathbf{e}'_2$	$\mathbf{e}'_2 \mathbf{k}''_3$	$\mathbf{e}'_2 \mathbf{k}''_3 \mathbf{k}''_4$	..
$\mathbf{e}'_2$	$\Delta(\mathbf{e}'_2 - \mathbf{e}''_2) + \mathfrak{f}(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}''_2; \mathbf{R}' K^{0'})$	$g(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}''_2 \mathbf{k}''_3; \mathbf{R}' K^{0'})$	$h(\mathbf{e}'_2, \mathbf{e}''_2, \mathbf{k}''_3 \mathbf{k}''_4; \mathbf{R}' K^{0'})$	..
$S: \mathbf{e}'_2 \mathbf{k}''_3$	..	..	..	..
..	..	..	..	..



Der erste Kasten der ersten Zeile gehört zu den zwei Richtungen  $e'_2$  und  $e''_2$ . Der Anteil  $\Delta$  repräsentiert die ungestreut durchlaufende Welle. Der zweite Teil stellt die Streuwelle dar. Die Funktion  $f(e'_2 e''_2; \mathfrak{R}', K^0)$  wird im allgemeinen nicht singulär sein; in dem speziellen Koordinatensystem, in dem der Schwerpunkt ruht, d. h. in dem  $\mathfrak{R}' = 0$  ist, wird  $f$  wegen der Isotropie des Raumes nur von  $|e'_2 - e''_2|$  oder, was dasselbe ist, vom skalaren Produkt  $(e'_2 e''_2)$  abhängen können. Setzt man

$$(e'_2 e''_2) = \zeta = \cos \vartheta' \cos \vartheta'' + \sin \vartheta' \sin \vartheta'' \cos (\varphi' - \varphi''), \quad (94)$$

so kann man daher im Schwerpunktsystem schreiben

$$f = f(\zeta, K^0), \quad (95)$$

d. h. die Amplitude der gestreuten Welle hängt im Schwerpunktsystem nur vom Winkel relativ zur Primärriichtung und von der Energie der einfallenden Teilchen ab. Ähnlich einfach liegen die Verhältnisse in dem Koordinatensystem, in dem eines der Primärteilchen ruht, z. B.  $\mathfrak{f}'_1 = 0$ . Man wählt dann zweckmäßig die Richtung von  $\mathfrak{R}'$  als Polarachse, so daß  $\vartheta' = 0$  wird, und erhält

$$f = f(\vartheta'', K^0). \quad (96)$$

Auch die Funktionen  $g, h$  usw. werden im allgemeinen nicht singulär sein. Sie hängen im Schwerpunktsystem von der relativen Lage der verschiedenen Vektoren  $e'_2, e''_2, \mathfrak{f}'_3, \mathfrak{f}''_4$  usw. ab, können also nicht mehr durch  $\zeta, \mathfrak{f}'_3, \mathfrak{f}''_4$  allein ausgedrückt werden.

Die Funktionen  $f, g, h$  stehen in einfachem Zusammenhang mit den Wirkungsquerschnitten für die betreffenden Streu- oder Emissionsprozesse. Die Wirkungsquerschnitte sind bis auf Normierungsfaktoren, die vom Phasenraumvolumen der betreffenden Zustandsbereiche abhängen, durch das Absolutquadrat der Funktionen  $f, g, h$  gegeben.

Aus (15) und (17) folgt durch eine einfache Rechnung, daß für  $\mathfrak{f}'_1 = 0$  der Wirkungsquerschnitt  $dQ_{str}$  für Streuung in den Winkelbereich  $de''_2$  den Wert hat:

$$dQ_{str} = (2\pi)^2 \frac{k_2^0 k_2'^0}{k_2^0 k_2^0} \frac{1}{|v_2'' - v_1''|^2} |f^2| de''_2; \quad (97a)$$

ebenso wird der Wirkungsquerschnitt  $dQ_{str, Em}$  für Streuung in  $de''_2$  und Emission eines Teilchens in dem Impulsbereich  $d\mathfrak{f}''_3$ :

$$dQ_{str, Em} = (2\pi)^5 \frac{k_2^0 k_2'^0}{k_2^0 k_2^0} \frac{1}{|v_2'' - v_1''|^2} |g^2| de''_2 d\mathfrak{f}''_3 \quad \text{usw.} \quad (97b)$$

Für  $v_1'', v_2'', \mathfrak{f}''_3, k_2^0$  ist dabei jeweils der Wert einzusetzen, der aus Energie- und Impulssatz folgt. [Die Geschwindigkeiten  $v$  sind wie in (17) in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit gemessen.]

Die zweite Zeile der Matrix  $S$  in der Darstellung (12 a) gehört zu Prozessen, bei denen zu Anfang *drei* Teilchen als ebene Wellen vorhanden sind. In diesem Fall werden sich mit ganz überwiegender Häufigkeit nur *zwei* von den drei Teilchen am Streuvorgang beteiligen, während das dritte ungestört weiterfliegt — ähnlich wie beim Vorhandensein von *zwei* Teilchen mit ganz überwiegender Häufigkeit überhaupt kein Streuprozess stattfindet. Die zweite Zeile von (12 a) wird also einen singulären Teil enthalten, der ein Produkt ist aus der ersten Zeile und einer  $\delta$ -Funktion in bezug auf das dritte Teilchen:  $\delta(\vec{k}_3 - \vec{k}_3')$ . Da keines der drei Teilchen vor den anderen ausgezeichnet ist, müssen in der zweiten Zeile von (12 a) drei solche singuläre Glieder stehen, die durch Vertauschung der Teilchen aus dem ersten hervorgehen. Diese Glieder würden hier allerdings formal verschieden aussehen, da die drei Teilchen in der zuletzt benutzten Darstellung formal verschieden behandelt werden. Wir deuten diese Glieder durch das Zeichen (+ vert.) an. Dann erhält man die Darstellung:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & e_2' & e_2' \vec{k}_3' & e_2' \vec{k}_3' \vec{k}_4' \\
 e_2' & \begin{array}{c} \Delta(e_2' - e_2'') + \\ + f(e_2', e_2''; \mathcal{R}' K^0) \end{array} & g(e_2', e_2' \vec{k}_3'; \mathcal{R}' K^0) & h(e_2', e_2' \vec{k}_3' \vec{k}_4'; \mathcal{R}' K^0) \\
 S: e_2' \vec{k}_3' & \begin{array}{c} g(e_2' \vec{k}_3', e_2''; \mathcal{R}' K^0) \\ + \text{vert.} \\ + F(e_2' \vec{k}_3', e_2'' \vec{k}_3'; \\ \mathcal{R}' K^0) \end{array} & \begin{array}{c} \Delta(e_2' - e_2'') \delta(\vec{k}_3' - \vec{k}_3'') \\ + \delta(\vec{k}_3' - \vec{k}_3'') f(e_2' e_2''; \\ \mathcal{R}' K^0) \end{array} & \begin{array}{c} \delta(\vec{k}_3' - \vec{k}_3'') g(e_2' e_2' \vec{k}_4'; \\ \mathcal{R}' K^0) \\ + \text{vert.} \\ + G(e_2' \vec{k}_3', e_2' \vec{k}_3' \vec{k}_4'; \\ \mathcal{R}' K^0) \end{array} \\
 e_2' \vec{k}_3' \vec{k}_4' & . . & . . & . .
 \end{array}
 \end{array} \quad (38)$$

Die Funktionen  $F$  und  $G$  werden im allgemeinen nicht singulär sein. Ihre Absolutquadrate stellen (wieder bis auf Phasenraumfaktoren) die Wirkungsquerschnitte dar für Prozesse, an denen schon primär drei Teilchen wesentlich beteiligt sind.

Die Erweiterung dieser Betrachtungen auf die anderen Zeilen der Matrix  $S$  liegt auf der Hand: Jede Zeile enthält singuläre Teile, die durch die Multiplikation der auf geringere Teilchenzahlen bezogenen Zeilen mit  $\delta$ -Funktionen entstehen.

c) Berücksichtigung von Spin und Statistik der verschiedenen Elementarteilchen. In der Darstellung (12 a) ist die einfache Annahme zugrunde gelegt, daß es nur eine Sorte von Teilchen gebe und daß der Zustand eines Teilchens durch den Impuls  $\vec{k}$  vollständig beschrieben sei. Im allgemeinen hat man es aber mit verschiedenen Teilchensorten zu tun, deren Zustand erst durch

Impuls und Spinrichtung vollständig beschrieben ist. Die Erweiterung der Darstellung (12a) auf diesen allgemeinen Fall ergibt sich von selbst. Man wird alle Zustände, gleichgültig mit wieviel Teilchen oder welchen Spinrichtungen, in Betracht ziehen müssen, die mit dem betreffenden Wert von Gesamtenergie und Gesamtimpuls verträglich sind. Zu jedem derartigen Zustand gehört je eine Zeile und eine Kolonne der Matrix  $S$ .

Ferner muß die Matrix  $S$  je nach Fermi- bzw. Bose-Statistik der betreffenden Teilchensorte gegenüber der Vertauschung der Teilchenkoordinaten antisymmetrisch bzw. symmetrisch sein; und zwar gilt dies sowohl für Vertauschungen zwischen den eingestrichenen wie für solche zwischen den zweigestrichenen Variablen. (Die Vertauschung einer eingestrichenen mit einer zweigestrichenen Variablen ist keine Operation, bei der Symmetrieeigenschaften zu erwarten wären.) An die Stelle der  $\delta$ -Funktionen, etwa bei der Darstellung der Primärwelle oder innerhalb der Matrix  $S$ , treten dann auch symmetrisierte und antisymmetrisierte  $\delta$ -Funktionen. Diese Verhältnisse sind von der gewöhnlichen Quantenmechanik her so bekannt, daß eine genauere Darstellung der Einzelheiten unnötig ist.

d) *Das relativistische Verhalten der Matrix  $S$ .* Wenn man die Matrix  $S$  mit dem relativistisch invarianten Faktor  $\delta(\sum \mathfrak{k}'_i - \sum k''_i) \delta(\sum k^{0'}_i - \sum k^{0''}_i)$  erweitert, so entsteht eine Matrix, die als größten Summanden einfach die Einheitsmatrix ( $\mathfrak{f}'|1|\mathfrak{f}''$ ) enthält und die auch im Spezialfall verschwindender Wechselwirkung mit der Einheitsmatrix identisch wird. Daraus geht hervor, daß sich die Matrix  $S$  relativistisch wie die Einheitsmatrix transformiert. Aus dieser Tatsache folgt jedoch noch nicht, daß sich jedes Matrixelement ( $\mathfrak{f}'|S|\mathfrak{f}''$ ) wie eine Invariante aus den Impulsen des Anfangs- und Endzustandes verhält, da ja bei der Einheitsmatrix nicht das Matrixelement, sondern das Integral

$$\int (\mathfrak{f}'|1|\mathfrak{f}'') d\mathfrak{f}'_1 \dots = 1, \quad (39)$$

d. h. invariant sein soll. Das Differential  $d\mathfrak{f}_i$  ist aber keine Invariante. Die Frage nach den Kovarianzeigenschaften der Matrixelemente wird jedoch einfach beantwortet durch die Feststellung, daß der Ausdruck

$$\frac{d\mathfrak{f}_i}{k^{0}_i} = \frac{d\mathfrak{f}_{ix} d\mathfrak{f}_{iy} d\mathfrak{f}_{iz}}{k^{0}_i} \quad (40)$$

bei Lorentz-Transformationen invariant ist. Ein relativistisch invariantes Integral erhält man also, wenn man fordert, daß jedes Matrixelement

$$(\mathfrak{f}'_1 \dots \mathfrak{f}'_l | S | \mathfrak{f}''_1 \dots \mathfrak{f}''_m) = \frac{\text{invariante Bildung der } \mathfrak{f}' \text{ und } \mathfrak{f}''}{\sqrt{k^{0'}_1 \dots k^{0'}_l \cdot k^{0''}_1 \dots k^{0''}_m}} \quad (41)$$

ist. Der Normierungsfaktor im Nenner sorgt nämlich dann dafür, daß immer dann, wenn z. B. bei der Multiplikation zweier derartiger Matrizen über  $\prod d\mathbf{k}_i$  integriert wird, die invarianten Größen  $\prod \frac{d\mathbf{k}_i}{k_i^0}$  erscheinen.

Wenn das Matrixelement nicht nur von den Impulsen, sondern auch von den Spinrichtungen der Teilchen abhängt, so steht im Zähler von (41) einfach die entsprechende kovariante Spinorbildung. Denn bei der Summation über die Spinrichtungen tritt eine Frage wie die nach den Invarianzeigenschaften eines Differentials nicht auf.

Die Gleichung (41) beantwortet also die Frage nach den relativistischen Eigenschaften der Matrix  $S$  vollständig.

### III. Beziehungen zwischen den beobachtbaren Größen.

a) *Das durch die Matrix  $S$  gegebene Eigenwertproblem.* Im allgemeinen wird durch eine unitäre Matrix kein Eigenwertproblem gestellt, weil sich die Zeilen und Kolonnen der Matrix auf verschiedene Zustände beziehen und weil daher der Begriff Diagonalmatrix sinnlos wird. Auch ist die Anzahl der Zeilen im allgemeinen von der der Kolonnen verschieden. Die Matrix  $S$  hat jedoch die Besonderheit, daß Zeilen und Kolonnen nach der gleichen Reihe von Zuständen geordnet werden, nur beziehen sich die Zeilen auf die einfallenden, die Kolonnen auf die auslaufenden Wellen. Hier wird also durch die Matrix  $S$  ein Eigenwertproblem aufgeworfen, man kann diese Matrix auf Diagonalform bringen. Wenn die Matrix  $S$  die Diagonalform besitzt, so bedeutet das physikalisch, daß in dem betreffenden stationären Streuvorgang die einlaufende Welle mit der auslaufenden bis auf die Phase übereinstimmt.

Physikalisch läuft also die Lösung des Eigenwertproblems für die Matrix  $S$  auf die Aufgabe hinaus: Man suche eine solche Kombination von einlaufenden ebenen Wellen, die alle zu den gleichen Werten von  $\mathfrak{R}$  und  $K^0$  gehören, daß der durch Superposition entstehende einfallende Wellenvorgang mit dem auslaufenden bis auf die Phase übereinstimmt. Der betreffende Eigenwert der Matrix  $S$  hat wegen der Unitarität der Matrix  $S$  den Absolutwert 1 und stellt eben den Phasenfaktor zwischen auslaufender und einfallender Welle dar.

Bezeichnen wir die Variablen, die außer  $\mathfrak{R}$  und  $K^0$  den Zustand charakterisieren, wie in Abschn. IIa einfach mit  $x$ , so kann die Eigenwertaufgabe mathematisch so formuliert werden: Es wird eine Transformationsfunktion

(oder „Schrödinger-Funktion“) der Variablen  $x'$  gesucht, die zu dem stationären Vorgang  $\eta'$  gehört:

$$g(\mathcal{R}'K^{0'}; \eta', x') = g(\eta', x'). \quad (42)$$

Die singulären Teile der ein- und auslaufenden Wellen lauten dann:

$$\begin{aligned} &\delta(\mathcal{R}' - \mathcal{R}'') \delta(K^{0'} - K^{0''}) g(\eta' x') + \\ &+ \delta(\mathcal{R}' - \mathcal{R}'') \delta_+(K^{0'} - K^{0''}) \int g(\eta' x') dx' S(x' x''). \end{aligned} \quad (43)$$

Die Forderung, die auslaufende Welle solle bis auf einen Phasenfaktor  $S_{\eta'}$  mit der einfallenden übereinstimmen, führt also zu der Transformationsgleichung

$$\int g(\eta' x') dx' S(x' x'') = S_{\eta'} g(\eta' x''). \quad (44)$$

Wegen  $\tilde{S}^* S = 1$  ist  $|S_{\eta'}|^2 = 1$ , und wir können etwa setzen:

$$S_{\eta'} = e^{i\eta'}, \quad (45)$$

d. h. der Wert  $\eta'$  der Phase kann gleich zur Numerierung der Zustände benutzt werden.

Eine besonders einfache Lösung hat das Eigenwertproblem (44), wenn die erste Zeile der Matrix  $S$  einen reinen Streuvorgang von Teilchen ohne Spin beschreibt, wenn also bei den betreffenden Energie-Impulswerten keinerlei Emission von neuen Teilchen zu erwarten ist. In der ersten Zeile von (12a) ist dann nur der erste Kasten von Null verschieden, und man kann diese Teilmatrix für sich auf Diagonalf orm bringen. Dies wird offenbar dadurch erreicht, daß man statt der Impulse  $\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2$ , bzw. des Winkels  $\mathbf{e}'_2$  [vgl. (32)] im Schwerpunktsystem die Drehimpulse als Variablen einführt. Die zugehörigen Eigenfunktionen  $g(\mathcal{R}'K^{0'}; \eta' x')$  sind dann im wesentlichen die Kugelfunktionen der Richtung  $\mathbf{e}'_2$  im Schwerpunktsystem. Wegen des Drehimpulssatzes kommen nur Übergänge vor zu Zuständen des gleichen Drehimpulses, die Matrix  $S$  besitzt im Koordinatensystem der Kugelfunktionen also die Diagonalf orm. Das Eigenwertproblem (44) läuft in diesem einfachsten Falle auf das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Streuquerschnitte hinaus: Zerlegung der ebenen Welle in Kugelfunktionen und Bestimmung der Phasenbeziehung zwischen ein- und auslaufender Welle für die einzelnen Kugelwellen.

Man erkennt aus diesem Spezialfall, daß die Matrix  $S$  — jedenfalls hier und wohl auch in allgemeineren Fällen — *diskrete* Eigenwerte besitzt. Die Frage, ob und unter welchen Bedingungen  $S$  auch ein kontinuierliches Eigenwertspektrum besitzen kann, ließe sich wohl erst durch ausführlichere Untersuchungen über den Zusammenhang zwischen der Hamilton-Funktion und  $S$  entscheiden.



Das System der normierten Eigenfunktionen  $g(\mathcal{R}'K^0'; \eta' x')$  bildet wie in der gewöhnlichen Quantenmechanik eine unitäre Matrix. Man beweist dies, indem man zunächst die zu (44) komplex konjugierte Gleichung (unter Weglassung der selbstverständlichen Argumente  $\mathcal{R}', K^0'$ ) aufschreibt:

$$\int g^*(\eta' x') d x' S^*(x' x'') = S_{\eta'}^* g^*(\eta' x''), \quad (46)$$

dann  $x'$  und  $x''$  vertauscht und die Relation  $\tilde{S}^* S = 1$  benutzt:

$$\int g^*(\eta' x'') d x'' S^{-1}(x' x'') = S_{\eta'}^* g^*(\eta' x'). \quad (47)$$

Durch Matrixmultiplikation mit  $S$  und Multiplikation mit  $S_{\eta'}$  erhält man wegen  $S_{\eta'}^* S_{\eta'} = 1$

$$g^*(\eta' x') S_{\eta'} = \int S(x' x'') d x'' g^*(\eta' x''). \quad (48)$$

Ersetzt man nun in dieser Gleichung  $\eta'$  durch  $\eta''$ , multipliziert mit  $g(\eta' x')$  und integriert über alle  $x'$ , multipliziert ferner (44) mit  $g^*(\eta'' x'')$  und integriert über  $x''$ , so entstehen aus (44) und (48) die beiden Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \int g(\eta' x') d x' S(x' x'') d x'' g^*(\eta'' x'') &= S_{\eta'} \int g(\eta' x') d x' g^*(\eta'' x'), \\ \int g(\eta' x') d x' S(x' x'') d x'' g^*(\eta'' x'') &= S_{\eta''} \int g(\eta' x') d x' g^*(\eta'' x'). \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Durch Subtraktion folgt in der üblichen Weise die Orthogonalität der Eigenfunktionen  $g(\eta', x')$ ; die Normierungsbedingung

$$\int g^*(\eta' x') g(\eta' x') d x' = 1 \quad (50)$$

führt dann zu

$$\tilde{g}^* g = 1. \quad (51)$$

Daraus, daß  $g$  alle Eigenschaften einer gewöhnlichen Transformationsmatrix besitzt, kann gefolgert werden, daß eine hermitische Matrix der Phase  $\eta'$  gebildet werden kann:

$$\langle x' | \eta | x'' \rangle = \sum_{\eta'} g(\eta' x') \eta' g^*(\eta' x''). \quad (52)$$

Diese hermitische Matrix  $\eta$  steht mit  $S$  in der einfachen Beziehung

$$S = e^{i\eta}. \quad (53)$$

Man kann also die „beobachtbaren Größen“, d. h. die Gesamtheit der Streu- und Emissionsvorgänge, statt durch die unitäre Matrix  $S$  auch durch die hermitische Matrix  $\eta$  charakterisieren, wobei die Werte  $\eta$  und  $\eta + 2\pi n$  ( $n$  = ganze Zahl) als grundsätzlich äquivalent anzusehen sind. Diese hermitische Matrix ist ein vollwertiger Ersatz für die Hamilton-Funktion, sofern man sich nur für die Größen interessiert, die wir hier als „beobachtbar“ bezeichnet haben. Sie enthält aber weniger als die Hamilton-Funktion;





in der Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle ist gegeben durch die negative Summe der Absolutquadrate der einzelnen Streukoeffizienten (mit oder ohne Emission neuer Teilchen), d. h. einfach durch die Gesamtwahrscheinlichkeit für irgendeinen Streu- oder Emissionsprozeß. Dies ist physikalisch zu erwarten, da ja der genau nach vorne gehende Teil der kohärenten Streuwelle dafür maßgebend ist, wieviel Strahlung aus der Primärwelle weggenommen wird<sup>1)</sup>. Für  $e_2' \neq e_2''$  läßt sich Gleichung (55) nicht so einfach deuten.

An die Stelle der Gleichung (55) treten kompliziertere Beziehungen, wenn man die Streuung von Teilchen mit Spin betrachtet. Sie entstehen aus (55), indem man zu  $e_2'$  jeweils noch einen Spinindex als Argument hinzufügt und außer der Integration über  $de_2'''$  bzw.  $d\mathbf{f}_3'''$  auch noch eine Summation über den Spinindex vornimmt.

Man kann ferner von den Variablen  $e_2'$  durch eine Transformation zu neuen Variablen übergehen, z. B. zu den Drehimpulsquantenzahlen  $l'm'$ . Die Matrixelemente  $f$  hängen dann von diesen Variablen ab:  $f = f(l'm', l''m'')$  und sind übrigens bei reiner Streuung, wenn es sich um spinlose Teilchen handelt, nur für  $l' = l'', m' = m''$  von Null verschieden, da der gesamte Drehimpuls beim Stoß erhalten bleibt. Wenn keinerlei Emission neuer Teilchen stattfindet (d. h. wenn  $g = h = \dots = 0$  ist), so muß, wie oben besprochen,  $f(l'm', l'm')$  die Form  $e^{i\eta'} - 1$  haben und Gleichung (55) geht in die triviale Gleichung über:

$$(e^{i\eta'} - 1) + (e^{-i\eta'} - 1) + (e^{i\eta'} - 1)(e^{-i\eta'} - 1) = 0.$$

Wenn Ausstrahlung stattfindet, so hat  $f$  allgemeiner die Form  $f(l'm', l'm') = \alpha e^{i\eta'} - 1$  und aus Gleichung (55) wird:

$$\alpha^2 - 1 + \sum_{l''m''} \int d\mathbf{f}_3''' |g(l'''m''' \mathbf{f}_3''', l'm')|^2 + \dots = 0. \quad (56)$$

Diese Gleichung besagt einfach, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten für reine Streuung und Streuung unter Emission neuer Teilchen gleich Eins sein muß.

<sup>1)</sup> C. Wick hat in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit diesen Umstand zur Berechnung von Gesamtquerschnitten benutzt und die Bedeutung der genannten Relation auseinandergesetzt. Herr Wick hat mich ferner auf eine Arbeit von Breit (Phys. Rev. 1941) hingewiesen, in der ähnliche Überlegungen über die „Streumatrix“ angestellt werden; die Arbeit von Breit ist mir bisher leider nicht zugänglich gewesen. Herr Wick hat mir ferner mitgeteilt, daß es unveröffentlichte Überlegungen von Bohr, Placzek und Peierls über derartige Beziehungen zwischen den Streukoeffizienten gibt. Für Diskussionen über den Gegenstand dieser Arbeit bin ich Herrn Wick zu großem Dank verpflichtet.

Für den zweiten Kasten der ersten Zeile von Matrix (54) erhält man ganz analog zu (55) die Gleichung

$$\left. \begin{aligned} g(e_2', e_2'' \bar{t}_3'') + g^*(e_2'' \bar{t}_3'' e_2') + \int f^*(e_2''' e_2') g(e_2''' e_2'' \bar{t}_3'') d e_2''' \\ + \int g^*(e_2''' \bar{t}_3'' e_2') f(e_2''' e_2'') d e_2''' \\ + \int g^*(e_2''' \bar{t}_3'' e_2') F(e_2''' \bar{t}_3''', e_2'' \bar{t}_3'') d e_2''' d \bar{t}_3''' \\ + \dots = 0. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Ähnliche Beziehungen folgen für alle anderen Kästen der Matrix (54). Allen diesen Relationen ist gemeinsam, daß eine Summe aus Ausdrücken vom ersten Grade und vom zweiten Grade in den Matrixelementen von  $S$  verschwindet. Man hat diese Relationen bisher wohl deswegen kaum beachtet, weil Stoßprobleme fast immer mit den Methoden der Störungstheorie behandelt worden sind und weil dann der Vergleich zwischen linearen und quadratischen Ausdrücken die Durchführung der Störungsrechnung bis zu den Gliedern zweiter Ordnung notwendig macht.

Man kann die Beziehungen (55) und (57) usw. übrigens noch in einer Matrixform darstellen, die ihren Charakter besser zum Vorschein kommen läßt als die Relation  $\tilde{S}^* S = 1$ , wenn man von der Gleichung (12) ausgeht:

$$S = 1 + R. \quad (12)$$

Die Matrix  $R$  ist für die eigentliche Streuwelle bei allen Stoßproblemen maßgebend, enthält aber nach den Überlegungen von IIb auch selbst noch singuläre Teile. Aus

$$\tilde{S}^* S = (1 + \tilde{R}^*) (1 + R) = 1$$

folgt

$$\tilde{R}^* R = -R - \tilde{R}^*. \quad (58)$$

Hier kommt der allgemeine Charakter der Relationen (55), (57) — nämlich die Tatsache, daß Beziehungen zwischen in den Streukoeffizienten linearen und quadratischen Gliedern bestehen — deutlich zum Ausdruck.

Auf eine Anwendung der in (58) zusammengefaßten Beziehungen auf einzelne praktische Probleme soll verzichtet werden, weil es sich in der vorliegenden Arbeit nur um die grundsätzliche Formulierung der Beziehungen handeln sollte.

Benutzt man zur Darstellung der beobachtbaren Größen die Matrix  $\eta$  mit Hilfe der Gleichung (58)

$$S = e^{i\eta}, \quad (59)$$

so sind die Relationen (58) von selbst erfüllt, wenn nur  $\eta$  eine hermitesche Matrix ist. Allerdings ist der Zusammenhang zwischen den Matrix-

elementen von  $\eta$  und den Streukoeffizienten recht kompliziert, außerdem müßten die physikalischen Bedingungen, die  $\eta$  bestimmen, erst festgelegt werden; die Gleichung (53) hat also zur Festlegung von  $S$  jedenfalls einstweilen keine praktische Bedeutung.

c) *Beziehungen zwischen den beobachtbaren Größen, die nicht aus den allgemeinen Eigenschaften der Matrix  $S$  folgen.* Die Bedingung  $\tilde{S}^* S = 1$  oder die äquivalente Gleichung (58) genügt, zusammen mit den Forderungen der Lorentz-Invarianz, natürlich keineswegs, um in irgendeinem vorliegenden physikalischen Problem die Streukoeffizienten festzulegen. Der durch (19) oder (58) gegebene Rahmen wird daher in der bisherigen Theorie in der Weise ausgefüllt, daß man durch korrespondenzmäßige Überlegungen und durch Berücksichtigung der Lorentz-Invarianz eine einfache Hamilton-Funktion zu konstruieren sucht, die dann vermöge (22) und (25) die unitäre Matrix  $S$  festlegt.

In der zukünftigen Theorie der Elementarteilchen wird der durch (19) oder (58) gegebene Rahmen aber wahrscheinlich nicht in dieser Weise ausgefüllt werden können.

Denn erstens führen alle bisher studierten Hamilton-Funktionen, die eine Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen enthalten zu den bekannten Divergenzschwierigkeiten. Zweitens gibt es kaum einen Grund, aus dem eine Hamilton-Funktion, wenn sie überhaupt existiert, eine so einfache Form haben sollte, wie die bisher studierten. Die bisherige Theorie zeigt z. B., daß indirekt, auf dem Umweg über andere „virtuelle“ Teilchen, sogenannte Mehrkörperkräfte zwischen den Elementarteilchen auftreten. Es ist kein Grund einzusehen, warum solche Kräfte nicht schon gleich zu Anfang in der Hamilton-Funktion stehen sollten. Man könnte sich z. B. vorstellen, daß man durch das Hinzufügen verschiedener (eventuell unendlicher vieler) Glieder, die solchen Mehrkörperkräften entsprechen, zu einer Hamilton-Funktion gelangen würde, die keine Divergenzschwierigkeiten mehr hervorruft. Eine solche Hamilton-Funktion könnte vielleicht auch noch allen Korrespondenzforderungen genügen und sich relativistisch richtig verhalten. Aber eine solche Hamilton-Funktion könnte jedenfalls nicht mehr am Anfang einer Theorie stehen, sondern müßte aus einfachen Bedingungen anderer Art — z. B. aus der Forderung, daß keine Divergenzen auftreten sollen — indirekt erschlossen werden.

Auf jeden Fall wird man also erwarten müssen, daß am Anfang einer zukünftigen Theorie Bedingungen anderer Art stehen, die den Rahmen (19) bzw. (58) ausfüllen, nicht eine Hamilton-Funktion; wobei es offen bleiben

kann, ob diese Bedingungen irgendeine komplizierte Hamilton-Funktion konstruieren, oder ob sie — was wohl wahrscheinlicher ist — ohne den Umweg über eine Hamilton-Funktion zur Matrix  $S$  oder zur Matrix  $\eta$  führen.

Die Existenz einer Hamilton-Funktion ist aus folgenden Gründen unwahrscheinlich: die Hamilton-Funktion könnte entweder in der üblichen Weise aus einer von Wellenfunktionen abhängigen Energiedichte durch Integration über den Raum entstehen. In diesem Fall kann man die Wechselwirkung kaum anders einführen als durch Nahwirkungskräfte, d. h. indem man Produkte mehrerer Wellenfunktionen am gleichen Ort bildet. Solche Ansätze scheinen aber zwangsläufig Divergenzen zur Folge zu haben. Oder aber die Hamilton-Funktion enthält doch irgendwie die Vorstellung von Fernwirkungen, was durch die Annahme endlicher Teilchenradien nahegelegt wird. Dann wird es kaum möglich sein, eine ähnliche „Fernwirkung“ in der Zeitrichtung zu vermeiden, ohne die Lorentz-Invarianz zu zerstören. Der Begriff Hamilton-Funktion ist aber gerade mit der Vorstellung einer „Nahwirkung“ in zeitlicher Richtung verknüpft, wie aus der üblichen Gleichung

$$H\psi = i\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad (59)$$

hervorgeht. Unter „Nahwirkung“ und „Fernwirkung“ wird dabei rein formal das Bestehen von differentiellen bzw. von Integralbeziehungen verstanden. Eine Hamilton-Funktion wird es also wahrscheinlich in der zukünftigen Theorie nicht geben.

Wenn man die Frage aufwirft, welche neuen Beziehungen später in die Lücke treten könnten, die durch den Fortfall einer Hamilton-Funktion entsteht, so ist es nützlich, den Zusammenhang der Matrix  $\eta$  mit den bisherigen Grundlagen der Theorie, insbesondere mit der Hamilton-Funktion, klarzustellen. Zu diesem Zweck stellt man die Hamilton-Funktion  $H$  am besten als Volumenintegral der Energiedichte  $h$  dar, die man wieder in die kinetische Energiedichte  $h_0$  und die Wechselwirkungsenergiedichte  $h_1$  spaltet:

$$H = \int dV (h_0 + h_1). \quad (60)$$

$h_1$  ist im allgemeinen relativistisch invariant (z. B. das skalare Produkt aus Stromdichtevektor und Vektorpotential). Die Matrixdarstellung von  $H$  im Raum der Impulse  $\mathbf{r}'$ ,  $\mathbf{r}''$  lautet:

$$(\mathbf{r}' | \int dV h_0 | \mathbf{r}'') = \delta(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \sum k_i^0; \quad (61)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' | \int dV h_1 | \mathbf{r}'') &= f(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') \int dV e^{i(\sum \mathbf{r}_i' - \sum \mathbf{r}_i'') \cdot \mathbf{r}} \\ &= f(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') (2\pi)^3 \delta(\sum \mathbf{r}_i' - \sum \mathbf{r}_i''). \end{aligned} \quad (62)$$



Für die zeitabhängige Schrödinger-Funktion im Impulsraum:  $\chi(\mathbf{f}'_i, t)$  folgt daher die Wellengleichung

$$\chi(\mathbf{f}', t + dt) = \int \left\{ \delta(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') - i dt \left[ \sum k_i^{0'} \delta(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') + \right. \right. \\ \left. \left. + (2\pi)^3 f(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') \delta\left(\sum \mathbf{f}'_i - \sum \mathbf{f}''_i\right) \right] \right\} d\mathbf{f}'' \chi(\mathbf{f}'', t). \quad (63)$$

Setzt man

$$\chi(\mathbf{f}'t) = e^{-i \sum k_i^{0'} t} \psi(\mathbf{f}'t), \quad (64)$$

so ergibt sich für  $\psi$  die Beziehung

$$\psi(\mathbf{f}', t + dt) = \int \left[ \delta(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') - (2\pi)^3 i dt f(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') e^{i(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})t} \right. \\ \left. \cdot \delta\left(\sum \mathbf{f}'_i - \sum \mathbf{f}''_i\right) \right] d\mathbf{f}'' \psi(\mathbf{f}'', t). \quad (65)$$

Wenn man nun annimmt, daß die Wechselwirkungsenergie  $h_1$  und damit  $f(\mathbf{f}'\mathbf{f}'')$  sehr klein seien, so kann man Gleichung (65) integrieren und erhält in erster Näherung

$$\psi(\mathbf{f}', t) = \int \left[ \delta(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') - (2\pi)^3 i f(\mathbf{f}'\mathbf{f}'') \int_0^t dt e^{i(\sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''})t} \right. \\ \left. \cdot \delta\left(\sum \mathbf{f}'_i - \sum \mathbf{f}''_i\right) \right] d\mathbf{f}'' \psi(\mathbf{f}'', 0). \quad (66)$$

Für den durch (10) gegebenen Ausgangszustand erhält man daher in der gleichen ersten Näherung:

$$\psi(\mathbf{f}'', \infty) = \delta(\mathbf{f}''\mathbf{f}') - \\ - (2\pi)^4 i \delta_+ \left( \sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} \right) \delta\left(\sum \mathbf{f}'_i - \sum \mathbf{f}''_i\right) f(\mathbf{f}''\mathbf{f}'). \quad (67)$$

Andererseits folgt aus (25) und (53) — in erster Näherung in der als klein angenommenen Matrix  $\eta$  — für die singulären Teile von  $\psi$ :

$$\delta(\mathbf{f}''\mathbf{f}') + i \delta\left(\sum \mathbf{f}'_i - \sum \mathbf{f}''_i\right) \delta_+ \left( \sum k_i^{0'} - \sum k_i^{0''} \right) (\mathbf{f}' | \eta | \mathbf{f}'').$$

Der Vergleich mit Gleichung (67) ergibt

$$(\mathbf{f}' | \eta | \mathbf{f}'') = - (2\pi)^4 f(\mathbf{f}''\mathbf{f}') + \text{Glieder höherer Ordnung}. \quad (68)$$

Die Matrix  $\eta$  stimmt also nach (62) und (68) (bis auf unwesentliche Faktoren und bis auf eine Vertauschung) in erster Näherung überein mit der Teilmatrix aus der Wechselwirkungsenergie, die zu Übergängen zwischen Zuständen gleicher Energie und gleichen Impulses gehört. Allerdings ist diese erste Näherung im allgemeinen keine brauchbare Approximation an die wirkliche Lösung. Aber jedenfalls zeigt Gleichung (68) eine gewisse Verwandtschaft der Matrix  $\eta$  mit der Wechselwirkungsenergie.

Man könnte im Hinblick auf diese Verwandtschaft daran denken, ein physikalisches Problem statt durch Angabe der Hamilton-Funktion durch



Angabe der Matrix  $\eta$  zu definieren, und einfache Ansätze für die Matrix  $\eta$  auf ihren physikalischen Inhalt zu untersuchen. Aber es besteht wieder kein Grund dafür, daß die Matrix  $\eta$  irgendeine besonders einfache Form haben — z. B. nur Wechselwirkungen zwischen je zwei Teilchen enthalten — sollte. In den bisher untersuchten Fällen, in denen die Hamilton-Funktion eine einfache Form hatte und in denen man die Streukoeffizienten (und damit  $\eta$ ) als erste Näherung eines (allerdings prinzipiell nicht konvergenten) Störungsverfahrens ermittelte, hatte jedenfalls  $\eta$  keine einfache Form.

Insbesondere muß man hier daran denken, daß sich die Existenz stationärer Zustände von Systemen aus mehreren Elementarteilchen in recht komplizierter Weise in  $\eta$  ausdrückt. Die Existenz solcher Zustände hat nämlich zur Folge, daß die Matrizen  $S$  und  $\eta$  Zeilen und Kolonnen enthalten, die sich auf die Translationszustände dieser zusammengesetzten Systeme beziehen, wobei die Ruhenergie des betreffenden stationären Zustandes dieselbe Rolle spielt, wie die Ruhmasse der Elementarteilchen in den übrigen Zeilen und Kolonnen. Denn es kann ja Stoßprozesse geben, bei denen solche zusammengesetzte Teilchen entstehen und den Ort des Stoßes mit irgendeiner Geschwindigkeit verlassen. In der Darstellung der Matrix  $\eta$  treten die zusammengesetzten Teilchen und die Elementarteilchen in der gleichen Weise in Erscheinung. Dies ist einerseits befriedigend im Hinblick auf die Erwartung, daß in der zukünftigen Theorie die Ruhmassen der Elementarteilchen ebenso bestimmt werden wie in der bisherigen die Energien stationärer Zustände, andererseits zeigt dieser Umstand deutlich, daß die Matrix  $\eta$  auch in der zukünftigen Theorie keine einfache Form haben dürfte, sondern daß sich  $\eta$  aus einfachen Bedingungen **an** anderer Art erst ergeben muß.

Diese anderen Bedingungen aufzufinden scheint mir das zentrale, bisher noch völlig ungelöste Problem der Theorie der Elementarteilchen. Die vorliegende Arbeit stellte sich jedoch nur die Aufgabe zu zeigen, daß in der zukünftigen Theorie die Matrix  $\eta$  oder die zugehörige unitäre Matrix  $S$  eine wichtige Rolle spielen werden selbst dann, wenn es in dieser Theorie keine Hamilton-Funktion und keine Schrödinger-Funktion im Sinne der Gleichung (59) mehr gibt.

---

(Mitteilung aus dem Institut für Höhenstrahlenforschung der Universität Berlin.)

## Zur Ermittlung von Höhenstrahlenkoinzidenzen \*).

Von Werner Kolhörster.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 10. September 1942.)

Für Zählrohrmessungen der Höhenstrahlung wurden von Tuwim<sup>1)</sup> sowie Jánosy<sup>2)</sup> unter der Voraussetzung rein geometrischen Strahlenverlaufs Zählrohrtheorien entwickelt, die das Verhalten vorgegebener Koinzidenzanordnungen durchaus angemessen erklären oder im voraus berechnen lassen; daneben behilft man sich in der Praxis vielfach mit einfachen Überlegungen, um ohne viel Rechnungen und Quadraturen die Ergebnisse zunächst einmal übersehen zu können. Wieweit ein solches Vorgehen berechtigt und vorteilhaft verwendbar ist, wurde an Hand von Daten geprüft, die anfangs gelegentlich zu anderen Zwecken gewonnen, später durch systematische Messungen ergänzt worden sind. Sie sollen noch erweitert werden, je nachdem Rohrmaterial anderer

Durchmesser zur Anfertigung von Zählrohren zur Verfügung steht.

Koinzidenzanordnungen von Zählrohren zeichnen sich dadurch aus, daß nur Strahlen zur Messung gelangen, welche in dem durch die inneren Tangenten der Zählrohre bestimmten Raumwinkel verlaufen. Ist das Verhältnis von Zählrohrradius zu Zählrohlänge  $r:l \ll 1$ , so schneiden die Raumwinkel auf der Himmelskugel langgestreckte sphärische Rechtecke aus, welche die Strahlung liefern.

Da die Intensitätsverteilung der Höhenstrahlung bei ungefährrer Rotationssymmetrie um die Vertikale einem  $\cos^2$ -Gesetz entspricht, so kann die hierdurch bedingte Komplikation vermieden werden, wenn man im wesentlichen mit Vertikalstrahlen bis zu einem nicht zu großen Winkelbereich um den Zenit, etwa bis  $\pm 30^\circ$ , arbeitet. Diese Vereinfachung ist durchaus naturgemäß, da bei Koinzidenzanordnungen meist kleinere Öffnungswinkel zur Verwendung kommen. Dabei überwiegt die mit dem Winkel  $\alpha$  der inneren Tangenten über dem Zählrohrdurchmesser einfallende Strahlung, die für kleine  $\alpha$  etwa proportional  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{a} = \frac{d}{a}$  (Zählrohr-

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> L. Tuwim, Berl. Ber. 91, 360, 830, 1931; Journ. Phys. Rad. 3, 614, 1932. — <sup>2)</sup> L. Jánosy, ZS. f. Phys. 99, 369; 104, 68, 1936.

durchmesser  $d$ , Zähldrahtabstand  $a$ ) sein muß. Wenn man weiter nur Zählrohre gleicher und großer wirksamer Drahtlänge  $l$ , etwa von der Größenordnung 1 m benutzt, so sind Änderungen des Winkels  $\beta$  der inneren Tangenten über die Zählrohlänge bei wechselndem Zähldrahtabstand zwar proportional  $1/a$ , doch macht sich die Intensitätsänderung wegen der aus sehr

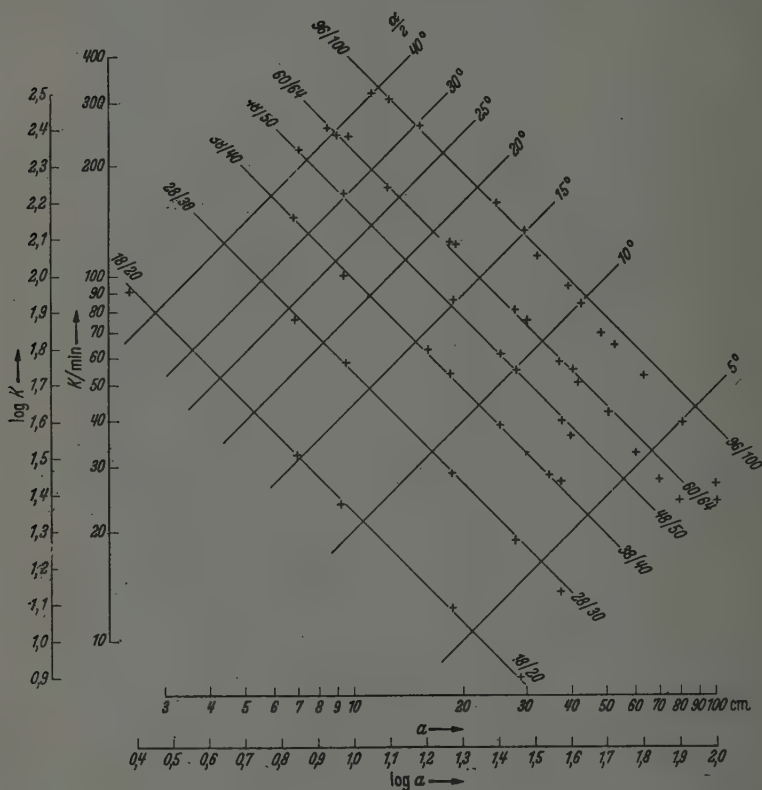


Fig. 1.

geneigten Richtungen zusätzlich einfallenden geringen Intensität bei sehr großen Winkeln  $\beta$  kaum bemerkbar, besonders wenn auch der Zählrohrdurchmesser klein gehalten wird.

Die unter solchen Bedingungen ausgeführten Zählungen der Koinzidenzen je zweier gleichartiger Zählrohre erfolgten nach den am Dahlemer Institut entwickelten Methoden<sup>1)</sup> durch Registrierung mit hoch auflösenden

<sup>1)</sup> W. Kolhörster u. E. Weber, Phys. ZS. 42, 13, 1941.

Verstärkern, Untersetzern und Zählrohren über eine genügend lange Zeit. Vielfach wurden dabei zwei oder drei verschiedene Verstärkeranordnungen von ein und demselben Zählrohrpaar gesteuert, was sich zur Kontrolle des Auflösungsvermögens der Verstärker und beim Erkennen von Magnetstörungen nützlich erwies. Die mit Aluminium- und Eisenrohren von 1,8

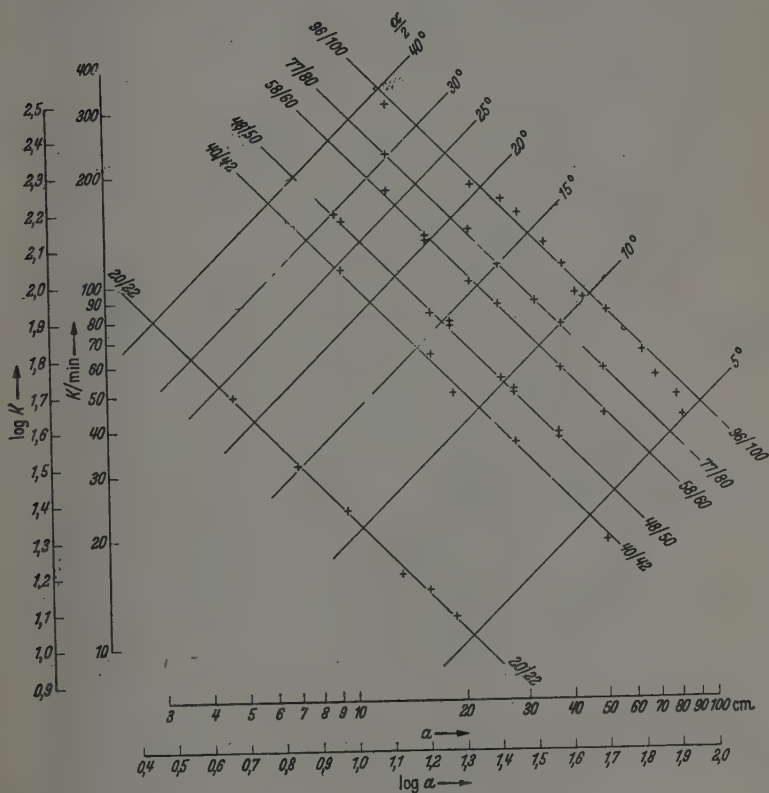


Fig. 2.

bis 9,6 cm innerem Durchmesser und Wandstärken<sup>1)</sup> von 0,1, 0,15 und 0,2 cm gewonnenen Koinzidenzzahlen je Minute sind nach Berichtigung auf den mittleren Luftdruck von 755,0 mm Hg mit  $-3\%/cm$  Hg in doppelt logarithmischer Darstellung in den Fig. 1 und 2 eingetragen.

<sup>1)</sup> Die Zählrohrbezeichnungen, z. B. 48/50, bedeuten, daß der innere Durchmesser 4,8 cm, der äußere 5,0 cm, die Wandstärke 0,1 cm betragen.

Man sieht, daß die gewonnenen Meßpunkte für die meisten Zählrohrpaare überraschend gut auf Geraden liegen, deren gleiche Neigungen trotz verschiedener Durchmesser sofort auffallen. Die Punkte erfüllen also in unseren logarithmischen Koordinaten  $\log K$ ,  $\log a$  Gleichungen der Form  $\log K - A \log a - \log b = 0$ .

Nun zeigen die Meßergebnisse der Tabelle 1, daß  $Ka/d^2 = C$  sehr weitgehend konstant, also  $\log K + \log a - \log (d^2) - \log C = 0$  ist, so daß man Identität erhält für

$$A = -1, \quad \log b = \log (Cd^2).$$

Somit ist  $K = \frac{Cd^2}{a}$  oder, da  $\frac{d}{a} = \sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $K = Cd \sin \frac{\alpha}{2}$  anzusetzen. Danach besteht Proportionalität zwischen Koinzidenzenzahl und Raumwinkel unter diesen vereinfachten Bedingungen.

Tabelle 1.

Durchmesser in mm	$\log Ka$	$\log \frac{Ka}{d^2}$	$\frac{Ka}{d^2}$	Wandstärke
Aluminiumrohre.				
18/20	$2,348 \pm (0,011 = 0,43 \%)$	1,838	68,86	0,1
28/30	$2,724 \pm (0,017 = 0,63 \%)$	1,830	67,61	0,1
38/40	$2,995 \pm (0,018 = 0,60 \%)$	1,836	68,55	0,1
48/50	$3,196 \pm (0,010 = 0,31 \%)$	1,834	68,23	0,1
	Mittel	1,834	68,31	0,1
		$\pm (0,004 = 0,22 \%) \pm (0,62 = 0,92 \%)$		
60/64	$3,345 \pm (0,020 = 0,60 \%)$	1,789	61,52	0,2
96/100	$3,587 \pm (0,028 = 0,78 \%)$	1,622	41,88	0,2
Eisenrohre.				
20/22	$2,348 \pm (0,015 = 0,64 \%)$	1,746	55,72	0,1
40/42	$3,001 \pm (0,023 = 0,77 \%)$	1,797	62,66	0,1
48/50	$3,148 \pm (0,013 = 0,41 \%)$	1,786	61,09	0,1
58/60	$3,330 \pm (0,040 = 1,20 \%)$	1,803	63,53	0,1
	Mittel	1,7953	62,43	0,1
		$\pm (0,009 = 0,45 \%) \pm (1,22 = 1,95 \%)$		
77/80	$3,459 \pm (0,009 = 0,26 \%)$	1,686	48,53	0,15
96/100	$3,594 \pm (0,020 = 0,56 \%)$	1,629	42,56	0,2

Der Neigungswinkel der Geraden sollte, wegen  $A = -1$ ,  $135^\circ$  betragen, wie die Fig. 1 und 2 mit aller Deutlichkeit zeigen. Sie ergeben sehr genau gleiche Abschnitte auf den Koordinaten, wobei die Länge der Achsenabschnitte  $Cd^2 = K$ , also gleich der Koinzidenzenzahl für den Zähl drahtabstand  $a = 1$  cm ist. Aus den Figuren ist die folgende kleine Zusammenstellung zur Bestimmung von  $C$  entnommen worden:

## Aluminiumrohre.

	Wandstärke 0,1 cm				Wandstärke 0,2 cm	
$d$ .....	1,8	2,8	3,8	4,8	6,0	9,6
$\log K$ .....	2,350	2,733	2,990	3,187	3,333	3,585
$-2 \log d$ .....	0,510	0,897	1,160	1,362	1,556	1,965
$\log C$ .....	1,840	1,836	1,830	1,825	1,777	1,620
$C$ .....	69,2	68,2	67,6	66,8	59,8	41,7

Mittel  $C_{Al 0,1} = 67,95 \pm (1,15 = 1,69 \%)$ .

## Eisenrohre.

	Wandstärke 0,1 cm				Wandstärke	
					0,15 cm	0,2 cm
$d$ .....	2,0	4,0	4,8	5,8	7,7	9,6
$\log K$ .....	2,350	3,000	3,149	3,330	3,459	3,620
$-2 \log d$ .....	0,602	1,204	1,362	1,527	1,7	1,965
$\log C$ .....	1,748	1,796	1,779	1,809	1,686	1,655
$C$ .....	56,0	62,5	60,1	63,5	48,5	45,3

Mittel  $C_{Fe 0,1} = 62,1 \pm (1,7 = 2,75 \%)$ .

Für Aluminium ist zwischen 1,8 und 4,8 cm Rohrdurchmesser im Mittel  $C = 67,95 \pm (1,15 = 1,69 \%)$ , also auf rund 2% konstant. Ein zunächst geringer Gang der Konstanten mit wachsendem Durchmesser scheint jedoch schon in diesem Bereich vorhanden. Bei Rohren von über 6 cm Durchmesser dürfte er stärker zunehmen, allerdings sind die bisher vorliegenden Zahlen schon wegen der doppelten Wandstärke noch nicht ohne weiteres vergleichbar. Ein entsprechendes Verhalten zeigen auch die Eisenrohre.  $C$  für Eisen ergibt sich im Mittel aus den drei Rohrpaaren zu  $62,1 \pm (1,7 = 2,75 \%)$ . Die angeführten Mittelwerte von  $C$  gelten bis zu etwa 40 cm Zähl drahtabstand oder für Öffnungswinkel  $\alpha/2$  zwischen  $5^\circ$  bis etwa  $40^\circ$ . Weitere Einzelheiten können den Figuren entnommen werden.

Man ist demnach in der Lage, Koinzidenzzahlen von Aluminium- und Eisenrohren unter den aus den Figuren ersichtlichen Bedingungen in dieser trivialen Weise sogar auf einige Prozente genau zu ermitteln. So ergeben sich z B für einen Öffnungswinkel  $\alpha/2 = \pm 15^\circ$  bei 755 mm Luftdruck unter einem Dach von etwa 7,5 cm Wasseräquivalent für Aluminium- bzw. Eisenrohre von 1 mm Wandstärke die folgenden mittleren Koinzidenzzahlen je Minute:

Rohrdurchmesser in cm .....	1,8	2,0	2,8	3,8	4,0	4,8	5,8
K Aluminium/Min. ....	31,4	34,9	48,9	66,4	69,9	83,9	101,3
K Eisen/Min .....	28,7	31,9	44,7	60,7	63,9	76,7	92,6



Von den Ergebnissen mit Eisenrohren fällt die starke Abweichung des  $C$ -Wertes beim Rohrpaar 20/22 auf. Es ist dieses ein unzuverlässiges und leicht zum Durchschlag-neigendes Rohrpaar, das deshalb nicht ausgesteuert werden konnte. Seine für diese Übersicht nicht in Betracht kommenden und bei der Mittelbildung nicht verwendeten Daten sind jedoch angeführt, um zu zeigen, wie mangelnde Ansprechwahrscheinlichkeit — hier 90 % — sich auswirkt. Ebenso sind die Werte der Rohre über 6 cm Durchmesser nur zur ersten Übersicht gegeben, um darzutun, daß bei großen Durchmessern die Vereinfachungen nicht mehr so weitgehend zulässig sind. Bei kleineren Abständen scheint noch die lineare Beziehung gültig zu sein, während sich bei größeren Abständen die Kurve mehr und mehr krümmt, wie es der Einfluß der endlichen Zählrohrlänge fordert, den man nach der exakten Zählrohrtheorie ermitteln kann. Diese deutlich ausgeprägten Krümmungen machen sich auch noch andeutungsweise bei etwas kleineren Durchmessern bereits bemerkbar, während sie unter 6 cm Durchmesser etwa von der Größe der Versuchsfehler sind, so daß der Anwendungsbereich unserer einfachen Formel bis zu diesen Rohrdurchmessern zulässig ist. Die beträchtliche Abnahme der Konstanten für die großen Rohrdurchmesser von 9,6 cm ist bei Aluminium- und Eisenrohren nahezu gleich. Sie werden sowohl von der Geometrie wie der Ansprechwahrscheinlichkeit der Rohre wesentlich beeinflusst sein, auch die Absorption wirkt wegen der doppelten Wandstärke dieser Rohre im gleichen Sinne. Letztere ergibt bei den beiden 48/50 Rohren eine Verminderung von etwa 10 %, also ein  $\mu/\rho$  von schätzungsweise  $0,07 \text{ g cm}^{-2}$ . Über das Verhalten der großen Rohre wird Abschließendes erst gesagt werden können, wenn die ergänzenden Messungen durchgeführt sein werden. Diese Werte kommen für die hier vorliegende kleine Zusammenstellung nicht in Betracht, deren Zweck es ist, zu zeigen, wie weit die Versuche eine einfache und leicht zu handhabende quantitative Darstellung bei Rohren normaler Durchmesser gestatten.

Zur Ausführung der Messungen sind zum Teil Leihinstrumente der Deutschen Forschungsgemeinschaft sowie Mittel des Stifterverbandes verwendet worden, wofür auch an dieser Stelle besonders gedankt sei.

*Berlin-Dahlem, September 1942.*

## Über den inversen Stark-Effekt der $D$ -Linien des Natriums \*).

Von H. Kopfermann in Göttingen und W. Paul in Kiel.

Mit 8 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Juni 1942.)

Es wird der inverse Stark-Effekt an der Hyperfeinstruktur (Hfs.) der  $D$ -Linien des Natriums mit Hilfe eines Atomstrahls untersucht. Infolge der extrem kleinen Linienbreiten gelingt es erstmalig, das Aufspaltungsbild dieses Überganges in elektrischen Feldern bis 250 kV/cm in allen Einzelheiten zu studieren. Dabei ergibt sich, daß die  $D_1$ -Linie aus zwei  $\pi$ - und zwei  $\sigma$ -Komponenten besteht, die  $D_2$ -Linie aus zwei  $\pi$ - und vier  $\sigma$ -Komponenten. Die Hfs. jeder  $D$ -Linie wird als Ganzes unter Beibehaltung des Hfs.-Abstandes nach Rot verschoben, wobei innerhalb der  $\sigma$ -Komponenten der  $D_2$ -Linie noch eine Zweifachaufspaltung eintritt. Die theoretisch bei der  $D_2$ -Linie zu erwartenden beiden anderen  $\pi$ -Komponenten konnten nicht gefunden werden. Die Verschiebung des  $^2S_{1/2}$ -Terms im elektrischen Feld wird berechnet. Die sich daraus ergebenden relativen Verschiebungen der  $^2P$ -Terme stimmen ausgezeichnet mit den Voraussagen der Theorie überein.

1. *Einleitung.* Der Stark-Effekt an den  $D$ -Linien des Natriums ist mit Erfolg zum ersten Male von Ladenburg<sup>1)</sup> untersucht worden. Er benutzte dabei die folgende Anordnung: Aus dem Licht einer Natriumlampe wurden durch eine wohldefinierte Natriumdampfschicht, die durch die Platten eines Feldkondensators begrenzt war, die  $D$ -Linien herausabsorbiert und das Stark-Effekt-Verhalten dieser Absorptionslinien okular beobachtet. Mit Hilfe einer Lummer-Gehrke-Platte konnte dann festgestellt werden, daß bei den höchsten erreichten Feldern von 160 kV/cm Rotverschiebungen der beiden  $D$ -Linien stattfinden, die im  $\sigma$ -Licht auf 0,025 Å geschätzt wurden und angenähert proportional mit dem Quadrat der Feldstärke gingen; im  $\pi$ -Licht war die Verschiebung geringer. Irgendwelche Einzelheiten, etwa über die Zahl der  $\pi$ - und  $\sigma$ -Komponenten oder gar über das Verhalten der Hyperfeinstruktur dieser Linien im elektrischen Feld ließen sich infolge der großen Breite der Absorptionslinien nicht beobachten.

Nachdem im Kieler Physikalischen Institut eine neue Methode zur Beobachtung sehr kleiner Stark-Effekte ausgearbeitet worden war<sup>2)</sup>, bei der im wesentlichen der absorbierende Dampf der Ladenburgschen An-

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> R. Ladenburg, ZS. f. Phys. **28**, 51, 1924. — <sup>2)</sup> L. Jenkel u. H. Kopfermann, ZS. f. Phys. **117**, 145, 1941; H. Kopfermann u. Ch. Otzen, ebenda, S. 156; W. Paul, ebenda S. 774.

ordnung durch einen senkrecht zur Primärlichtrichtung laufenden Atomstrahl ersetzt wurde, lag es nahe, den Stark-Effekt der *D*-Linien mit dieser Anordnung in seinen Feinheiten zu studieren. Die Ergebnisse dieser Bemühungen geben wir im folgenden wieder<sup>1)</sup>.

2. *Versuchsanordnung.* Die Versuchsanordnung ist im Prinzip die gleiche wie die in den angegebenen Arbeiten verwendete. Im einzelnen

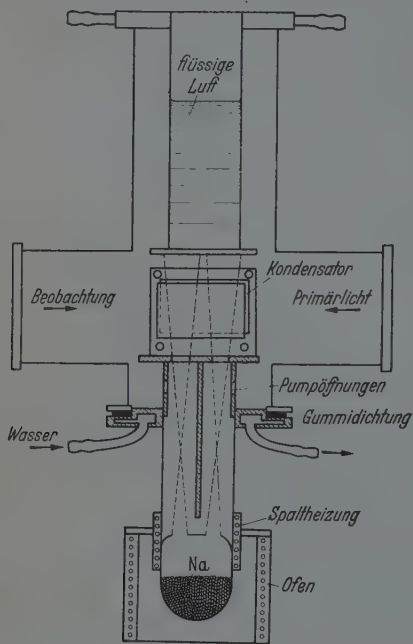


Fig. 1. Atomstrahlapparatur mit Doppelstrahl.

zeigt sie mancherlei Änderungen und Verbesserungen. Als Primärlichtquelle diente eine Osram-Na-Lampe, die zur Vermeidung von Selbstumkehr etwas unterbelastet wurde. Die eigentliche Atomstrahlapparatur ist in Fig. 1 skizziert; sie gestattet, den Feldkondensator und die Spalte außerhalb des Vakuumrohres zu justieren. Um die Absorptionsschicht bei kleinem Öffnungswinkel des Atomstrahls möglichst groß zu machen, wurden zwei Atomstrahlen hintereinander angeordnet, die im gleichen Gefäß untergebracht waren. Fig. 2 zeigt das Kondensationsbild der beiden Strahlen auf einer der Kondensatorplatten, wie es stets beobachtet wurde, wenn die Anordnung zur Reinigung und Neubeschickung mit Natrium geöffnet

wurde: zwei scharf begrenzte, fast parallele und sauber getrennte Atomstrahlspuren. Die Kondensatorplattenlänge betrug 3 cm, der Abstand der Platten 0,1 cm.

Um die beiden *D*-Linien bei breitem Spalt gut getrennt zu erhalten, wurden ein Zeisscher Dreiprismenapparat konstanter Ablenkung und ein Steinheilscher GH-Glasapparat hintereinandergeschaltet. Als Kameraobjektiv diente dasjenige des Zeiss-Apparates ( $f = 65$  cm). Der Fabry-Perot stand hinter dem Sechsprismensatz im parallelen Strahlengang. Seine

<sup>1)</sup> Vorgetragen bei der Tagung des Gaues Niedersachsen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 28. Februar 1942 in Hamburg.

Verspiegelungen hatten ein Reflexionsvermögen von etwa 92%. Da jedes Prisma annähernd unter dem Polarisationswinkel getroffen wurde, stellten die zwölf Prismenflächen gleichzeitig einen fast 100%igen Polarisationsapparat dar, der normalerweise nur die  $\pi$ -Komponenten hindurchließ. Zur Beobachtung der  $\sigma$ -Komponenten konnte vor dem Kollimatorspalt ein Drehquartz angebracht werden, der für die Wellenlänge der  $D$ -Linien die Polarisationssebene gerade um  $90^\circ$  drehte. Die elektrische Anordnung zur Felderzeugung war die gleiche wie bei Paul<sup>1)</sup>. Die Belichtungsdauer der Isopan SS-Platten überschritt selten 1 Minute.

3. *Meßergebnisse.* Bei okularer Beobachtung sieht man ohne Feld die Hfs. der beiden  $D$ -Linien in Absorption, d. h. jede  $D$ -Linie als Dublett, herührend von der Hfs.-Aufspaltung des  $^2S_{1/2}$ -Terms<sup>2)</sup>, so wie es in Fig. 3b



Fig. 2. Kondensationsbild der beiden Atomstrahlen auf einer der Kondensatorplatten.

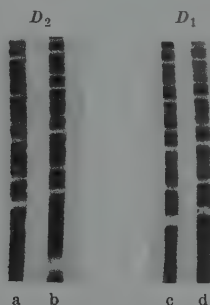


Fig. 3.  $\pi$ -Komponenten der  $D$ -Linien.  
a und c bei 150 kV/cm;  
b und d ohne Feld.



Fig. 4.  $\sigma$ -Komponenten der  $D_2$ -Linie.  
a ohne Feld,  
b bei 180 kV/cm.

zu sehen ist. Die Linienbreite läßt sich aus dem bekannten Komponentenabstand von  $\sim 0,02 \text{ \AA}$  leicht zu  $\sim 0,003 \text{ \AA}$  abschätzen. Es können also Stark-Effekt-Verschiebungen von  $0,001 \text{ \AA}$  noch sicher gemessen werden. Beim Einschalten des Feldes sieht man okular sehr schön die ruckartige Rotverschiebung (bzw. Aufspaltung) der Komponenten. Bei einem Feld von  $60 \text{ kV/cm}$  ist diese Verschiebung gerade erkennbar, bei  $280 \text{ kV/cm}$  überschreitet sie bereits die Größe des Hfs.-Abstandes.

Im einzelnen ist festzustellen, daß bis zu den höchsten verwendeten Feldstärken die  $\pi$ -Komponenten beider  $D$ -Linien sich im elektrischen Feld ohne aufzuspalten so verschieben, daß der Hfs.-Abstand innerhalb der Ge-

<sup>1)</sup> W. Paul ZS. f. Phys. **117**, 774, 1941. — <sup>2)</sup> Zur Orientierung über die Hfs. der Na  $D$ -Linien siehe z. B. H. Kopfermann, Kernmomente, S. 101. Leipzig 1940.

naugkeit, mit der gemessen werden konnte, d. h. auf etwa  $0,0002 \text{ cm}^{-1}$ , erhalten bleibt (siehe Fig. 3). Dabei werden die  $\pi$ -Komponenten der  $D_2$ -Linie erheblich stärker nach Rot verschoben als die der  $D_1$ -Linie. Die  $\sigma$ -Komponenten von  $D_1$  erleiden innerhalb der Meßgenauigkeit die gleiche Verschiebung wie ihre  $\pi$ -Komponenten. Nur die  $D_2$ -Linie spaltet im  $\sigma$ -Licht auf (siehe Fig. 4), und zwar jede Hfs.-Komponente in je zwei Stark-Effekt-Komponenten. Auch hier bleibt die Hfs.-Aufspaltung im Feld erhalten.

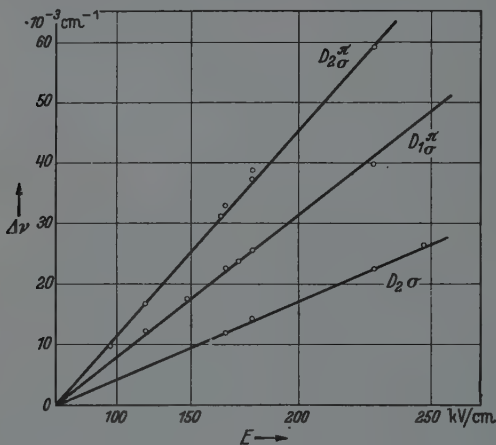


Fig. 5. Stark-Effekt-Verschiebung  $\Delta\nu$  in  $10^{-3} \text{ cm}^{-1}$  in Abhängigkeit vom Feld  $E$  in  $\text{kV/cm}$  (Quadratische  $E$ -Skala).

Fig. 5, in der die Rotverschiebung  $\Delta\nu$  als Funktion der Feldstärke  $E$  (quadratische Skala) angegeben ist, stellt die Meßergebnisse dar und zeigt gleichzeitig die quadratische Abhängigkeit vom Feld. Aus ihr ergibt sich, daß Ladenburg die Größe der Verschiebungen erheblich überschätzt hat.

Die  $\Delta\nu$ -Werte der  $D_1$ -Linie liegen sehr genau in der Mitte zwischen den  $\Delta\nu$ -Werten der  $D_2$ -Linie.

Das bei der Trennung der Viererstruktur von  $\sigma - D_2$  erreichte Auflösungsvermögen des Fabry-Perot bei 30 mm Etalon kommt sehr nahe an  $2 \cdot 10^6$  heran.

4. Größe der Termverschiebungen. Um aus den Komponentenverschiebungen die Termverschiebungen zu bestimmen, muß man die Termverschiebung des  $^2S_{1/2}$ -Terms aus der Dispersionsformel berechnen, was im Falle der  $D$ -Linien mit erheblicher Genauigkeit ausgeführt werden kann, weil die  $f$ -Werte dieses Übergangs sehr genau bekannt sind und diejenigen der

höheren Absorptionsglieder und des Kontinuums weit übertreffen. Es gilt dann die Abschätzung:

$$\Delta W_{2S_{1/2}} = - \frac{e^2}{8\pi^2 m} E^2 \frac{f_a}{\nu_a^2}.$$

$f_a$  = Absorptionsoszillatorenstärke,  $\nu_a$  = Absorptionsfrequenz.

Mit  $f_a = 1$  und  $E = 250$  kV/cm ergibt sich eine Verschiebung  $\delta\nu$  des  $2S_{1/2}$ -Terms nach größeren Energiewerten von:

$$\delta\nu_{2S_{1/2}} = -0,049 \text{ cm}^{-1}.$$

Mit Hilfe dieses Wertes und den gemessenen  $\Delta\nu$ -Zahlen für die Komponentenverschiebungen bei 250 kV/cm erhält man das Termverschiebungsbild der Fig. 6. Da die beiden  $2P$ -Terme ohne Feld keine meßbare Hfs.-Aufspaltung haben, so benehmen sie sich augenscheinlich im elektrischen Felde so, als ob gar kein Kernmoment vorhanden wäre. Die eingezeichneten Stark-Effekt-Komponenten sind nach Zahl und Polarisation die im ganzen beobachteten Linien.

5. *Diskussion der Ergebnisse.* Nach den Vorstellungen, die man sich über Verschiebung und Aufspaltung der Stark-Effekt-Terme macht, hat man im Hinblick auf den Zeeman-Effekt zu erwarten, daß jeder Term mit dem Drehimpuls  $\vec{F}$  im elektrischen Feld in  $(2F+1)/2$  Stark-Effekt-Terme aufspaltet, entsprechend den  $(2F+1)$  möglichen Werten der Quantenzahl  $m_F$  (Komponente von  $\vec{F}$  in Feldrichtung), unter Berücksichtigung, daß im elektrischen Feld die Terme mit  $+m_F$  und  $-m_F$  die gleiche Energie besitzen. Die Tatsache, daß ein Kernmoment mit der Quantenzahl  $I = 3/2$  existiert<sup>1)</sup>, zwingt dazu, als Gesamtdrehimpulsquantenzahlen die  $F$ -Zahlen anzunehmen, die in Fig. 7a an den feldlosen Termen angegeben sind ( $F = I + J$ ,  $I + J - 1, \dots$ ,

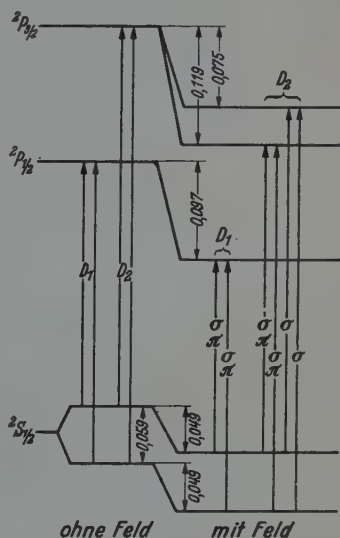


Fig. 6. Beobachtetes Termlagenbild der Übergänge  $2S_{1/2} - 2P_{1/2, 3/2}$  des Na I bei 250 kV/cm. (Die relative Lage der Duolett-Terme ist nicht maßstäblich; eingetragene Termverschiebungen in  $\text{cm}^{-1}$ ).

<sup>1)</sup> L. P. Granath u. C. M. van Atta, Phys. Rev. **44**, 935, 1933.



$I - J$ ). In einem schwachen äußeren elektrischen Feld, bei dem  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  noch fest gekoppelt sind, erhält man daher die in Fig. 7b angegebene Zahl und Ordnung der Stark-Effektterme<sup>1)</sup>. Bei starkem äußeren Feld, das  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  völlig entkoppelt, ist dagegen mit der Termordnung von Fig. 7d

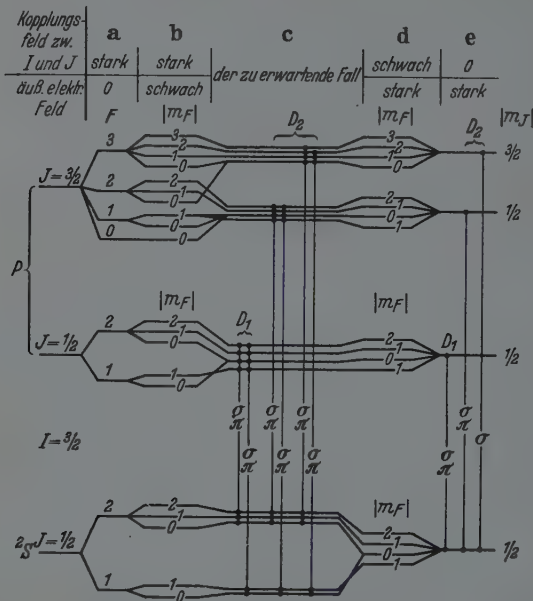


Fig. 7. Theoretisches Aufspaltungsbild der Hfs. der D-Linien im äußeren elektrischen Feld bei verschiedener Stärke dieses Feldes und die dazugehörigen Übergänge.

zu rechnen. Beim Übergang von 7b nach 7d erhält man die entsprechende Umgruppierung wie beim Paschen-Back-Effekt der Hfs.: die Hfs.-Terme ordnen sich symmetrisch um die  $m_J$ -Schwerpunkte.

Im Falle der  $2P$ -Terme des Natriums tritt bereits bei sehr kleinen elektrischen Feldern diese Umgruppierung ein, da die Hfs.-Aufspaltung und damit die Kopplungskraft zwischen  $\vec{I}$  und  $\vec{J}$  extrem klein ist. Daher kann man hier mit einer sichtbaren Einwirkung des Kernmomentes auf die Stark-Effektaufspaltung nicht rechnen und die Terme benehmen sich so, als ob  $m_J$  für die Einstellung zum elektrischen Feld allein maßgeblich wäre.

Beim  $2S_{1/2}$ -Term liegen dagegen die Verhältnisse extrem anders. Die bei höchsten Feldstärken noch völlig intakte Hfs.-Aufspaltung zeigt, daß

<sup>1)</sup> Schwaches elektrisches Feld heißt dabei ein solches, dessen Verschiebungen klein gegen die Abstände der Hfs.-Terme sind.

von einer Entkopplung der Impulsvektoren noch keine Rede sein kann, obwohl die Stark-Effektverschiebungen mit der Hyperfeinstrukturaufspaltung vergleichbar werden ( $0,05:0,06 \text{ cm}^{-1}$ ). Man befindet sich im Zustand der Fig. 7c. Für die Stark-Effektterme des  $2S_{1/2}$ -Zustandes sind also eindeutig die  $m_F$ -Zahlen verantwortlich<sup>1)</sup>. Die Übergangsregeln lauten daher:

$$\Delta m_F = \pm 1, 0^2)$$

für  $\sigma$ - bzw.  $\pi$ -Komponenten, so daß man die Zahl und die Polarisierung der Stark-Effekt Komponenten erwarten muß, die in Fig. 7c angegeben sind. Von ihnen konnten wir aber die schwach verschobenen  $\pi$ -Komponenten der  $D_2$ -Linie trotz eifriger Bemühungen nicht finden. Wenn sie vorhanden sind,

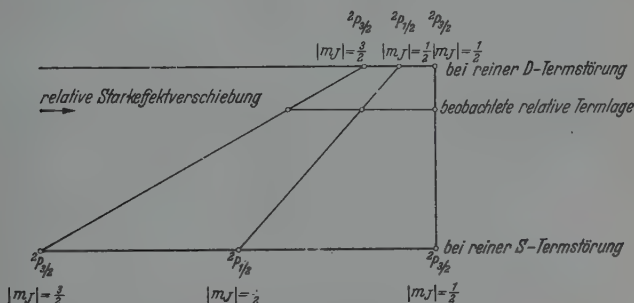


Fig. 8. Relative Stark-Effekt-Verschiebung der  $2P$ -Terme bei verschiedener Störterm-Lage.

muß ihre Intensität allermindestens fünfmal kleiner sein als die der entsprechenden  $\sigma$ -Komponenten. Hier liegt ein gewisser Widerspruch der Beobachtung mit der Theorie vor, den wir im Augenblick nicht klären können.

Was die Richtung der Verschiebungen anbelangt, so steht sie im Einklang mit den Erwartungen. Der  $2S_{1/2}$ -Term sollte als Grundterm unter allen Umständen nach größeren Energiewerten verschoben sein. Die Verschiebung der beiden  $2P$ -Terme in derselben Richtung (aber in stärkerem Maße) ergibt sich aus der Lage der nächst benachbarten Störterme:  $4s\ 2S$  und  $3d\ 2D$ , die beide über den  $3p\ 2P$ -Termen liegen<sup>3)</sup>.

Aus der bekannten Beziehung zwischen Zeeman-Intensität und Stark-Effektverschiebung hat Lochte-Holtgreven<sup>4)</sup> die relativen Stark-

<sup>1)</sup>  $m_J$  ist in diesem Koppelungsfalle gar keine Quantenzahl, worauf uns F. Hund aufmerksam gemacht hat. — <sup>2)</sup> Und nicht  $\Delta m_J = \pm 1, 0$ . —

<sup>3)</sup> Siehe z. B. Bacher-Goudsmit, Atomic Energy States. Hill, Mc Graw, 1932. — <sup>4)</sup> W. Lochte-Holtgreven, ZS. f. Phys. 109, 358, 1938.

Effektverschiebungen von Termmultipletten bei verschiedenen Störtermen angegeben. Für den Fall eines  ${}^2P$ -Termmultipletts sind seine Werte in Fig. 8 eingezeichnet. Die von uns beobachteten relativen Stark-Effektverschiebungen passen ausgezeichnet in das Schema und sagen aus, daß es sich um eine gemischte  $S$ - $D$ -Term-Störung handelt, bei der die Wirkung des  $D$ -Terms überwiegt. Dies wird — zum mindesten qualitativ — verständlich, wenn man das Dublettermchema des Na I betrachtet: die nach „unten“ gehende Wirkung des  $4s\,{}^2S$ -Terms wird zum Teil von dem in umgekehrter Richtung wirkenden  $3s\,{}^2S$ -Term kompensiert, so daß sich die Beeinflussung der  ${}^2P$ -Terme durch den  $4d\,{}^2D$ -Term fast allein bemerkbar macht. Besonders die von der Theorie verlangte Lage des  ${}^2P_{1/2}$ -Terms in der Mitte zwischen den beiden  ${}^2P_{3/2}$ -Termen ( $|m_J| = 3/2$ ,  $|m_J| = 1/2$ ) kommt im Experiment sehr sauber heraus.

Der Osram-Studiengesellschaft danken wir bestens für die freundliche Überlassung der Na-Lampen.

---

## Symmetrisch angeregte Elektroneninterferenzen \*).

Von W. Kossel, I. Ackermann und G. Möllenstedt in Danzig.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Die Frage nach dem dynamischen Zusammenspiel von Elektronenwellen, die aus verschiedenen Richtungen zugleich von außen auf den Kristall gegeben werden, führt zu Beobachtungen und Diskussionen über den Feinbau der Interferenzvorgänge. Unter anderem ergaben sich Hinweise auf Abweichungen von der einfachen Spiegelungsvorstellung bei der Bragg-„Reflexion“ an Netzebenen.

Bei der Beobachtung von Röntgen- und Elektroneninterferenzen steht praktisch stets der Vorgang im Vordergrund, daß ein Primärstrahl oder Primärbündel überlegener Intensität aus bestimmter Richtung eingestrahlt und die im Kristall daraus gebildeten Sekundärbündel beobachtet werden — im einfachsten Fall entsteht *ein* Sekundärbündel durch Reflexion an einer Netzebene. Dies Auftreten von Strahlen in neuen Richtungen ist das größte, zunächst meist allein interessierende Phänomen.

Nun führt aber schon der Gedanke an die Wellen der dem Festkörper selbst angehörenden Elektronen auf Vorgänge, bei denen der Kristall von Bewegungen aller möglichen Richtungen zugleich durchflutet wird. Wie sehen die Gitterinterferenzen — die ja in der Elektronentheorie des Festkörpers eine maßgebende Rolle spielen — dann aus? Die Theorie arbeitet ja von alters her mit der dynamischen Koexistenz von Bündeln verschiedener Richtungen. Was zeigt sich — ist die einfachste Frage —, wenn man aus „Einfalls“- und „Reflexions“-Richtung zugleich kohärente Bewegungen auf eine Netzebene schickt? Wie spielen Reflexion und Gegenreflexion ineinander? Wir berichten über einige erste Versuche hierzu, die sich der für Phasenbeobachtung schon als empfindlich bewährten Interferenzstreifen gleicher Neigung bedienen, die an planparallelen Kristallfolien auftreten, wenn man ein konvergentes Elektronenbündel benutzt<sup>1)</sup>.

Die Netzebene, die von zwei Seiten zugleich mit Elektronen gleicher Intensität beschickt werden soll, stehe senkrecht zum Schirm. Ihre Spur

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> W. Kossel u. G. Möllenstedt, Naturwissensch. **26**, 660, 1938; Ann. d. Phys. (5) **36**, 113, 1939; C. H. Mac Gillavry, Physica **7**, 329, 1940; W. Kossel, Ann. d. Phys. (5) **40**, 17, 1941; G. Möllenstedt, ebenda (5) **40**, 39, 1941; G. Möllenstedt u. I. Ackermann, Naturwissensch. **29**, 647, 1941; W. Kossel u. G. Möllenstedt, Ann. d. Phys. (5) **42**, 287, 1942.

dort sei  $N$  (Fig. 1)  $AA'$  seien die Spuren zweier einander zugeordneter Reflexionsrichtungen. Ihr Abstand entspricht also dem doppelten Bragg-Winkel  $2\alpha_0$ . Zunächst werden in einen endlichen Richtungsbereich, der  $A$

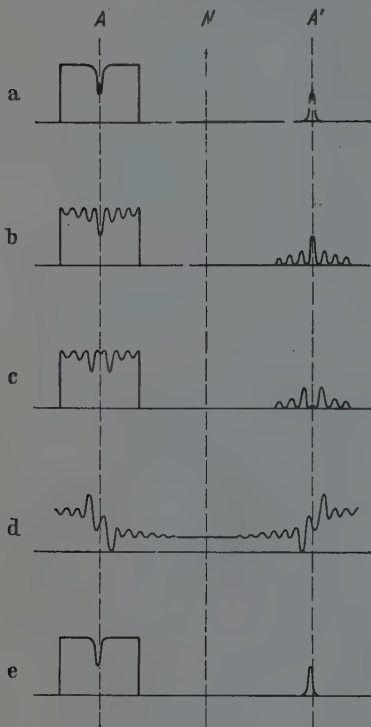


Fig. 1

enthält, Elektronen eingeschossen. In stufenweiser Verfeinerung beobachtet man dann:

a) Elementare „Reflexion“. Elektronen der Richtung  $A$  werden an der Netzebene nach  $A'$  gespiegelt, dem dort auftretenden Maximum entspricht eine Absorptionslinie in  $A$ .

b) Dünne gut planparallele Kristalle zeigen den „Reflex“ aus a) symmetrisch umgeben von Streifen gleicher Neigung. Im Primärkegel tritt das entsprechende Feld dunkler Linien auf.

c) Genaues Zusehen zeigt, daß die Streifen aus b) nicht, wie elementar zu erwarten, äquidistant sind. Die innersten sind vielmehr nach innen gerückt, ein Zeichen dafür, daß die Phasengeschwindigkeit der Elektronenwellen in der Nähe der Reflexionsrichtung merklich verändert ist. Das bedeutet, daß hier bereits die elementare Betrachtung eines umgesteuerten

Bündels nicht mehr ausreicht, sondern das Wechselspiel zu beachten ist, indem bereits das „reflektierte“ Bündel auf das „einfallende“ zurückwirkt. Mit wachsender Dicke rücken schließlich die ersten Seitenminima in die Mitte, an Stelle des „Reflexes“ liegt ein dunkler Streifen, auf der Primärseite ein Maximum — man hat den von der Theorie als „Pendellösung“ vorausgesehenen Fall, daß die Energie des reflektierten zum einfallenden zurückgewandert ist.

Bei allem dem bleiben die Erscheinungen symmetrisch um die elementare Reflexionsrichtung.

Nun erlaubt gerade die Analogie zum Resonanzvorgang zwischen Oszillatoren gut, hervorzuheben, daß man mit diesem experimentell am nächsten liegenden Verfahren, von einer Richtung her eine starke Primär-

bewegung auf den Kristall zu schicken, doch einen sehr speziellen Fall untersucht. Wenn man damit beginnt, ein Pendel allein anzustoßen, heißt das, daß man die Bewegungen der beiden stets um  $\pm \pi/2$  hintereinander herlaufen läßt, oder anders ausgedrückt, daß man der symmetrischen und der antisymmetrischen Bewegung des Gesamtsystems exakt gleiche Amplituden gibt. Ist man experimentell daran gebunden? — oder: erhält man immer die um die Reflexionsrichtung symmetrischen Bilder, die diesem singulären Fall entsprechen?

Man bemerkt auch bei Versuchen mit einseitiger Einstrahlung gelegentlich an einzelnen Stellen auffallende Intensitätsunsymmetrien — allein, das sind Einzelfälle verwickelterer Art und zunächst zurückzustellen. Es interessiert der grundsätzlich andersartige Vorgang, in dem bewußt die Einseitigkeit vermieden wird. Man strahlt von der bisherigen „Einfalls“- und der „Reflexions“-Richtung gleichzeitig ein. Hier ergibt sich eine sehr empfindliche Prüfung für das Bestehen der bisher angenommenen Strukturen, ein richtiger Nullversuch.

Denkt man nämlich die in Fig. 1a bis c skizzierten Verhältnisse dem neuen Versuch entsprechend ergänzt, indem man jeweils auch nach rechts ein Primärbündel gleicher Stärke gibt, so findet sich völlige Kompensation: was auf der einen Seite durch Reflexion nach drüben verloren wird, wird von dort — wo jetzt auch eine Primärbewegung einfällt — genau ersetzt. Das gilt ebenso für die Streifen gleicher Neigung (1b und c) — da stets Symmetrie um die elementare Reflexionsrichtung herrscht, müssen Verlust und Zustrahlung einander völlig aufheben. Weder Reflexionsmaximum noch Streifensystem sollten in einem breiten Bündel auftreten, in dem beide Richtungen  $A$  und  $A'$  mit gleicher Intensität beschickt werden.

Fig. 2 zeigt die Realisierung: Ein Längsspalt der bereits früher verwendeten Art wird schrittweise von einer Seite her über die beiden Richtungen eines der starken Prismenreflexe eines Glimmers gerückt. In 2a ist erst eine Richtung erfaßt: ihr steht außerhalb des Primärstreifens der Reflex der anderen Seite gegenüber, begleitet von den Streifen gleicher Neigung. (Der Reflex zeigt bereits in der Mitte ein Minimum — es liegt die in 1c betrachtete Rücksteuerung in die Primärrichtung vor — in dieser liegt daher ein Maximum — die korrespondierenden Richtungen lassen sich vermöge der Abbildung von Einzelheiten des Blendenrandes mit großer Schärfe einander zuordnen.)

In Fig. 2b und 2c umfaßt die primäre Einstrahlung die beiden einander zuspiegelnden Richtungen: es bleiben völlig deutliche Streifensysteme bestehen. Niemals wurde bisher eine Kompensation beobachtet.



Das kann nicht etwa auf inhomogene Beleuchtung des Spalts zurückgeführt werden, die infolge von Intensitätsüberlegenheit einer Seite eine endliche Differenzwirkung übrig ließe. Der Spalt schneidet als Aperturblende mitten aus dem hinter der starken ersten Linse auf eine Breite von  $1/2$  bis 1 cm auseinandergelaufenen Elektronenbündel einen Bereich von  $0,1 \times 0,5 \text{ mm}^2$  aus. Dies enge Gebiet hat sich praktisch stets als völlig gleichförmig beleuchtet gezeigt. Die Antwort des Nullversuchs geht also dahin, daß die elementar gewohnte Symmetrie, um die Reflexionsrichtung nicht allgemein besteht.

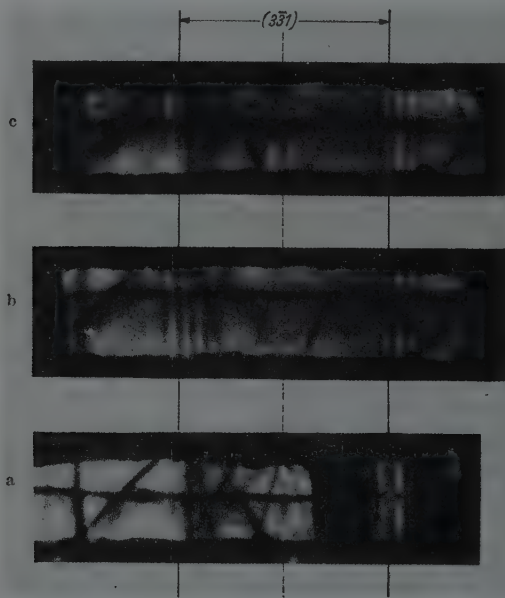


Fig. 2. Übergang von einseitiger zu symmetrischer Einstrahlung.  
(Muskovit; Dicke  $D = 1100 \text{ \AA}$ ; Strahlspannung  $U = 73 \text{ kV.}$ )

In Fig. 2c ist statt dessen Symmetrie um die Netzebene erreicht. Der Intensitätsverlauf ist in Fig. 1d skizziert: An den Orten der der einfachen Bragg-Formel entsprechenden Richtungen, denen im Elementarversuch Absorption auf der Primärseite, Intensität auf der Sekundärseite zukommt, liegt hier auf beiden Seiten gerade der *Übergang* von einem Maximum (innen) zu einem Minimum (außen) der Intensität. Das tiefste Minimum und höchste Maximum der ganzen Erscheinung schließen sich jeweils innen und außen an.

Man bemerkt sofort die Analogie mit den „Kikuchi-Bändern“ der in stärkeren Kristallen diffus gewordenen Strahlung. Auch dort bleibt die

elementar (nach dem Beispiel der Kikuchischen Linienpaare) erwartete Auslöschung aus. Dort erschweren indes die komplexen Entstehungsbedingungen den Einblick. Hier hat man den Elementarversuch der Entstehung aus definiertem Bündel in dünnem Kristall.

Man darf hoffen, von hier aus auch das Entstehen der Intensitätsstufen näher zu beleuchten. In der Tat kehrt das in Fig. 2c sichtbar werdende, im Schema 1d wiedergegebene Ansteigen zu helleren Streifen außerhalb der „Reflex“-Richtungen auf guten Aufnahmen wieder. (Man muß daran erinnern, daß verbindliche Aussagen über die zu einem Reflexpaar oder Band gehörende Struktur Wiederholung an verschiedenen Stellen erfordern.

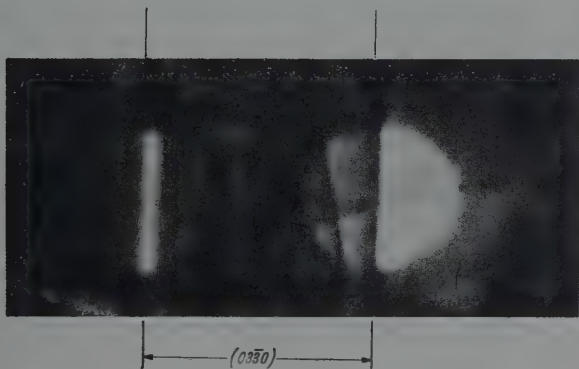


Fig. 3. Schwächung des Primärstrahls im Inneren des Bandes.  
(Bleiiodid, Dicke  $D = 1250 \text{ \AA}$ ; Strahlenspannung  $U = 53,1 \text{ kV}$ .)

Die häufigen Störungen durch schräg verlaufende Fremddlinien müssen ausgeschaltet sein.) Das liegt, wie Fig. 1d andeutet, im gleichen Sinn wie eine in unseren Beobachtungen im konvergenten Bündel immer wieder sichtbar werdende Tatsache: In dem vom kohärenten Primärbündel erleuchteten Bereich erscheinen die Bänder immer — der Kristall mag so dünn sein wie er will — dunkel auf dem Grund. Das in einheitlichem Vorgang elektronenoptisch auf großen Divergenzwinkel gebrachte Elektronenbündel verhält sich hierin ebenso wie das statistisch durch Streuprozesse in einer kristalleigenen oder Fremdschicht<sup>1)</sup> aus einem Parallelstrahl diffus gemachte Bündel. Hier läßt sich der Vorgang noch verschärfen: Leuchtet man mit einem noch engeren homozentrischen Bündel — etwa einem der in früheren Arbeiten gebrauchten Kreiskegelbündel von etwa  $10^\circ$  Öffnung — eine der Reflexrichtungen oder Bandkanten an, so ist der ins Bandinnere fallende

<sup>1)</sup> H. Boersch, ZS. f. techn. Phys. 18, 576, 1937.

Teil der leuchtenden Scheibe dunkler (Fig. 3) — es sieht so aus, als wehre, das Bandinnere die Elektronen ab, schon wenn sie unmittelbar aus dem Primärbündel kommen. Der Eindruck ist sehr unmittelbar, wenn man auf dem Leuchtschirm beobachtet und den Primärkegel gegen den Kristall bewegt. Das Band wirkt dann wie ein absorbierender Wolkenstreifen, hinter den die leuchtende Scheibe tritt. Die bei dünnen Glimmern ( $D \sim 700 \text{ \AA}$ ) schwache Erscheinung steigert sich etwa bei  $\text{Pb J}_2$  von  $1800 \text{ \AA}$  zum Eindruck praktischer Undurchlässigkeit der stärksten (niederst indizierten) Bänder.

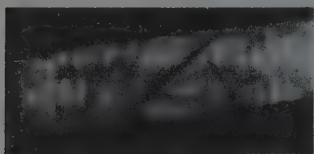


Fig. 4.  $U = 73 \text{ kV}$ , Abstand Kristall—Platte  $336 \text{ mm}$ , Vergrößerung 3fach.

In diesem Zusammenhang ist an die „Helldunkel-Linien“ der Gitterquellen—Interferenzen von Röntgenstrahlen zu erinnern: Die elementare „Reflexions“-Richtung kann auch dort gerade den Übergang von verminderter zu vermehrter Intensität enthalten, und soviel wir beobachten konnten, hängt das Auftreten von

Intensitätsstufen dort eindeutig mit dieser Erscheinung zusammen. Beides, Streifensystem wie Intensitätsstufe, ist mit Elektronen besser ausgebildet.

Es muß betont werden, daß an der Erscheinung noch viel zu klären ist. Der Gedankengang, aus dem heraus sie gesucht wurde: daß zwei einander entgegenlaufende Bewegungen zu anderen Phasenbeziehungen führen können als dem singulären Fall, den man mit einseitiger Einstrahlung realisiert, ist natürlich mit dem positiven Ausfall des Nullversuchs noch keineswegs zu Ende behandelt. Wir beobachten z. B., wie bei Herausdrehen des Spaltbildes aus der zur Netzebene senkrechten Richtung (Fig. 4) die Streifen sich aus dem Bereich, wo Bild und Spiegelbild sich decken, in die Bereiche einfacher Absorption und Reflexion fortsetzen. Vielfach rücken sie merklich zur Seite, gerade in den Versuchen aber, die uns experimentell als die besten erscheinen, gibt das Zusammenspiel im mittleren Bereich keinen Anlaß zu einer merklichen Streifenverschiebung. Um ganz sicher zu gehen, werden eingehende Experimente nötig sein.

Die Tatsache, daß die Kompensation ausbleibt, bedeutet im zuletzt angegebenen Fall, daß die Extinktion überraschenderweise auf jeder Seite unter einem anderen Winkel erfolgt, als die Zustrahlung (Fig. 1 e). Es wird, wenn etwa, wie oben, nach außen zuerst ein Minimum liegt, unter  $(\alpha_0 + \varepsilon/4) - \varepsilon$  ist der Streifenabstand — gegen die Netzebene absorbiert, unter  $(\alpha_0 - \varepsilon/4)$  auf der anderen Seite reflektiert. Der Ablenkwinkel bleibt wie im Elementarfall  $2\alpha_0$ , in der Überlagerung aber verrät sich die Abweichung der Einzellagen von  $\alpha_0$ . Der Versuch mit der symmetrischen Einstrahlung hat in diesem Fall

also die Bedeutung anzuzeigen, daß schon der einfache Reflexionsversuch hier der elementar angenommenen Symmetrie gegen die Netzebene entbehrt;

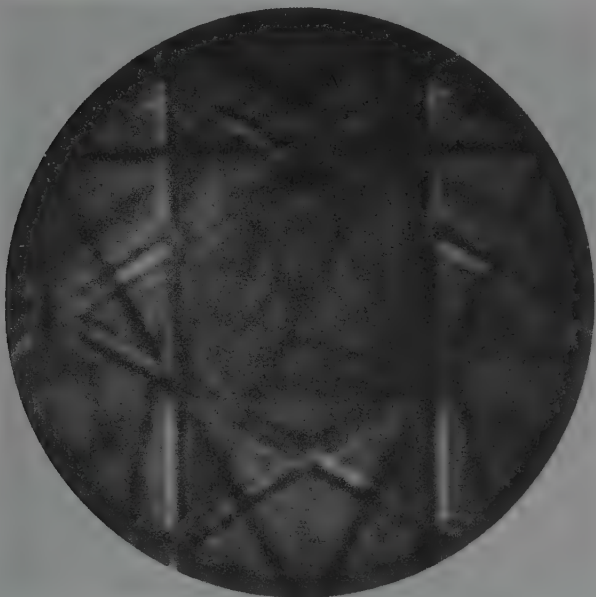


Fig. 5.  $U = \text{etwa } 43 \text{ kV}$ , Vergrößerung 3,2fach.

die primitive Gleichheit von Einfallswinkel und Ausfallswinkel, wie man sie beim „Spiegeln an den Netzebenen“ voraussetzt, besteht dann bei strenger Prüfung nicht. Die Abweichungen sind von der Ordnung der Winkel  $\varepsilon$  zwischen den Streifen gleicher Neigung und kommen nur bei entsprechend empfindlicher Prüfung, wie dem Kompensationsversuch, ans Licht.

Wir hoffen, auf diese Erscheinungen später zurückzukommen.

Fig. 5 gibt abschließend ein umfassenderes Bild. Statt eines einzelnen Bandes ist das charakteristische Gebiet um die Spaltenebenen-Normale angeleuchtet, in dem die Bänder der drei Prismenflächen (060),  $(3\bar{3}1)$  und  $(331)$

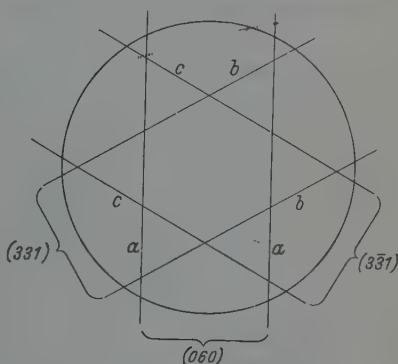


Fig. 5 a. Zur Erläuterung von Fig. 5; halber Maßstab.

einander schneiden. Der Primärkegel ist so weit geöffnet, daß er dies ganze Gebiet umfaßt — er reicht noch über den hier wiedergegebenen Bildumfang hinaus. Das Glimmerblatt ist so dünn ( $D = 700 \text{ \AA}$ ), daß ein Parallelstrahl bei der angewandten Expositionszeit erst ein reines Kreuzgitterbild (das bekannte Punktsystem) entstehen lassen, Kikuchi-Linien oder -Bänder noch nicht sichtbar werden lassen würde. Das hier wiedergegebene Feld des weitgeöffneten konvergenten Kegels zeigt überall an den Bändern die Streifen gleicher Neigung. Daß sich beim Durchkreuzen anderer Bänder deren Lage ändert, wurde früher mit einseitiger Einstrahlung, also großer Dissymmetrie der Intensitäten, beobachtet. Auch hier springen die an einem Band entlang laufenden Streifen an jeder solchen Grenze um, wobei die Symmetrie um die Mittellinie gewahrt bleibt. Die Verteilung an dem der Symmetrieebene des monoklinen Kristalls zugeordneten Band (060) ist verschieden von der an den anderen beiden Prismenflächen: So liegen etwa bei  $aa$  (vgl. Fig. 5a) die hellsten Maxima außerhalb (Abstand 38 mm), bei  $bb$  und  $cc$  innerhalb (Abstand 35 mm) der Bandkanten (Abstand 36,5 mm) — Maxima und Minima haben die Plätze getauscht.

*Danzig-Langfuhr*, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule  
15. August 1942.

---

## Betrachtungen über die harte Komponente der kosmischen Strahlung \*).

Von Helmuth Kulenkampff in Jena.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

1. Bei der Betrachtung des Intensitätsverlaufs des Mesotronenanteils der kosmischen Strahlung dürfen Zerfall und Absorption nicht voneinander unabhängig und einfach additiv behandelt werden, weil der unterschiedliche Einfluß auf die Gestalt des Energiespektrums von wesentlicher Bedeutung ist. — 2. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes und mit teilweiser Bezugnahme auf Messungen, die im hiesigen Institut ausgeführt worden sind, wird der allgemeine Charakter des Intensitätsverlaufs besprochen a) in Luft mit zunehmender Schichtdicke (Messungen mittels Neigung einer Koinzidenzapparatur), b) in Luft bei abnehmender Schichtdicke (Änderung der Höhe über dem Erdboden bzw. Luftdruckänderung), c) in Wasser mit zunehmender Schichtdicke. Zweckmäßig erweist sich dabei nach Ehmert eine Darstellung durch ein Potenzgesetz  $J = T^{-\gamma}$  ( $T$  = Schichtdicke in  $\text{g/cm}^2$ , gemessen vom Scheitel der Atmosphäre ab). Der Exponent  $\gamma$  ist jedoch nur im Falle a) konstant ( $\gamma_N = 2,1$ ), im Falle b) nimmt er von einem Anfangswert  $\gamma_L^0 = \text{etwa } 1,0$  zunächst mit abnehmender Schichtdicke zu, im Falle c) nimmt er vom Anfangswert  $\gamma_W^0 = 0$  mit wachsender Schichtdicke zu. — 3. Eine Berechnung der Zerfallskonstanten der Mesotronen ist grundsätzlich unsicher, wenn Messungen in Luft mit solchen in Medien großer Dichte verglichen werden. Es wird eine neue Bestimmung aus den Anfangsneigungen  $\gamma_N$  und  $\gamma_L^0$  versucht, die zu einem Wert

$$\tau_0 = (1,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-8} \text{ sec}$$

führt; dieser ist mit sonstigen Bestimmungen in befriedigender Übereinstimmung.

### Einleitung.

Durch eingehende Untersuchungen mit Zählrohrkoinzidenzen konnten Geiger und Fünfer<sup>1)</sup> zuerst mit Sicherheit beweisen, daß die kosmische Strahlung von sehr komplexer Natur ist und versuchsweise ein erstes Schema der verschiedenen Strahlenarten und ihrer Umwandlungen aufstellen. Im einzelnen haben spätere Beobachtungen in Verbindung mit allgemeinen theoretischen Erkenntnissen gezeigt, daß dieses erste Schema ergänzt und verbessert werden mußte, insbesondere seit der Entdeckung des Mesotrons durch Anderson; eine ausführliche Behandlung dieses Problems haben vor wenigen Jahren Euler und Heisenberg<sup>2)</sup> gegeben.

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> H. Geiger u. E. Fünfer, ZS. f. Phys. **93**, 543, 1935. — <sup>2)</sup> H. Euler u. W. Heisenberg, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **17**, 1, 1938.



Die Mesotronen werden erst sekundär gebildet und zerfallen mit einer kurzen Lebensdauer von der Größenordnung  $\tau \sim 10^{-6}$  sec. Hierdurch entstehen die schon früher bemerkten Unterschiede im Intensitätsverlauf in Medien stark verschiedener Dichte und können so verständlich gemacht werden<sup>1)</sup>. Darüber hinaus ist häufig versucht worden, aus solchen Unterschieden die Zerfallskonstante zu berechnen.

Schon vor einigen Jahren sind im hiesigen Institut durch die Herren H. Kappler, H. Martin und K. Müller † experimentelle Arbeiten durchgeführt worden, die in einem größeren Rahmen das Ziel hatten, Entstehung und Absorption der Mesotronenkomponente und die durch sie ausgelöste Sekundärstrahlung zu untersuchen und aus dem Intensitätsverlauf einen möglichst genauen Wert für die Zerfallskonstante zu ermitteln. Gemessen wurden stets Koinzidenzen von drei, teilweise vier, in einer geraden Linie angeordneten Zählrohren. Um den Anschluß an andere Messungen zu erhalten, und um weiterhin von besonderen örtlichen Einflüssen unabhängig zu sein, wurde zunächst erneut die Absorption in Pb (bis 165 cm Schichtdicke und zwar zwischen den Zählrohren) und zum Vergleich die Absorption in Al bestimmt; dabei ergab sich in erster Annäherung Massenproportionalität, wie nach bereits vorliegenden Messungen zu erwarten war. Weiter wurde geprüft, ob die Koinzidenzen von durchgehend ionisierenden Bahnen verursacht sind und gleichfalls in Übereinstimmung mit anderen Autoren festgestellt, daß dies praktisch ausschließlich der Fall ist. Ferner wurde mit einer Anordnung, wie sie zuerst Maass<sup>2)</sup> angewandt hat, die Sekundärstrahlung aus Pb-Schichten genauer untersucht, die zwischen bzw. über den Zählrohren angebracht waren<sup>3)</sup>. Schließlich wurde durch Neigung der Anordnung gegen die Vertikale (Änderung des Zenitwinkels  $\vartheta$ ) die Absorption bei zunehmender Luftschicht für verschieden stark gefilterte Strahlung gemessen. Die meisten dieser Arbeiten konnten leider nicht entsprechend dem ursprünglichen Programm durchgeführt, sondern mußten vorzeitig abgebrochen oder mit eingeschränkter Zielsetzung zu Ende geführt werden. Über einige experimentelle Einzelheiten und

<sup>1)</sup> H. Kulenkampff, Verh. d. D. Phys. Ges. **19**, 92, 1938. (Vortrag auf der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Breslau, 11./12. VI. 1938.) — <sup>2)</sup> H. Maass, Ann. d. Phys. **27**, 507, 1936. — <sup>3)</sup> Eine von S. Leisegang (ZS. f. Phys. **116**, 515, 1940) ausgeführte Untersuchung, bei der diese Anordnung durch eine Nebelkammer ergänzt war, ist bereits veröffentlicht worden. Die dortigen Schlußfolgerungen müssen, wie ich in späteren Besprechungen mit Herrn Leisegang festgestellt habe, in einigen Punkten korrigiert werden. Hierüber wird gesondert berichtet werden.

Ergebnisse, soweit sie von allgemeinem Interesse zu sein scheinen, soll demnächst gesondert berichtet werden.

Bei der Durcharbeitung des vorliegenden Beobachtungsmaterials habe ich mich veranlaßt gesehen, erneut zu prüfen, welche Folgerungen aus den experimentellen Ergebnissen mit Zuverlässigkeit gezogen werden können. Die Überlegungen, die ich dabei angestellt habe, sind im Grunde nicht neuartig, aber ich habe doch den Eindruck gewonnen, daß mitunter Unklarheiten bestehen und halte es deshalb für nicht überflüssig, wenn ich sie hier mitteile und dabei einige bisherige Darstellungen einer mir nützlich erscheinenden Kritik unterziehe.

### *1. Allgemeines über Absorption und Zerfall der Mesotronen.*

*1. Gegenseitige Beeinflussung von Absorption und Zerfall.* a) Der Abfall der Intensität (gemessen stets durch die Teilchenzahl) erfolgt allgemein für die Mesotronen durch Absorption und durch spontanen Zerfall. Unter *Absorption* soll dabei nur die allmählich erfolgende Energieabnahme infolge von Ionisationsprozessen verstanden werden, wobei zu beachten ist, daß sie zu einer Intensitätsabnahme (d. h. einer Verringerung der Teilchenzahl) nur dann führt, wenn die Energie auf Null abnimmt. Sie hängt von der durchsetzten Materiemenge ab, die zweckmäßig nach einer zuerst von Ehmert<sup>1)</sup> angegebenen Darstellung vom Scheitel der Atmosphäre ab gemessen und in g/cm<sup>2</sup> bzw. in cm H<sub>2</sub>O gerechnet wird; nach dem Vorbild von Euler und Heisenberg<sup>2)</sup> soll sie im folgenden mit  $T$  bezeichnet werden.

Der *Zerfall* hängt dagegen von der Weglänge  $L$  ab; bezeichnet man die Zerfallswahrscheinlichkeit/cm mit  $w$ , so ergibt sie sich auf die in den Einheiten  $T$  gemessene Schichtdicke bezogen zu

$$w_T = w \cdot \frac{dL}{dT}. \quad (1)$$

Wegen der Zeitdilatation sind bekanntlich  $w$  bzw.  $\tau$  von der Energie abhängig, so daß anzusetzen ist

$$w = w_0 \cdot \frac{Mc^2}{pc}, \quad \tau = \frac{1}{w \cdot c} \quad (2)$$

( $M$  = Ruhmasse,  $p$  = Impuls des Mesotrons).  $M$  soll hier zu  $M = 160 m_e$  ( $m_e$  = Elektronenmasse) angenommen werden, also  $Mc^2 = 8 \cdot 10^7$  e-Volt.

Der Zerfall spielt nur in dünner Materie (Luft) eine Rolle; in dichter (Wasser oder schwerere Substanzen) kann er vernachlässigt werden.

<sup>1)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. 106, 751, 1936. — <sup>2)</sup> H. Euler u. W. Heisenberg, *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* 17, 1, 1938.

b) Man kann natürlich, unabhängig von jeder speziellen Form des Schwächungsgesetzes, formal einen (im allgemeinen nicht konstanten) Schwächungskoeffizienten  $\alpha$  definieren und ansetzen

$$\begin{array}{ll} \text{für Luft:} & \alpha = \mu_L + w_T, \\ \text{für Wasser:} & \alpha' = \mu_W, \end{array} \quad (3a)$$

wobei  $\mu_L$  bzw.  $\mu_W$  die Absorptionskoeffizienten in Luft bzw. in Wasser bedeuten sollen. Hierfür wird nun vielfach unter der Annahme eines exponentiellen Intensitätsverlaufs integral gesetzt

$$\begin{array}{ll} \text{für Luft:} & J/J_0 = e^{-(\mu_L + w_T) \cdot x}, \\ \text{für Wasser:} & J/J_0 = e^{-\mu_W \cdot x}. \end{array} \quad (3b)$$

Dabei wird aber übersehen, daß  $\mu$  und  $w_T$  für die Gesamtintensität nicht einfach additiv zu behandeln sind, da sie sich gegenseitig beeinflussen. Die Darstellung (3a) ist zwar formal immer möglich, wenn man beachtet, daß  $\mu_L$  nicht mit einem anders gemessenen  $\alpha' = \mu_W$  gleichgesetzt werden darf. Die integrale Darstellung (3b) ist aber auch bei exponentiellem Intensitätsverlauf im allgemeinen unzulässig. Sie wäre nur richtig, wenn  $\mu$  und  $w$  in gleicher Art von der Energie  $p \cdot c$  abhängen würden, wenn z. B. beide im einfachsten Fall konstant wären.

c) Bei der Darstellung (3a) bzw. (3b) läßt man sich wohl meist von einer Überlegung etwa folgender Art leiten: Die Strahlung durchsetze zunächst  $a$  cm Wasser, die eine Intensität  $J'$  durchlassen, anschließend  $b$  cm Vakuum, wobei durch Zerfall der Mesotronen die Intensität auf  $J$  geschwächt wird. Eine gleichmäßige Verteilung der Materie auf die gesamte Schichtdicke  $a + b$  mit geringerer Dichte soll dann die gleiche Gesamtschwächung geben. Wenn nun aber  $\mu$  und  $w$  in verschiedener Weise von der Energie abhängig sind, ändert sich beim Durchgang durch  $a$  und  $b$  die Verteilung im Energiespektrum, und zwar gleichfalls verschiedenartig. Man kann sich leicht überlegen, daß dann die Reihenfolge  $a, b$  nicht vertauschbar ist, d. h. daß auch keine Mischbarkeit besteht. Damit wird der Ansatz (3b) hinfällig.

Bei Berechnung von  $w$  aus experimentellen Daten nimmt man meist zur Vereinfachung einen konstanten Mittelwert  $\bar{w}$  an. Der Absorptionskoeffizient  $\mu$  andererseits kann als konstant angesetzt werden, wenn die Verteilung im Energiespektrum einer  $e$ -Funktion entspricht. Dies ist zufällig in einem ziemlich großen Bereich von etwa  $(1 - 10) \cdot 10^9$  e-Volt mit guter Annäherung der Fall (vgl. Fig. 1 auf S. 586). Daran liegt es, daß Berechnungen, die von nicht korrekten Ansätzen ausgehen, zu einigermaßen brauchbaren Ergebnissen führen, und daß diese auch untereinander ziemlich

gut übereinstimmen, wenn man mehr äußerliche Unterschiede bei verschiedenen Berechnungen ausgleicht.

2. *Darstellung des Intensitätsverlaufs.* a) Um festzustellen, wieweit solche Ergebnisse quantitativ zuverlässig sind, ist es nun aber gerade nötig, die allgemeinen Voraussetzungen näher zu prüfen. Zu diesem Zweck soll im nächsten Abschnitt der Intensitätsverlauf<sup>1)</sup> betrachtet werden, ausgehend vom Meeresniveau ( $T = T_0 = 1033 \text{ g/cm}^2$ ) und zwar

1. bei zunehmender Luftschicht. Derartige Messungen können durch Neigung einer Koinzidenzanordnung ausgeführt werden.

2. Bei abnehmender Luftschicht, d. h. bei Änderung der Höhe über der Erdoberfläche.

3. Bei Wasserversenkmessungen.

In den beiden Fällen 1 und 2 ist der Zusammenhang zwischen der Schichtdicke  $T$  und dem Weg  $L$ , den die Mesotronen von ihrem Entstehungsort ab zurücklegen, ein *verschiedener*. Im ersten Fall ändern sich nämlich mit dem Neigungswinkel einfach alle Entfernungen bei *gleichbleibender Schichtung*, im zweiten Fall *ändert sich die Schichtung*. Bezeichnet man mit  $p_0$  bzw.  $p_E$  den Druck am Erdboden bzw. in der (wahren) Entstehungshöhe  $h_E$  der Mesotronen, so gilt

für Fall 1 (Neigungsmessungen):

$$\frac{dL}{dT} = \frac{1}{\varrho_0} \frac{p_0}{p_0 - p_E} \cdot \lg \frac{p_0}{p_E} \quad (4a)$$

für Fall 2 (Höhenänderung):

$$\frac{dL}{dT} = \frac{1}{\varrho_0} \frac{T_0}{T} \quad (4b)$$

( $\varrho_0$  = Luftdichte am Erdboden).

b) Den Charakter des Intensitätsverlaufs kann man am besten übersehen, wenn man nach dem Vorbild von Ehmert<sup>2)</sup> nicht ein Exponentialgesetz, sondern ein Potenzgesetz der einfachen Form

$$J = \text{const} \cdot T^{-\gamma} \quad (5)$$

ansetzt. Ein konstanter Wert für den Exponenten  $\gamma$  bedeutet, daß der durch (3a) formal definierte Schwächungskoeffizient  $\alpha$  prop.  $1/T$  ist. Als Grundlage dafür, ob im Einzelfall ein konstanter Wert für  $\gamma$  erwartet werden kann oder nicht, muß weiterhin das Energiespektrum der Mesotronen dienen.

<sup>1)</sup> Genauere theoretische Betrachtungen hierzu hat im letzten Jahre D. Lyons (Phys. ZS. 42, 166, 1941) angestellt; hier soll ein mehr qualitativer Überblick gegeben werden. — <sup>2)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. 106, 751, 1936.

Es ist für Meeresniveau ( $T = 1033 \text{ g/cm}^2$ ) durch die Messungen von Blackett <sup>1)</sup> bekannt und in Fig. 1 dargestellt; die Genauigkeit reicht, auch bei kleinen Energien, wo sie nur sehr gering ist, aus, weil es für die vorliegenden Betrachtungen nur auf den allgemeinen Charakter ankommt.

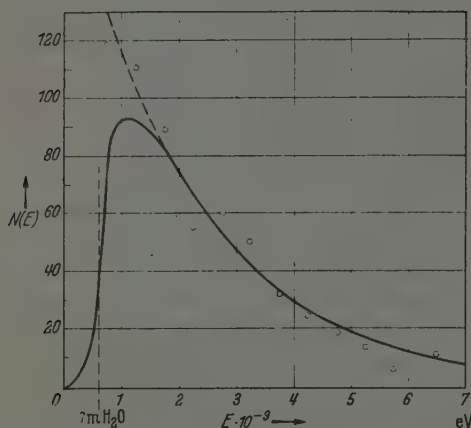


Fig. 1. Allgemeine Gestalt des Energiespektrums der Mesotrone. Meßpunkte (o) nach Blackett; Kurve: Exponentialfunktion  $N(E) = e^{-\beta E}$ , mit  $\beta = 0,46 \cdot 10^{-9} \text{ eV}^{-1}$ . — Der Verlauf bei kleinen Energien weicht hiervon ab und ist nur qualitativ gezeichnet.

Als Kurve ist eingezeichnet die Funktion

$$N(E) = e^{-\beta E}$$

mit

$$\beta = 0,46 \cdot 10^{-9} \text{ e-Volt}^{-1},$$

die sich in einem großen Teil ihres Verlaufs wenig von der gemessenen unterscheidet, wie oben schon vermerkt wurde. Eine theoretische Darstellung, die für den Intensitätsabfall zum Potenzgesetz (5) führt, findet sich bei Euler und Heisenberg <sup>2)</sup>.

Wegen des bevorzugten Zerfalls der langsamen Mesotrone (und der am

Ende der Reichweite stärkeren Abbremsung) muß das Spektrum natürlich für  $E = 0$  gegen  $N(E) = 0$  gehen; unmittelbare Messungen sind in diesem Bereich nicht auszuführen, weil hier die Mesotrone schwer von Elektronen zu trennen sind.

Das Energiespektrum nach Fig. 1 soll im folgenden zugrunde gelegt werden.

## II. Intensitätsverlauf in Luft und Wasser.

1. Intensitätsabnahme bei zunehmender Luftschicht (Neigungsmessungen). Für den Fall zunehmender Luftschicht hat zuerst Ehmert <sup>3)</sup> festgestellt, daß seine Messungen durch das einfache Potenzgesetz (5) gut wiedergegeben werden können, mit einem konstanten Exponenten  $\gamma_N =$  etwa 1,9. Unsere eingangs erwähnten, von H. Martin ausgeführten Messungen haben dies bestätigt und ergaben im Mittel  $\gamma_N = 2,0$ . Sie

<sup>1)</sup> P. M. S. Blackett, Proc. Roy. Soc. London (A) **159**, 1, 1937. —

<sup>2)</sup> H. Euler u. W. Heisenberg, *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* **17**, 1, 1938. —

<sup>3)</sup> A. Ehmert, *ZS. f. Phys.* **106**, 751, 1936.







vorliegenden Beobachtungen berechnet hat; letztere zeigen gleichfalls eine kleine Abweichung von der Linearität, die aber unsicher ist.

Als Mittelwert soll weiterhin  $\gamma_N = 2,1 \pm 0,2$  angenommen werden. Mit diesem Wert ist in der folgenden Fig. 3 die Kurve für  $J_N$  gezeichnet. Wie sich hierbei die Abnahme von  $\alpha$  auf die Anteile  $\mu$  und  $w$  verteilt, braucht nicht näher erörtert zu werden.

2. *Intensitätsverlauf in der Atmosphäre.* Messungen mit Pilotballonaufstiegen, die den Intensitätsverlauf der Mesotronenkomponente allein bis in große Höhen der Atmosphäre ergeben, sind vor einigen Jahren von Schein, Jesse und Wollan<sup>1)</sup> sowie von Ehmert<sup>2)</sup> ausgeführt worden. Ehmert glaubt, in dem Druckbereich von 760 Torr bis etwa 300 Torr, in dem die Meßpunkte allerdings beträchtlich streuen, den Verlauf ebenfalls durch ein Potenzgesetz nach (5) mit etwa dem gleichen Exponenten  $\gamma_L = 1,9$  darstellen zu können; es läßt sich aber zeigen, daß dies nicht zutreffend sein kann.

Es ist nämlich nach Definition

$$\gamma = (\alpha + w_T) \cdot T, \quad \text{mit } w_T = w \cdot \frac{dL}{dT}. \quad (6)$$

Nach den allgemeinen Vorstellungen, die auch durch die erwähnten Messungen von Ehmert bestätigt werden, ist die wahre Entstehungshöhe  $h_E$  der Mesotronen = etwa 18 km, d. h. es ist in der Gleichung (4a)

$\frac{p_0}{p_0 - p_E} \lg \frac{p_0}{p_E} > 1$ . Da der reine Absorptionskoeffizient sich bei dem Übergang von Neigungsmessungen zu Aufstiegen in der Atmosphäre nicht sprunghaft ändern kann, folgt daraus, daß die Anfangsneigung ( $T = T_0$ ,  $p = p_0$ )

$$\gamma_L^0 < \gamma_N$$

sein muß.

Aus der allgemein festgestellten Abnahme des Absorptionskoeffizienten  $\mu$  in größeren Wassertiefen kann man weiter ohne spezielle Annahmen schließen, daß er mit der Erhebung über den Erdboden zunimmt. Wegen (1) gilt dies sicher in stärkerem Maße für die auf die Einheit der Schichtdicke  $T$  bezogene Zerfallswahrscheinlichkeit  $w_T$ . In der doppelt-logarithmischen Darstellung nach Ehmert ist also für die Intensitätsänderung in der Atmosphäre kein linearer Anstieg zu erwarten, sondern ein Verlauf mit zunehmender Steilheit, wie er als Kurve  $J_L$  in Fig. 3 eingetragen ist. Diese Anfangskrümmung scheint mir mit den Messungen von Ehmert durchaus

<sup>1)</sup> M. Schein, W. P. Jesse u. E. O. Wollan, Phys. Rev. 56, 613, 1939.

<sup>2)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. 115, 326, 1940.

verträglich zu sein und in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Schein, Jesse und Wollan zu stehen. Die Berechnung des Intensitätsverlaufs von Lyons<sup>1)</sup> zeigt sie allerdings nicht, jedoch liegt dies nur daran, daß Lyons speziell die Bildung der Mesotronen in Luft berücksichtigt, ohne auf den hier betrachteten Teil der Kurve Wert zu legen.

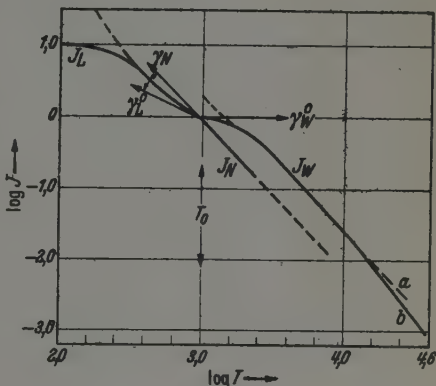
Fig. 3. Allgemeine Übersicht über den Intensitätsverlauf in Luft und Wasser; doppelt-logarithmische Darstellung.

Kurve  $J_L$ : Verlauf bei abnehmender Luftschicht = Aufstieg in der Atmosphäre;

Kurve  $J_N$ : Verlauf bei zunehmender Luftschicht (Neigungsmessungen, vgl. Fig. 2);

Kurve  $J_W$ : Verlauf in Wasser, a) nach A. Ehmert, b) nach V. C. Wilson.

Als Ausgangspunkt ist für  $T = T_0$  = rund 1000 g/cm<sup>2</sup>  $J_0 = 1,00$  angesetzt. Die Pfeile geben die Anfangsneigungen der Kurven an.



In größeren Höhen ( $p < \text{etwa } 300 \text{ Torr}$ ) ist natürlich ein Umbiegen in einen flacheren Verlauf zu erwarten, der in Fig. 3 qualitativ eingezeichnet ist.

Für die späteren Betrachtungen ist aber gerade die Anfangsneigung der Kurve  $J_L$  von Interesse, für die aus bisher vorliegenden Beobachtungen kein sehr genauer Wert abzuleiten ist. In Fig. 3 ist  $\gamma_L^0 = 1,0$  angenommen worden, gemäß den Betrachtungen in Abschnitt III, 2b.

3. Intensitätsverlauf in Wasser. Auch für diesen Fall soll nicht, wie dies Lyons<sup>1)</sup> getan hat, eine exakte theoretische Berechnung des Intensitätsverlaufs versucht werden, denn es genügt, den allgemeinen Charakter zu betrachten. Das wesentliche Merkmal ist, daß er sich beim Übergang von Luft zu Wasser sprunghaft ändert, weil nunmehr der Zerfall der Mesotronen keine Rolle mehr spielt. Die Schwächung der Strahlung erfolgt also allein durch Geschwindigkeitsabnahme, wobei wie bisher weiterhin von etwaigen besonderen Kernprozessen abgesehen werden soll.

Angaben über den Intensitätsverlauf im Übergangsgebiet Luft—Wasser, die für die vorliegenden Betrachtungen brauchbar sind, lassen sich nicht aus direkten Messungen entnehmen, sondern müssen aus dem Energiespektrum (Fig. 1) abgeleitet werden, was auch mit ausreichender Sicherheit

<sup>1)</sup> D. Lyons, Phys. ZS. 42, 166, 1941.

möglich ist: man erhält den absorbierten Bruchteil einfach in der Weise, daß man das Energiespektrum von links her schrittweise abschneidet, um Beträge, die dem Energieverlust in der betreffenden Schichtdicke entsprechen. Die gestrichelt eingezeichnete Linie in Fig. 1 soll dies z. B. für 3 m Wasser ( $T = 1300$ ) andeuten.

Man sieht hieraus, daß im Grenzfall  $T = T_0$  der Absorptionskoeffizient (für die harte Komponente allein!)  $\mu_W^0 = 0$  und auch  $\gamma_W^0 = 0$  sein muß! Mit zunehmender Wassertiefe wächst  $\mu_W$  an, erreicht ein Maximum und nimmt alsdann wieder ab, in großen Tiefen nach verschiedenen Messungen etwa prop.  $T^{-1}$ . In welcher Tiefe dabei  $\mu_W$  den Maximalwert erreicht, kann man leicht abschätzen: sie ist ungefähr gleich derjenigen Schichtdicke, die einen Energieverlust vom Betrage  $E_{max}$  bewirkt ( $E_{max}$  = häufigste Energie im Spektrum nach Fig. 1). Nimmt man  $E_{max} = 1,2 \cdot 10^9$  e-Volt und den Energieverlust in Wasser zu  $2 \cdot 10^6$  e-Volt/cm an, so erhält man für diese Tiefe etwa 6 m, d. h.  $T = 1600$ .

In der Darstellung nach Formel (5) bzw. in Fig. 3 ergibt sich für  $\gamma_W$  eine Zunahme, vom Wert  $\gamma_W^0 = 0$  beginnend, denn die Kurve  $J_W$  muß für  $T = T_0$  mit *horizontaler Tangente* einmünden, weil der Anfangsanstieg im Energiespektrum nicht linear, sondern etwa quadratisch erfolgt. Da die vorstehenden allgemeinen Überlegungen aber nicht mehr als den qualitativen Verlauf von  $\mu_W$  ergeben, kann nur empirisch festgestellt werden, ob  $\gamma_W$  im weiteren Verlauf einen konstanten Grenzwert erreicht. Nach Ehmert ist dies ab etwa  $T = 5500$  (45 m Wassertiefe) der Fall mit  $\gamma_W =$  etwa 1,9. Nach den weiter ausgedehnten Messungen von Wilson<sup>1)</sup> unter großen Gesteinsschichten nimmt jedoch  $\gamma_W$  weiter zu, bei  $T > 25 \cdot 10^3$  bis auf etwa 2,5; dies würde nach den theoretischen Betrachtungen von Euler und Heisenberg<sup>2)</sup> und Lyons<sup>3)</sup> auf andere, an der Absorption mitbeteiligte Prozesse hindeuten.

Experimentell findet man in den ersten Metern Wasser (und ebenso natürlich in anderen Materialien größerer Dichte) eine stärkere Schwächung der Strahlung als sie die Kurve  $J_W$  in Fig. 3 angibt und stets einen von Null verschiedenen Absorptionskoeffizienten. Der Grund dafür ist der, daß die Anzahl der begleitenden (Zerfalls-) Elektronen auf etwa ein Drittel des Wertes in Luft zurückgeht. Der Kurvenverlauf, wie er bei tatsächlichen Messungen erwartet werden kann, ist qualitativ punktiert zu der Kurve  $J_W$ .

<sup>1)</sup> V. C. Wilson, Phys. Rev. **53**, 337, 1938. — <sup>2)</sup> H. Euler u. W. Heisenberg, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **17**, 1, 1938. — <sup>3)</sup> D. Lyons, Phys. ZS. **42**, 166, 1941.

in Fig. 3 eingezeichnet; er kann in dieser Darstellung zufällig über einen gewissen Bereich ungefähr linear sein, mit einer geringeren Neigung, als sie in größeren Wassertiefen gefunden wird.

### III. Ansätze zur Berechnung der Zerfallskonstanten.

1. *Bisherige Verfahren.* Die vbrangehenden Betrachtungen zeigen, daß die Zerfallskonstante *grundsätzlich nicht* aus dem Vergleich des Intensitätsverlaufs in Luft mit dem in Wasser (oder anderen dichten Materialien) bestimmt werden kann, und zwar bei allen speziellen Auswertungs- oder Berechnungsverfahren. Ich möchte das noch näher an Hand einiger Beispiele erläutern:

a) Die meisten Verfahren setzen eine Annahme über die mittlere Entstehungshöhe  $h_E$  der Mesotronen voraus, und zwar ist es üblich, sie konzentriert an einen Ort mit  $p_E = 0,1 p_0$  zu verlegen. Lyons<sup>1)</sup> hat kürzlich gezeigt, daß eine derartige Konzentration eine gute Näherung gegenüber den tatsächlichen Verhältnissen, d. h. der Bildung in der ganzen Atmosphäre, ist.

Unsere eigenen Messungen haben wir zunächst so ausgewertet, daß wir die Intensitätsänderung mit dem Zenitwinkel  $\vartheta$  verglichen haben mit der Absorption in dichter Materie. Dabei haben wir die bis 165 cm durchgemessene Absorptionskurve in Pb benutzt, die, wie auf S. 582 erwähnt, mit guter Näherung massenproportional auf leichtere Substanzen umgerechnet werden kann. Demgemäß sind in Fig. 4 der mit Neigung der Koinzidenzapparatur bei 0 und 23 cm Pb-Zwischenfilter gemessene Intensitätsverlauf und die Absorptionskurve in Pb, beide umgerechnet auf eine gemeinsame Abszisse in  $g/cm^2$ , zusammengestellt. Qualitativ zeigt sich so sehr augenfällig der Unterschied als ein deutlicher Ausdruck des Zerfalls der Mesotronen in der Atmosphäre.

Nach dem einfachen Ansatz der Gleichung (3b) hatten wir sodann die reine Absorption ( $\mu$ ) in beiden Fällen als gleich angenommen; es ergab sich dann damit unmittelbar

$$\frac{J_L}{J_{Pb}} = e^{-L \cdot \mu}.$$

Wir hatten dies Verhältnis für mehrere Stellen der Kurven aus Fig. 4 bestimmt und damit eine Reihe von Werten für  $\mu$  erhalten, die, wie wir auch erwartet hatten, mit wachsender Schichtdicke abnahmen. Bei Berücksichtigung

<sup>1)</sup> D. Lyons, Phys. ZS. 42, 166, 1941.

sichtigung der jeweils noch zur Messung gelangenden mittleren Energien ergaben sich aber schließlich gut konstante Werte und zwar im Mittel

$$w_0 = 1,05 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1} \text{ bzw. } \tau_0 = 3,2 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Es ist nach dem Vorstehenden einleuchtend, daß dieses einfache Auswertungsverfahren fehlerhaft ist; trotzdem wird man aber die festgestellte Abhängigkeit von der mittleren Energie als eine Stütze der Gleichung (1) betrachten dürfen.

b) Unabhängig von einer Annahme über die Entstehungshöhe  $h_E$  ist eine von Ehmert angegebene Berechnung sowie Bestimmungen aus dem Luftdruckeffekt.

Ehmert<sup>1)</sup> geht aus von der von ihm gemessenen Intensitätszunahme der harten Komponente mit der Höhe in der Atmosphäre und setzt, wie

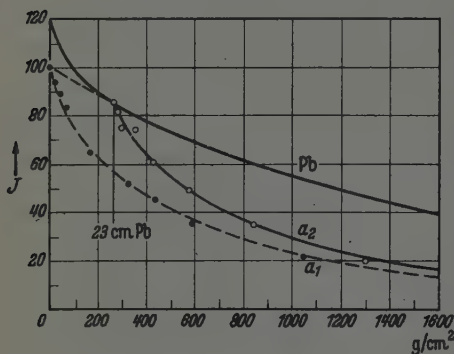


Fig. 4. Vergleich des Intensitätsabfalls in Pb und Luft, bezogen auf massen-äquivalente Schichten; der Intensitätsabfall in Luft ist gemessen durch Neigung einer Koinzidenzapparatur (Fig. 2).

Pb = Intensitätsabfall in Pb nach verschiedenen Messungen; die Kurve ist gut darstellbar durch  $J = J_0 e^{-\alpha x}$  mit  $\alpha = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2/\text{g}^*$ . Sie ist so gezeichnet, daß die gestrichelte Verlängerung zum Wert  $J = 100$  führt (der Anfangsteil der gemessenen Kurve wird durch die Elektronenkomponente beeinflusst).  $a_1$  bzw.  $a_2$  = Intensitätsabfall in Luft bei Messung ohne bzw. mit 23 cm Pb-Filter zwischen den Zählrohren; Anfangspunkte bezogen auf die für die harte Komponente gültigen Werte der Pb-Kurve.

oben schon angegeben wurde, hierfür  $J = \text{const} \cdot T^{-\gamma_L}$  mit einem konstanten Wert  $\gamma_L = 1,89$ . Er vergleicht damit die Schwächung in Wasser, die er durch zwei Kurvenstücke mit dem gleichen Potenzgesetz darstellt, wobei er für den Anfang einen konstanten Wert  $\gamma_W = 1,56$  annimmt. Die Zerfallskonstante ergibt sich dann aus der Differenz  $\gamma_L - \gamma_W$ . Beide Zahlenwerte erscheinen mir recht willkürlich; würde man z. B. den oben angegebenen Wert für die Anfangsneigung der Kurve in Luft  $J_L$  mit  $\gamma_L^0 = 1,0$  zugrunde legen, so würde die Differenz sogar negativ. Ich glaube auch nicht, daß man einen Zahlenwert für  $\gamma_W$  angeben kann, der in Verbindung mit  $\gamma_L$  zu einer weiteren Berechnung benutzt werden könnte.

<sup>1)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. 115, 333, 1940. — \*) Vgl. A. Sittkus, ebenda 108, 421 1938.



Grundsätzlich kann man einen zuverlässigen Wert für den Anfangsanstieg der Intensität in der Atmosphäre ( $\gamma_L^0$ ) und damit für den maßgebenden Schwächungskoeffizienten  $\alpha = \mu_L + w_T$  aus dem Luftdruckeffekt erhalten. Man pflegt aber hieraus die Zerfallskonstante durch Kombination mit dem Absorptionskoeffizienten in einem Material (z. B. Wasser) zu berechnen, in dem der Zerfall keine Rolle spielt. Es bedarf keiner weiteren Begründung, daß gegen ein solches Verfahren die gleichen Einwände zu erheben sind.

2. *Berechnung von  $w$  und  $\tau$  aus dem Intensitätsanstieg in Luft in Verbindung mit Neigungsmessungen.* Ich glaube, daß Bestimmungen aus der Anfangsneigung der Kurven  $J_L$  und  $J_N$ , also einem Vergleich der Werte  $\gamma_L^0$  und  $\gamma_N$ , diesen Einwänden nicht ausgesetzt sind. Man denke sich nämlich, von einiger Höhe über dem Erdboden ausgehend, zunächst Messungen mit Änderung der Höhe des Beobachtungsortes ausgeführt, sodann von  $T = T_0$  ab mit weiter zunehmender Luftschicht durch Neigung einer Koinzidenzanordnung. Die Messung erfolgt dabei stets im gleichen Medium geringer Dichte (Luft), so daß der Absorptionskoeffizient  $\alpha$  sich an der Übergangsstelle  $T = T_0$  nicht ändert. Nach der Gleichung (6) in Verbindung mit den Gleichungen (1), (4a) und (4b) ist

$$\left. \begin{aligned} \gamma_L^0 &= T_0 \left( \alpha + \frac{1}{\varrho_0} w \right), \\ \gamma_N &= T_0 \left( \alpha + \frac{1}{\varrho_0} w \cdot \frac{p_0}{p_0 - p_E} \lg \frac{p_0}{p_E} \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

also

$$w = (\gamma_N - \gamma_L^0) \frac{1}{T_0} \cdot \varrho_0 \cdot \frac{1}{\left( \frac{p_0}{p_0 - p_E} \cdot \lg \frac{p_0}{p_E} \right) - 1}. \quad (8)$$

Die in diese Gleichung (8) eingehenden Größen müssen im folgenden noch besprochen werden:

a)  $\gamma_N$  ist aus den Neigungsmessungen hinreichend gut bekannt, und zwar ist, wie oben (S. 588) angegeben

$$\gamma_N = 2,1 \pm 0,2.$$

b) Weit weniger genau bekannt ist bisher  $\gamma_L^0$ . Schein, Jesse und Wollan geben ihre Messungen<sup>1)</sup> durch eine Kurve mit  $\gamma_L^0 = 0,7$  wieder, gegenüber dem von Ehmert<sup>2)</sup> benutzten Wert 1,89. Die beträchtliche Diskrepanz zeigt, daß beide Messungen im fraglichen Gebiet sehr ungenau

<sup>1)</sup> M. Schein, W. P. Jesse u. E. O. Wollan, Phys. Rev. 56, 613, 1939.

— <sup>2)</sup> A. Ehmert, ZS. f. Phys. 115, 326, 1940.



sind und daß überhaupt Registrierungen mittels Ballonaufstiegen für die Bestimmung der Anfangsneigung ungeeignet sind.

Wesentlich besser ist die Ermittlung aus dem *Luftdruckeffekt*, der mehrfach untersucht worden ist. Allerdings sind die Ergebnisse für die harte Komponente allein bisher leider auch noch ungenau. Nach den eingehenden Messungen von Kolhörster und Matthes<sup>1)</sup> beträgt er  $\frac{1}{J} \frac{dJ}{dp} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ Torr}^{-1}$ , woraus man  $\gamma_L^0 = 1,2$  erhält. Diese Messungen sind so ausgeführt worden, daß die Luftdruckänderungen durch Holzfilter entsprechender Dicke über der Meßanordnung kompensiert wurden; es verbleibt eine Intensitätsänderung mit dem Luftdruck, die auf den Zerfall der Mesotronen allein zurückgeführt wird. Man darf aber nicht übersehen, daß sich eine richtige Kompensation nicht erreichen läßt: bei zunehmender Luftschicht ändert das Energiespektrum seine Gestalt nicht sehr wesentlich und der Anteil an begleitenden Elektronen bleibt deshalb ungefähr der gleiche. Durch ein Holzfilter, dessen Dicke durchschnittlich etwa 50 cm Wasser äquivalent ist, wird gemäß den obigen Betrachtungen das Energiespektrum von links her abgeschnitten. Die Absorption der Mesotronen allein ist dabei gering, jedoch werden die begleitenden Elektronen aus der Luft praktisch vollständig absorbiert und dafür nur eine geringe Zahl (etwa  $\frac{1}{3}$ ) neu gebildet. Mir scheint deshalb, daß das Holzfilter in erster Linie nicht eine Kompensation der Luftdruckänderungen bewirkt, sondern eine einfache Absorption der weichen Strahlungsanteile. Außerdem wird das Ergebnis durch harte Sekundärstrahlung aus dem Holzfilter beeinflusst sein, denn wenn auch die Häufigkeit von Sekundärprozessen, bezogen auf gleiche Schichten in g/cm<sup>2</sup>, etwa die gleiche in verschiedenen Materialien ist, werden wegen der stark verschiedenen geometrischen Konfiguration im Falle des Holzfilters mehr als aus der Atmosphäre von ihnen mitgemessen, weil der Zerfall fortfällt. Dies bedeutet, daß der Luftdruckeffekt zu groß gemessen wird; die anzubringende Korrektur kann etwa 10 bis 20 % betragen, entsprechend dem Betrag der harten Sekundärstrahlung. Ich glaube deshalb, als einen besseren Näherungswert

$$\frac{1}{J} \frac{dJ}{dp} = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ Torr}^{-1} \text{ und } \gamma_L^0 = 1,0 \pm 0,2$$

annehmen zu können, der mit den verschiedenen vorliegenden Messungen auch sicher nicht in Widerspruch ist.

c) Weiter ist eine Annahme über die mittlere Entstehungshöhe der Mesotronen  $h_E$  erforderlich. Im allgemeinen wird  $p_E = 0,1 p_0$  zugrunde

<sup>1)</sup> W. Kolhörster u. I. Matthes, Phys. ZS. 40, 142. 1939.

gelegt, jedoch scheinen mir sowohl die Messungen von Schein, Jesse und Wollan und die von Ehmert wie auch die theoretischen Betrachtungen von Lyons über die Mesotronenerzeugung für eine etwas geringere Höhe zu sprechen. Es soll deshalb, mit größerer Fehlergrenze, angesetzt werden

$$p_E = (0,15 \pm 0,05) \cdot p_0, \text{ d.h. } h_E = \text{etwa } 15 \text{ km.}$$

Mit den unter a) bis c) angegebenen Werten erhält man aus (8)

$$w = (1,1 \pm 0,4) \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}, \text{ also } \tau = (3,0 \pm 1,0) \cdot 10^{-5} \text{ sec,}$$

entsprechend einem mittleren Laufweg der Mesotronen von etwa 9 km.

d) Zur Bestimmung von  $w_0$  und  $\tau_0$  ist schließlich die Kenntnis der mittleren Energie  $\bar{E}$  nötig, die angenähert aus dem Blackettschen Energiespektrum entnommen werden kann; hierbei ist, worauf schon Ehmert<sup>1)</sup> aufmerksam gemacht hat, durch eine Gewichtsfunktion der schnellere Zerfall der langsamen Mesotronen zu berücksichtigen. Die Unsicherheit über die Gestalt des Energiespektrums bei kleinen Energien spielt keine Rolle, wenn man nur Messungen verwertet, die mit genügender Filterung ausgeführt sind. Nimmt man die mittlere Energie zu

$$\bar{E} = (1,6 \pm 0,4) \cdot 10^9 \text{ e-Volt} = (20 \pm 5) \cdot Mc^2$$

an, so ergibt sich

$$w_0 = (2,2 \pm 1,0) \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1} \text{ und } \tau_0 = (1,5 \pm 0,7) \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Die Genauigkeit dieses Wertes hängt vor allem ab von der Größe  $\gamma_L^0$ ; von geringerer Bedeutung ist die Unsicherheit der Kenntnis über  $\gamma_N$ , die Entstehungshöhe und die mittlere Energie.

3. Vergleich mit anderen Bestimmungen von  $\tau_0$  a) Barnóthy und Forró<sup>2)</sup> haben mit Zählrohren und 20 cm Pb-Zwischenfilter, so daß nur die harte Komponente gemessen wurde, die Intensität bei Einfall unter 20° Zenitwinkel im Vergleich mit derjenigen bei senkrechtem Einfall und zusätzlichem Holzfilter bestimmt, dessen Dicke dem Unterschied der durchstrahlten Luftmassen entsprach. Das Verfahren ist analog dem von Kolhörster und Matthes bei der Bestimmung des Luftdruckeffektes angewendeten, jedoch ist hier durch das Pb-Zwischenfilter dafür gesorgt, daß das Ergebnis nicht wesentlich durch unterschiedliche Sekundärstrahlung beeinflusst sein kann. Barnóthy und Forró erhielten aus diesen Messungen den Wert

$$\tau_0 = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

<sup>1)</sup> A. Ehmert. ZS. f. Phys. 115, 333, 1940. — <sup>2)</sup> J. Barnóthy u. M. Forró. Phys. Rev. 60, 154, 1941.

b) Eine Methode, durch welche die Unsicherheit in der Angabe einer mittleren Energie vermieden wird, haben zuerst die Mitarbeiter von Auger, Ehrenfest und Fréon<sup>1)</sup> angewendet. Sie führten mit einer Koinzidenzanordnung Differenzmessungen aus in

3450 m Höhe mit 40 bzw. 100 cm Pb ( $J_1$ )

0 m Höhe mit 5 bzw. 65 cm Pb ( $J_2$ )

zwischen den Zählrohren. Dabei sind 35 cm Pb hinsichtlich der reinen Absorption äquivalent der Luftschicht von 3450 m gesetzt; die Differenzen  $J_1$

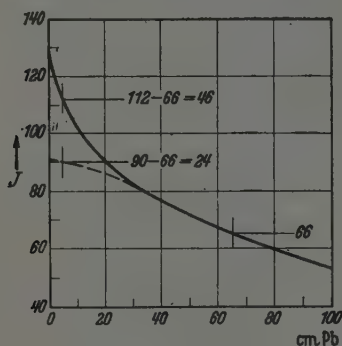


Fig. 5. Zur Deutung der Messungen von Ehrenfest und Fréon: Absorptionskurve in Pb, nach Fig. 4.

Ausgezogene Kurve: Gesamtintensität; gestrichelte Kurve: harte (Mesotronen-) Komponente allein.

Es wird die Differenz der Intensitäten bei 5 bzw. 65 cm Pb-Filter bestimmt. Der Kurvenverlauf und die Zahlenangaben in der Figur sind nur als Näherungen zu werten.

bzw.  $J_2$  ergeben die jeweiligen Intensitäten in einem beschränkten Energiebereich von etwa  $(10 \pm 5) \cdot 10^8$  e-Volt. Aus dem gemessenen Verhältnis  $J_1/J_2 = 1,8 \pm 0,5$  erhält man, umgerechnet auf den hier zugrunde gelegten Wert  $Mc^2 = 8 \cdot 10^7$  e-Volt,

$$\tau_0 = (3,2 \pm 1,6) \cdot 10^{-6} \text{ sec,}$$

der erheblich zu groß erscheint. Der Grund hierfür ist leicht zu sehen, wenn man die Absorptionskurve in Pb betrachtet, die in Fig. 5 dargestellt ist. Der anfängliche starke Intensitätsabfall, der örtlich und je nach der benutzten Meßanordnung etwas verschieden sein kann, rührt von der Absorption der Elektronenkomponente her; für die Mesotronen allein ist nach den Betrachtungen von Abschnitt II, 3 etwa der gestrichelt eingezeichnete Verlauf zu erwarten. Dieser ist zwar nicht exakt festzulegen, man sieht aber deutlich, daß der Meßpunkt mit 5 cm-Pb-Filter (wenn man nur nach der Intensitätsänderung der harten Komponente fragt) stark gefälscht ist, die anderen hingegen nicht. Dadurch kann das Verhältnis  $J_1/J_2$  um etwa einen Faktor 2 zu klein erscheinen, der Wert für  $\tau_0$  um etwa den gleichen Faktor zu groß.

<sup>1)</sup> P. Ehrenfest u. A. Fréon, Compt. Rend. 207, 853, 1938.

c) Messungen nach dem gleichen Prinzip haben Nielsen, Ryerson, Nordheim und Morgan<sup>1)</sup> sowie Neher und Stever<sup>2)</sup> ausgeführt. Erstere haben die Absorption in Pb in verschiedenen Höhen bestimmt und den Unterschied der Luftmasse durch einen Kohleblock in der größeren Höhe ausgeglichen; dies hat den Vorteil, daß sie stets im gleichen Gebiet der Pb-Absorptionskurve arbeiten. Sie erhielten so, gleichfalls umgerechnet auf  $Mc^2 = 8 \cdot 10^7$  e-Volt,

$$\tau_0 = (1,50 \pm 0,4) \cdot 10^{-6} \text{ sec.}$$

Neher und Stever führten Messungen in zwei Seen in 3921 m bzw. 305 m Höhe aus, und zwar in verschiedenen Wassertiefen zwischen 4,9 und 6,9 bzw. 1,3 und 3,3 m. Der von ihnen erhaltene Wert von  $\tau_0 = 2,8 \cdot 10^{-6}$  sec muß als unsicher betrachtet werden, weil die geringe Wassertiefe in dem tiefer gelegenen See noch in das Übergangsgebiet fällt.

4. Ein zuverlässiger Vergleich des hier neu berechneten Wertes für die Zerfallskonstante mit den angeführten, sowie sonstigen teilweise nicht korrekten Bestimmungen ist schwer durchführbar, insbesondere lassen sich die verschiedenen Fehlergrenzen kaum miteinander in Beziehung setzen. Im Endergebnis halte ich

$$\tau_0 = (1,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-6} \text{ sec}$$

mit der angegebenen Fehlergrenze für den sichersten Wert, der aus den zur Zeit vorliegenden Messungen ermittelt werden kann.

Jena. Physikalisches Institut der Universität, August 1942.

<sup>1)</sup> W. H. Nielsen, C. M. Ryerson, L. W. Nordheim u. K. Z. Morgan, Phys. Rev. 59, 547, 1941. — <sup>2)</sup> H. V. Neher u. H. G. Stever, Phys. Rev. 58, 766. 1940.

# Nochmals über Stromverteilung in Supraleitern \*).

Von M. v. Laue.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 12. Juli 1942.)

1. Stromverzweigungssatz und Meißner-Effekt. 2. Stromverteilung in einem teils normal-, teils supraleitenden System. 3. und 4. Durchrechnung solcher Verteilungen nach der Londonschen Elektrodynamik des Supraleiters. 5. Eine Verallgemeinerung des Verteilungssatzes.

1. Der Satz, daß sich bei Stromverzweigungen in Supraleitern das für die gegebene Gesamtstromstärke mögliche Minimum der magnetischen Energie einstellt, steht, wie ich kürzlich nachzuweisen suchte<sup>1)</sup>, mit der Tatsache der Stromverdrängung aus dem Innern solcher Leiter in Zusammenhang. Da mir eine befreundete Stelle Bedenken dagegen geäußert hat, darf ich vielleicht hier auf dieses Thema zurückkommen und danach einige anschließende Fragen der Stromverteilung diskutieren.

Vorausgeschickt sei, daß der Verteilungssatz nichts über die Gestalt der supraleitenden Stromzweige voraussetzt; diese sollten nach der bisherigen Annahme lediglich mit der gemeinsamen Zuleitung nicht magnetisch gekoppelt sein. Doch werden wir in Abschnitt 5 auch diese Bedingung noch etwas lockern. Sobald die Verteilung des Stromes über jede der Zweigleitungen gegeben ist (sie beschränkt sich natürlich auf dünne Oberflächenschichten), ist die magnetische Energie eine homogene quadratische Funktion der Teilstromstärken. Damit sind die Bedingungen für die Herleitung der Induktionsgleichungen aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung gegeben. Aus diesen Gesetzen aber folgt der Satz vom Minimum der Energie<sup>2)</sup>.

Nun liege in einem Hohlkörper beliebiger Gestalt (Fig. 1) ein anderer Körper beliebiger Gestalt so, daß er mit der Hülle an zwei Stellen leitend zusammenhängt, im übrigen aber durch leeren Raum von ihr getrennt ist. Das Ganze sei supraleitend. Erregen wir in dem inneren Körper einen stationären Strom  $i_2$ , so verteilt er sich in einer durch die Form der Höhlung gegebenen Art über diesen Körper und schließt sich längs der inneren Fläche der Hülle. In der Höhlung haben wir ein Magnetfeld, dessen Energie mit einem positiven, nur durch die Gestalt des Hohlraumes bedingten Faktor  $B$  zu  $\frac{1}{2} i_2^2$  proportional ist; nach außen hat es keine Fortsetzung.

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> M. v. Laue, ZS. f. Phys. 118, 455, 1941. — <sup>2)</sup> M. v. Laue, Phys. ZS 33, 793, 1932.

Einen solchen Strom kann man etwa so erregen, daß man durch eine längs der Kurve  $K$  verlaufende Bohrung einen Metalldraht isoliert zieht und, solange die Temperatur noch über dem Sprungpunkt liegt, durch ihn einen Strom der Stärke  $i_2'$  sendet. Kühlt man dann bis zur Supraleitung ab, so entsteht bei passender Wahl von  $i_2'$  im Hohlraum das dem Strome  $i_2$  entsprechende, oben erwähnte Magnetfeld. Über das Verhältnis von  $i_2'$  zu  $i_2$  läßt sich zur Zeit nichts Sicheres aussagen, da wir die Vorgänge bei der Entstehung der Supraleitung zu wenig kennen; es kommt darauf auch nicht an. Außer den schon erwähnten Strömen fließt dann ein Strom der Stärke  $i_2$  über die Innenfläche der Bohrung in entgegengesetztem Sinn, wie der Strom im Draht, und schließt sich längs der äußeren Fläche des äußeren Supraleiters. Schaltet man nun den Strom im Drahte ab, so verschwindet auch dieser Strom. Es bleibt aber das Feld im Hohlraum mit seiner Energie  $\frac{1}{2} B i_2^2$ .

Bei diesem Zustand ist zunächst die Stromstärke im äußeren Körper gleich  $-i_2$ ; das Minuszeichen deutet die dem Strom  $i_2$  entgegengesetzte Richtung an. Jetzt führen wir diesem Körper durch die Zuleitungen  $Z_+$  und  $Z_-$  den Strom  $i_1 + i_2$  zu. Dann ist die Stromstärke im äußeren Körper gleich  $i_1$ , während im inneren Supraleiter nach wie vor der Strom  $i_2$  fließt; beide haben sich unabhängig voneinander herstellen lassen. Die magnetische Energie außerhalb ist mit einem positiven Faktor  $A$  gleich  $\frac{1}{2} A (i_1 + i_2)^2$ ; denn sowohl in den Zuleitungen als auf der äußeren Fläche des äußeren Körpers fließt der Strom  $i_1 + i_2$ . Die gesamte magnetische Energie ist folglich

$$H = \frac{1}{2} A (i_1 + i_2)^2 + \frac{1}{2} B i_2^2, \quad (1)$$

woraus wir wie früher auf  $L_{12} = L_{11}$  schließen.

Gehen wir aber von einem schon supraleitenden, jedoch stromlosen Anfangszustande aus, ist also zunächst  $i_2 = 0$ , und führen wir dann den Strom  $I$  durch die Zuleitungen  $Z_+$  und  $Z_-$  zu, so bleibt nach jenem Verteilungssatze  $i_2 = 0$ . Das folgt erstens aus der früher abgeleiteten Formel

$$i_2 = I \frac{L_{11} - L_{12}}{L_{11} + L_{22} - 2 L_{12}},$$

zweitens aber aus (1), da doch  $H$  bei gegebenem  $(i_1 + i_2)$  sichtlich dann ein Minimum wird, wenn  $i_2 = 0$  wird.

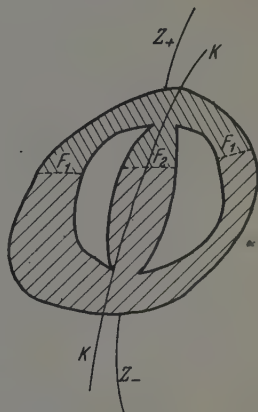


Fig. 1.



Auf diesem vielleicht anschaulicheren Wege finden wir also das frühere Ergebnis bestätigt.

2. Nun denken wir uns die beiden betrachteten Körper aus je einem supra- und einem normalleitenden Teil zusammengesetzt; ihre aus zwei unzusammenhängenden Stücken bestehende Trennfläche ist in der Fig. 1 mit  $F_1$  und  $F_2$  angegeben. Der Normalleiter liege oben.

Führen wir dann wieder einen Strom  $I$  durch die Zuleitungen  $Z$  zu,

so muß die Fläche  $F$  in allen ihren Teilen auf dem gleichen Potential sein, weil das Potential im Supraleiter konstant ist. Im Normalleiter ist somit die Strömung proportional zum Gradienten einer Funktion  $\varphi$ , welche durch die Laplacesche Differentialgleichung, die üblichen Randbedingungen an der Grenze gegen den Außenraum und an der Zuleitungsstelle  $Z_+$  sowie durch die Bedingung  $\varphi = \text{const}$  längs  $F$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt ist. Ein Teil  $i_1$  des Stromes muß durch  $F_1$ , der Rest  $i_2$  durch  $F_2$  vom Normal- in den Supraleiter übertreten. Das Verhältnis  $i_1 : i_2$  hängt nur von der Form des Normalleiters und der Lage der Zuleitung  $Z_+$  an ihm ab.

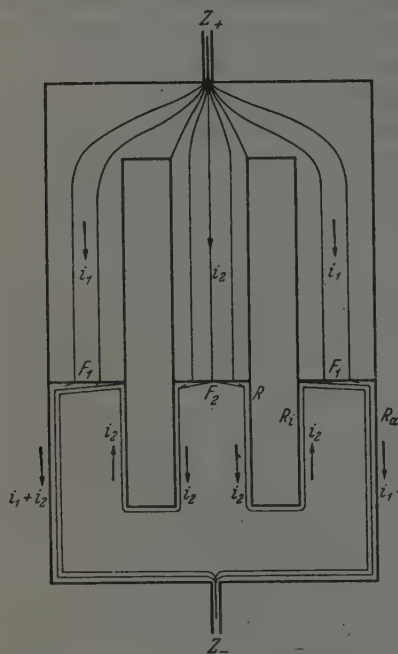


Fig. 2.

Der Strom  $i_2$ , der auf der ganzen Ausdehnung der Fläche  $F_2$  in den Supraleiter gelangt, zieht

sich nun auf Strecken von der Größenordnung der Eindringtiefe auf die Grenzschicht des inneren Leiters gegen den Hohlraum zusammen, tritt dann aus diesem unten in den äußeren Supraleiter, fließt auf dessen innerer Begrenzung nach oben bis zur Fläche  $F_1$ , geht längs dieser nach der Außenseite des äußeren Körpers und nimmt dabei den Strom  $i_1$  auf, dann fließt der Gesamtstrom längs dieser Begrenzung zur Ableitung  $Z_-$ . Im Hohlraum entsteht also jetzt ein Magnetfeld.

Quantitativ lassen sich diese Verhältnisse darstellen, falls der innere Körper ein Kreiszyylinder, der äußere ein ihm konzentrischer Hohlzylinder

mit zwei ebenen Deckeln ist (Fig. 2) und die Zuleitungen Drähte in der Zylinderachse sind. Dann sind alle Kraftlinien Kreise um diese Achse. Für diese Anordnung wollen wir im folgenden den Zustand im Supraleiter nach der Londonschen Theorie mathematisch darstellen.

3. Wir beschäftigen uns zuerst mit dem Zustand im inneren Zylinder<sup>1)</sup>, in welchem der Strom  $i_2$  durch die Niveauläche  $F_2$  eintritt, und zwar unter Verhältnissen, wie sie Fig. 2 angibt, mit konstanter Stromdichte. Diese Voraussetzung ist nämlich sicher erfüllt, wenn der normalleitende Teil des inneren Zylinders eine gegen seinen Radius  $R$  große Länge besitzt; Abweichungen von ihr ließen sich leicht berücksichtigen.

Auch dem supraleitenden Teil schreiben wir eine gewisse Länge zu, doch braucht sie nur gegen die Eindringtiefe des Magnetfeldes groß zu sein. Dies genügt, um sie in der folgenden Rechnung als unendlich anzusehen.

Wir benutzen Zylinderkoordinaten  $r, \vartheta, z$ ; auf  $F_2$  sei  $z = 0$ .

Unter diesen Voraussetzungen hat die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  überall die  $\vartheta$ -Richtung. Im Normalleiter ( $r < R, z < 0$ ) ist

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2}{2\pi c} \frac{r}{R^2}, \quad (2)^2$$

Im Hohlraum ( $r > R$ ) für alle  $z$

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2}{2\pi c r}. \quad (3)$$

im Supraleiter ( $r < R, z > 0$ ) muß das Magnetfeld den folgenden Bedingungen genügen:

1.  $\Delta \mathfrak{H} - \beta^2 \mathfrak{H} = 0$ ;
2. für  $r = R$   $\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2}{2\pi c R}$  wegen des stetigen Anschlusses an (3);
3. für  $z = 0$   $\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2 r}{2\pi c R^2}$  wegen des stetigen Anschlusses an (2).

Indem wir unter  $I_n(x)$  die Besselsche Funktion  $n$ -ter Ordnung verstehen, machen wir nun mit zunächst unbestimmten Konstanten  $C_\alpha$  den Ansatz

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2}{2\pi c R} \cdot \frac{I_1(i\beta r)}{I_1(i\beta R)} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha I_1(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z}. \quad (4)$$

<sup>1)</sup> Die Lösung dieses Teilproblems deutet F. London an in seiner Broschüre *Une conception nouvelle de la supra-conductivité*, Paris 1937, auf S. 39. —

<sup>2)</sup> Wir benutzen das Lorentzsche Maßsystem.

Dieser Ansatz genügt der Differentialgleichung, sofern wir zwischen den Konstanten  $w_\alpha$  und  $\beta_\alpha$  den Zusammenhang schaffen

$$\beta_\alpha^2 = \beta^2 + w_\alpha^2; \quad (5)$$

er genügt der Randbedingung für  $r = R$ , sofern wir die Größen  $w_\alpha$  als die Wurzeln der Gleichung

$$I_1(w_\alpha R) = 0 \quad (6)$$

wählen. Jetzt sind nur noch die  $C_\alpha$  zu bestimmen. Die Randbedingung für  $z = 0$  fordert aber identisch in  $r$

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha I_1(w_\alpha r) = \frac{i_2}{2\pi c R} \left( \frac{r}{R} - \frac{I_1(i\beta r)}{I_1(i\beta R)} \right), \quad (7)$$

und dies genügt zur Festlegung der  $C_\alpha$ .

Sei  $w_n$  eins der  $w_\alpha$ . Wir multiplizieren Gl. (7) mit  $r \cdot I_1(w_n r)$  und integrieren nach  $r$  von 0 bis  $R$ . Wegen der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^R r I_1(w_\alpha r) I_1(w_n r) dr = 0, \quad \text{wenn } \alpha \neq n,$$

und der Identität

$$\int_0^R r I_1^2(w_n r) dr = \frac{1}{2} R^2 [I_1^2(w_n R) - I_0(w_n R) I_2(w_n R)],$$

in welcher wegen (6) der erste Summand verschwindet, erhalten wir dabei

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} R^2 C_n I_0(w_n R) I_2(w_n R) \\ & = \frac{i_2}{2\pi c R} \left\{ \frac{1}{R} \int_0^R r^2 I_1(w_n r) dr - \frac{1}{I_1(i\beta R)} \int_0^R r I_1(i\beta r) I_1(w_n r) dr \right\}. \end{aligned}$$

Zur Auswertung der rechten Seite brauchen wir die bekannten Formeln:

$$\int_0^R r^2 I_1(w_n r) dr = \frac{R^2}{w_n} I_2(w_n R)$$

und

$$\int_0^R r I_1(i\beta r) I_1(w_n r) dr = \frac{R}{\beta^2 + w_n^2} \{ i\beta I_0(i\beta R) I_1(w_n R) - w_n I_0(w_n R) I_1(i\beta R) \}.$$

Deren Einsetzung und Beachtung von (5) und (6) ergibt schließlich

$$C_n = \frac{-i_2}{2\pi c R} \left\{ \frac{1}{(w_n R) I_0(w_n R)} + \frac{w_n R}{(\beta_n R)^2 I_2(w_n R)} \right\}. \quad (8)$$

Damit ist das Magnetfeld vollständig bestimmt.

Die Stromdichte  $i$  ergibt sich daraus nach der Maxwell'schen Gleichung  $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} i$ , wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} i_z &= \frac{c}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial r} = \frac{i_2 \beta}{2\pi R} \frac{I_0(i\beta r)}{-i I_1(i\beta R)} + c \sum_{\alpha=1}^{\infty} w_\alpha C_\alpha I_0(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z}, \\ i_r &= -c \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial z} = + c \sum_{\alpha=1}^{\infty} \beta_\alpha C_\alpha I_1(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z}, \\ i_\vartheta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Stromlinien haben die Differentialgleichung

$$\frac{dr}{dz} = \frac{i_r}{i_z} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial r} dr + \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial z} dz = 0,$$

aus welcher als Gleichung der Stromlinien folgt

$$r \mathfrak{H}_\vartheta = \text{const.} \quad (10)$$

Für  $r = R$  verschwindet nach (9) und (6)  $i_r$ , wie es sein muß. Diese Komponente ist aber an der Grenzfläche  $z = 0$  für kleinere  $r$ -Werte von Null verschieden; da im Normalleiter die Stromlinien auf der Niveaufäche  $F_2$  senkrecht stehen, treten sie also mit einem Knick in den Supraleiter ein. Sie biegen sogleich nach außen um, und zwar so scharf, daß für  $z$ -Werte, welche wesentlich größer als die Eindringtiefe  $\beta^{-1}$  sind,  $i_r$  verschwindet, und falls  $r$  wesentlich kleiner als  $R$ , auch  $i_z$ ; denn für ein gegen  $\beta^{-1}$  großes  $R$  läßt sich der Bruch  $\frac{I_0(i\beta r)}{-i I_1(i\beta R)}$  annähern durch  $e^{-\beta(R-r)}$ . Schon für solche  $z$ -Werte haben wir also dasselbe Strömungsbild, als ob der supraleitende Teil des Zylinders nicht an einen normal leitenden Teil stieße.

4. Um diese Darstellung auf den äußeren Zylinder mit den Radien  $R_i$  und  $R_a$  (siehe Fig. 2) zu übertragen, müssen wir zunächst diejenigen Lösungen  $Z_1(w_\alpha r)$  der Besselschen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Z_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dZ_1}{dr} + \left( w_\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) Z_1 = 0$$

eingeführen, welche den beiden Bedingungen

$$Z_1(w_\alpha R_i) = 0, \quad Z_1(w_\alpha R_a) = 0 \quad (11)$$

genügen. Es sind lineare Kombinationen  $P_\alpha I_1(w_\alpha r) + Q_\alpha \cdot H_1^{(1)}(w_\alpha r)$  der Besselschen Funktionen  $I_1(w_\alpha r)$  und der Hankelschen Funktionen  $H_1^{(1)}(w_\alpha r)$ . Die Gleichungen (11) reichen aus, eine diskrete Zahl von Werten  $w_\alpha$  und für jeden dieser Werte das Verhältnis der beiden Koeffizienten

$P_\alpha$  und  $Q_\alpha$  festzulegen<sup>1)</sup>. Für sie gelten nach allgemeinen Sätzen die Orthogonalitätsbeziehungen

$$\int_{R_1}^{R_2} r Z_1(w_\alpha r) Z_1(w_n r) dr = 0, \quad \text{wenn } \alpha \neq n; \quad (12)$$

und man kann sie mittels der Forderung

$$\int_{R_1}^{R_2} r Z^2(w_\alpha r) dr = 1 \quad (13)$$

normieren, wodurch dann die genannten Koeffizienten vollständig bestimmt sind. Entsprechend werden wir aus den Funktionen  $I_1(i\beta r)$  und  $H_1^{(1)}(i\beta r)$  eine lineare Kombination schaffen, welche für  $r = R_i$  und für  $r = R_a$  vorgegebene Werte annimmt.

Das Magnetfeld im Supraleiter hat jetzt den folgenden Bedingungen zu genügen:

1. wieder der Differentialgleichung  $\Delta \mathfrak{H} - \beta^2 \mathfrak{H} = 0$ ;
2. für  $r = R_i$ :  $\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_2}{2\pi c R_i}$ , da jeder Kreis  $z = \text{const}$ ,  $r = R_i$  den im inneren Zylinder fließenden Strom  $i_2$  umschließt;
3. für  $r = R_a$ :  $\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{i_1 + i_2}{2\pi c R_a}$ , da jeder Kreis  $z = \text{const}$ ,  $r = R_a$  die in den beiden Zylindern fließenden Ströme  $i_1$  und  $i_2$  umschließt;
4. für  $z = 0$ , d. h. längs der Grenze gegen den Normalleiter

$$\mathfrak{H}_\vartheta = \frac{1}{2\pi c r} \left( i_2 + \frac{r^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} i_1 \right);$$

denn dies ist der Wert für den Normalleiter, an welchen sich das Feld im Supraleiter stetig anschließen muß.

Ihnen genügt der Ansatz

$$\mathfrak{H}_\vartheta = A I_1(i\beta r) + B H_1^{(1)}(i\beta r) + \sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha Z_1(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z} \quad (14)$$

und zwar ist die Differentialgleichung erfüllt, sofern wir zwischen  $\beta_\alpha$  und  $w_\alpha$  wieder die Beziehung (5) annehmen; die Randbedingungen für  $r = R_i$  und  $r = R_a$  sind befriedigt, wenn wir die Konstante  $A$  und  $B$  aus den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} A I_1(i\beta R_i) + B H_1^{(1)}(i\beta R_i) &= \frac{i_2}{2\pi c R_i}, \\ A I_1(i\beta R_a) + B H_1^{(1)}(i\beta R_a) &= \frac{i_1 + i_2}{2\pi c R_a} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

<sup>1)</sup>  $w_\alpha$  bestimmt sich aus der Determinantengleichung

$$I_1(w_\alpha R_i) H_1^{(1)}(w_\alpha R_a) - I_1(w_\alpha R_a) H_1^{(1)}(w_\alpha R_i) = 0.$$

bestimmen; und die Randbedingung für  $z = 0$  wird genügt, wenn wir die Konstanten  $C_\alpha$  aus der Gleichung bestimmen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} C_\alpha Z_1(w_\alpha r) = \frac{1}{2\pi cr} \left( i_R + \frac{r^2 - R_i^2}{R_a^2 - R_i^2} i_1 \right) - A I_1(i\beta r) - B H_1^{(1)}(i\beta r). \quad (16)$$

Diese Bestimmung aber wird durch die Orthogonalitätsrelationen (12) ermöglicht.

Auf die Stromdichte schließt man dann, wie oben:

$$i_z = \frac{c}{r} \frac{\partial (r \mathfrak{H}_\vartheta)}{\partial r} = c \{ i\beta [A I_0(i\beta r) + B H_0^{(1)}(i\beta r)] + \sum_1^\infty w_\alpha C_\alpha Z_0(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z} \}$$

wobei

$$Z_0(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} (x Z_1(x))$$

ist, ferner:

$$i_r = -c \frac{\partial \mathfrak{H}_\vartheta}{\partial z} = c \sum_1^\infty \beta_\alpha C_\alpha Z_1(w_\alpha r) e^{-\beta_\alpha z},$$

$$i_\vartheta = 0.$$

$i_r$  verschwindet für  $r = R_i$  und  $r = R_a$  wegen (11); diese Komponente ist überhaupt nur in einer Schicht von einer Dicke wie  $\beta^{-1}$  längs der Grenzebene  $z = 0$  vorhanden. Für größere  $z$ -Werte fließt der Strom parallel zu  $z$  ganz so, als wäre der Supraleiter nach beiden Seiten unbegrenzt.

Setzen wir  $R_a, R_i$  und  $(R_a - R_i)$  als gegen  $\beta^{-1}$  groß voraus, so steigt  $I_1(i\beta r)$  mit wachsendem  $r$  exponentiell an, während  $H_1(i\beta r)$  exponentiell abfällt. Man kann dann in der Nähe von  $r = R_i$  ganz von dem Summanden mit  $A$  im Ansatz (14) absehen, in der Nähe von  $r = R_a$  von dem Gliede mit  $B$ . Auch in den Gleichungen (15) braucht man nur je einen Summanden zu berücksichtigen, was die Bestimmung der Konstanten  $A$  und  $B$  noch vereinfacht. Physikalisch geht aus dieser Vernachlässigung besonders klar hervor, daß auf der Innenseite des Hohlzylinders ein Strom der Stärke  $i_2$ , natürlich von unten nach oben, fließt, während auf der Außenseite die gesamte Stromstärke  $i_1 + i_2$  beträgt. Beide Ströme fließen in Schichten, deren Dicke von der Größenordnung  $\beta^{-1}$  ist.

Die Rechnung weiter zu führen, wäre unständlich und ist unnötig, da wir uns auf diesem mathematischen Wege nur von der Richtigkeit der in Abschnitt 2 entwickelten Anschauung überzeugen wollten.

5. *Eine Verallgemeinerung des Verteilungssatzes.* Bisher hatten wir beim Verteilungssatz vorausgesetzt, daß die gemeinsame Zuleitung zu den verschiedenen Leitungszweigen mit diesen nicht induktiv gekoppelt ist. Sofern diese Zuleitung ebenfalls supraleitend ist, läßt sie sich leicht ab-



streifen, wie wir hier für zwei Leitungszweige zeigen wollen. Die weitere Verallgemeinerung auf  $n$  Zweige ist dann selbstverständlich.

Habe die Zuleitung die Selbstinduktion  $L_{zz}$  und mit den beiden Zweigen die Induktionskoeffizienten  $L_{z1}$  und  $L_{z2}$ , so ist die magnetische Energie

$$\frac{1}{2} (L_{11} i_1^2 + L_{22} i_2^2 + L_{zz} (i_1 + i_2)^2 + 2 L_{12} i_1 i_2 + 2 L_{z1} i_1 (i_1 + i_2) + 2 L_{z2} i_2 (i_1 + i_2)).$$

Daher sind als resultierende Induktionskoeffizienten  $A_{in}$  in die Verteilungsformeln

$$i_1 = \frac{A_{22} - A_{12}}{A_{11} + A_{22} - 2 A_{12}}, \quad i_2 = \frac{A_{11} - A_{12}}{A_{11} + A_{22} - 2 A_{12}}$$

einzusetzen:

$$A_{11} = L_{11} + L_{zz} + 2 L_{z1},$$

$$A_{22} = L_{22} + L_{zz} + 2 L_{z2},$$

$$A_{12} = L_{12} + L_{zz} + L_{z1} + L_{z2},$$

so daß

$$i_1 = \frac{L_{22} - L_{12} + L_{z2} - L_{z1}}{L_{11} + L_{22} - 2 L_{12}}, \quad i_2 = \frac{L_{11} - L_{12} + L_{z1} - L_{z2}}{L_{11} + L_{22} - 2 L_{12}}$$

wird. Dies gilt, sofern nur die induktive Koppelung der supraleitenden Teile des Stromsystems mit normalleitenden zu vernachlässigen ist.

*Zusatz bei der Korrektur* (November 1942). Bestehen in Fig. 2 beide Teile der Anordnung aus Supraleitern und schreiben wir dem bei den negativen  $z$ -Werten liegenden Supraleiter die Konstante  $\beta'$  zu, so haben wir, um den Zustand im inneren Zylinder zu beschreiben, dem Ansatz (4) und der Gleichung (5) für negative  $z$  den Ansatz

$$\mathfrak{H}'_z = \frac{i_2}{2\pi c R} \frac{I_1(i\beta' r)}{I_1(i\beta' R)} + \sum_{\alpha=1}^{\infty} C'_\alpha I_1(w_\alpha r) e^{\beta'_\alpha z}, \quad \beta'^2_\alpha = \beta'^2 + w_\alpha^2,$$

hinzuzufügen. Zur Bestimmung der Konstanten  $C_\alpha$  und  $C'_\alpha$  haben wir dann wie oben, gültig für  $z = 0$ , die Forderung der Stetigkeit von  $\mathfrak{H}_z$ . Aber die unter 4 genannte Grenzbedingung fällt hier fort, da wir zunächst in keinem der beiden Teile die Stromverteilung kennen. Hier greift nun eine neue, nur für die Berührung von Supraleitern gültige Grenzbedingung ein. Man kann aus der Londonschen Theorie ableiten, daß die Tangentialkomponenten der Strömung  $i$  dividiert durch  $\beta^2$  stetig sein müssen<sup>1)</sup>. Das bedeutet in unserem Falle

$$\frac{i_r}{\beta^2} = \frac{i'_r}{\beta'^2},$$

<sup>1)</sup> M. v. Laue, Ann. d. Phys. 42, 65, 1942.

oder nach der zweiten Gleichung (9) und der entsprechenden für den anderen Supraleiter:

$$\sum_{\alpha=1}^{\infty} \left( \frac{\beta_{\alpha} C_{\alpha}}{\beta^2} - \frac{\beta'_{\alpha} C_{\alpha}}{\beta'^2} \right) I_1(w_{\alpha} r) = 0.$$

Da die  $I_1(w_{\alpha} r)$  aber linear unabhängig sind, folgt aus dieser Gleichung für alle Indizes:

$$C'_{\alpha} = \frac{\beta'^2}{\beta^2} \frac{\beta_{\alpha}}{\beta'_{\alpha}} C_{\alpha}.$$

Setzt man dies in den obigen Ansatz ein, so genügt bei gegebenem Wert  $i_2$  die Stetigkeitsforderung für  $\mathfrak{H}_z$  zur vollständigen Bestimmung aller Konstanten  $C_{\alpha}$ .

Ebenso erweist sich die neue Grenzbedingung als notwendig und hinreichend bei der Herleitung des Zustandes im äußeren Hohlzylinder, sofern  $i_1$  bekannt ist.

Während aber früher die Potentialtheorie den Zustand im Normalleiter und damit die Aufteilung des zugeleiteten Stromes in  $i_1$  und  $i_2$  eindeutig bestimmte, bleibt diese Verteilung jetzt genau so unbestimmt, wie nach § 1 im Falle, daß das ganze System aus *einem* Supraleiter besteht. Hier kommt es auf die Vorgeschichte, die Art der Herstellung des Stromsystems, an.

Berlin-Dahlem, Max Planck-Institut, im Juli 1942.

## Direkte Massenbestimmung eines Mesotrons mit Hilfe des elastischen Stoßes \*).

Von L. Leprince-Ringuet, E. Nageotte, S. Gorodetzky und R. Richard-Foy.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 7. September 1942.)

*Einleitung.* Die Masse des Mesotrons ist experimentell an den Teilchen der kosmischen Ultrastrahlung auf verschiedenem Wege abgeschätzt worden. Eine Möglichkeit besteht darin, gleichzeitig die Krümmung der Teilchenbahn im Magnetfeld und seine Reichweite zu bestimmen; eine zweite in der Beobachtung der Krümmungsänderungen der Teilchenbahn im Magnetfeld beim Durchgang durch Materie, und schließlich eine dritte in der gleichzeitigen Bestimmung der Bahnkrümmung im Magnetfeld und der spezifischen Ionisation. Diese verschiedenen Methoden haben bereits sehr wichtige Abschätzungen der Masse des Mesotrons geliefert. Es werden hierbei aber immer Voraussetzungen gemacht, die nicht jeder Kritik standhalten.

Die erhaltenen Resultate sind daher keine wirklichen Messungen, sondern Abschätzungen von allerdings oft recht guter Sicherheit. Die experimentellen Methoden, die demgegenüber als die sichersten erscheinen, sind die der Massenspektroskopie und die des elastischen Stoßes eines Mesotrons mit einem ruhenden Elektron. Die erste dieser Methoden ist aber nicht anwendbar; die zweite Methode, die einen unmittelbaren Weg zur Massenbestimmung darstellt, ist dagegen auf die Mesotrone der kosmischen Ultrastrahlung direkt anwendbar, denn sie macht nur Gebrauch von den klassischen Gesetzen der Erhaltung der Energie und des Impulses und dem Gesetz über die Wirkung eines Magnetfeldes auf ein bewegtes, geladenes Teilchen. Leider hat sie aber noch nicht sehr gute Resultate geliefert, da man nur sehr selten einen elastischen Stoß beobachtet, der unter guten experimentellen Bedingungen verläuft, die für eine genaue Massenbestimmung notwendig sind.

Wir haben das Glück gehabt, einen derartigen Stoß zu beobachten, und erhielten daraus eine Massenbestimmung mit einer Genauigkeit von 10%. Die Masse dieses Mesotrons war das 240fache der Elektronenruhmasse und seine Ladung war negativ.

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

Die Methode des elastischen Stoßes soll hier näher beschrieben und die besten experimentellen Bedingungen erörtert werden.

*Methode der Massenbestimmung durch elastischen Stoß.* Bei der Untersuchung der Bahnen der kosmischen Ultrastrahlung mit Hilfe der Wilsonschen Nebelkammer im Magnetfeld beobachtet man manchmal den Stoß eines einfallenden Teilchens gegen ein praktisch ruhendes Elektron. Um aus einem derartigen Zusammenstoß die Masse des einfallenden Teilchens zu bestimmen, muß die an das Sekundärteilchen übertragene Energie groß sein, was nur sehr selten vorkommt. Gleichzeitig muß natürlich auch die Energie des einfallenden Teilchens gut meßbar sein, d. h. sie darf nicht zu groß sein. Hinzu kommen noch weitere Bedingungen, die unten erörtert werden sollen.

*Der elastische Stoß; Formel für  $M_0$ .* Der Vorgang des Stoßes stellt sich in dem zur Massenbestimmung brauchbaren Fall folgendermaßen dar (Fig. 1):  $PQ$  sei die Bahn des einfallenden Teilchens großer Energie,  $ABC$  die Bahn des gestoßenen Elektrons, mit einem Abstand  $f$  von der Bahn  $PQ$ . Das Elektron kann auch von  $B$  ausgehen und das Bahnstück  $AB$  nicht aufweisen. In diesem Fall verlängert man einfach den Bogen des Kreises  $CB$  bis  $A$ , um den Abstand  $f$  zu finden so, als ob das Elektron von  $A$  ausgegangen wäre.

Bezeichnet man mit  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  den Krümmungsradius des Mesotrons  $PA$  und den des Elektrons  $ABC$ , so kann man das Verhältnis der Ruhemassen  $\mu_0 = M_0/m_0$  der beiden Teilchen in Abhängigkeit von  $\varrho_1$ ,  $\varrho_3$  und  $f$  ausdrücken. Bei der nachstehenden Rechnung ist hierbei angenommen, daß die Bahnen senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien laufen.

Die allgemein benutzte Formel enthält die Werte  $\beta = v/c$  und  $\sqrt{1 - \beta^2}$  der beiden Teilchen. Für die kosmische Ultrastrahlung ist sie praktisch nicht zu benutzen, denn die Geschwindigkeiten sind sehr nahe der Lichtgeschwindigkeit und die Näherungen werden dadurch schlecht auswertbar. Wir leiten daher besser eine Formel ab, die  $\mu_0 = M_0/m_0$  als Funktion der direkt meßbaren Größen  $\varrho_1$ ,  $\varrho_3$  und  $f$  ergibt. Wir machen dazu nur die beiden Annahmen, daß die beiden Teilchen die gleiche Ladung  $e = 1$  besitzen und daß die Bahnen normal zur Richtung des Magnetfeldes  $H$  verlaufen.

Die bekannte Formel der magnetischen Ablenkung (1) lautet dann:

$$Mv = eH\varrho \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Madame P. Curie, Radioactivité. Paris. Hermann éd.

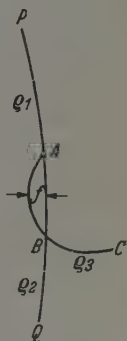


Fig. 1.

(mit  $M, m$  werden die relativistischen Massen bezeichnet, mit  $M_0, m_0$  die Ruhemassen).

Nach den Stoßgesetzen kann die Erhaltung des Impulses geschrieben werden

$$\sum \vec{q} = 0, \quad (2)$$

wenn die Tangenten in  $A$  als Vektoren die Größe der Bahnkrümmung und die Richtung der Geschwindigkeit angeben. Die Beziehung  $\sum \vec{m} \vec{v} = 0$  bringt dann die Gleichung (2) mit sich, da  $Mv = eH\rho$  ist.

Die Erhaltung der Energie kann folgendermaßen geschrieben werden: Die Gesamtenergie eines Teilchens ist

$$E = Mc^2 = \frac{Mcv}{\beta} = \frac{ecH\rho}{\beta} = \frac{M_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Setzt man

$$\rho_{M_0} = \frac{M_0c^2}{ecH} \quad (3)$$

(die Bedeutung der Länge  $\rho_{M_0}$  wird weiter unten besprochen), so ergibt sich  $\frac{\rho_{M_0}^2}{1-\beta^2} = \frac{\rho^2}{\beta^2}$  und daraus  $E = ecH\sqrt{\rho_{M_0}^2 + \rho^2}$ . Die Erhaltung der Energie ist dann:  $\sum Mc^2 = \sum ecH\sqrt{\rho_{M_0}^2 + \rho^2} = 0$ , und daraus folgt bei gleicher Ladung

$$\sum \sqrt{\rho_{M_0}^2 + \rho^2} = 0. \quad (4)$$

In dieser Beziehung sind die Energien vor dem Stoß positiv und nach dem Stoß negativ gesetzt.

Wir suchen nun den Wert  $\mu_0 = M_0/m_0$ , wobei  $\rho_1$  und  $\rho_2$  die Krümmungsradien des einfallenden Teilchens mit der Ruhemasse  $M_0$  vor und nach dem Stoß und  $\rho_3$  der Krümmungsradius des gestoßenen Elektrons mit der Ruhemasse  $m_0$  sind.

Wir setzen nun  $\rho_0 = \frac{m_0c^2}{ecH}$  mit  $\rho_{M_0} = \mu_0\rho_0$  und bezeichnen mit  $\rho_4$  die Länge  $\rho_4 = \sqrt{\rho_3^2 + \rho_0^2}$ .

Die Gleichung (4) schreibt sich dann

$$\sqrt{\rho_1^2 + \mu_0^2 \rho_0^2} - \sqrt{\rho_2^2 + \mu_0^2 \rho_0^2} = \sqrt{\rho_3^2 + \rho_0^2} - \rho_0 = \rho_4 - \rho_0,$$

und daraus ergibt sich

$$\mu_0^2 = \frac{(\rho_1 + \rho_2 + \rho_4 - \rho_0)(\rho_1 + \rho_2 - \rho_4 + \rho_0)(\rho_1 - \rho_2 + \rho_4 - \rho_0)(\rho_1 - \rho_2 - \rho_4 + \rho_0)}{4\rho_0^2(\rho_4 - \rho_0)^2}. \quad (5)$$

Die Gleichung (5) gilt streng. Sie ist aber in dieser Form nicht brauchbar, wo  $\rho_1 \gg \rho_0$  ist, denn der kleinste Term  $(\rho_1 - \rho_2 - \rho_4 + \rho_0)$  ist experimentell

viel zu schlecht definiert. Es ergibt sich deshalb die Notwendigkeit, diesen Ausdruck, um ihn für die Rechnung brauchbar zu machen, durch Berechnung von  $\varrho_1 - \varrho_2$  umzuwandeln.

Wir drücken  $\varrho_1 - \varrho_2$  als Funktion von  $\Theta$  (siehe Fig. 2) oder, besser noch, als Funktion des Abstandes

$$f = \varrho_3 (1 - \cos \Theta)$$

aus zwischen der Sekundärbahn und der Bahn des einfallenden Teilchens. Diese Länge ist meßbar, während  $\varrho_1 - \varrho_2$  es nicht ist.

Aus dem Dreieck der  $\varrho$  ergibt sich

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \varrho_3 - f \frac{2 \varrho_1}{(\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3) - 2 \varrho_3}, \quad (6)$$

nun ist aber

$$\varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_1 = (1 + \lambda) \varrho_0 \quad \text{mit } \lambda < 1,$$

da gleichzeitig folgende zwei Ungleichungen gelten:

$$\varrho_1 - \varrho_2 - \varrho_4 + \varrho_0 > 0$$

und durch Definition

$$\varrho_4 > \varrho_3 - \varrho_0.$$

Folglich gilt:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \varrho_3 - f \frac{2 \varrho_1}{2 (\varrho_1 - \varrho_3) + (1 + \lambda) \varrho_0}.$$

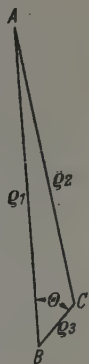


Fig. 2.

Durch Einsetzen dieses Wertes in (5) kann dann  $\mu_0$  streng berechnet werden.

**Näherungsformel.** Im Falle von Höhenstrahlaufnahmen können gewisse Näherungen gemacht werden.

Vor allem ersieht man aus dem Ausdruck (3) für  $\varrho_0$ , daß diese Länge im allgemeinen verglichen mit den gemessenen Krümmungsradien sehr klein ist. Wenn man nämlich sehr schnelle Elektronen betrachtet ( $\beta \approx 1$ ), so gilt näherungsweise  $mc^2 = e c H \varrho$ .

Betrachtet man zwei solche Elektronen, deren Energien sich um die Ruhemasse  $m_0 c^2$  unterscheiden, d. h. um  $0,5 \cdot 10^6$  e-Volt, so werden sich ihre Krümmungsradien um  $\varrho_0$  unterscheiden. Hieraus ergibt sich die physikalische Deutung von  $\varrho_0$  und ihre Größenordnung.  $\varrho_0$  ist gegenüber  $\varrho_1$  immer sehr klein und im allgemeinen auch sehr klein gegenüber  $\varrho_3$ , da die Sekundärteilchen, die uns interessieren, eine Energie von mehreren e-MV haben.



Bei dem Näherungsverfahren nehmen wir immer an, daß  $\varrho_1 \gg \varrho_0$  ist. Man erhält dann für beliebige Werte von  $\varrho_3$  gegenüber  $\varrho_1$  oder  $\varrho_0$

$$\mu_0 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{2(\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_0 - f) \frac{\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_3}}{\varrho_1 \varrho_3}} \quad (7)$$

Nimmt man dazu noch an, daß  $\varrho_1 \gg \varrho_3 \gg \varrho_0$  ist, was dem allgemeineren Fall entspricht, dann vereinfacht sich die Formel und es wird

$$\mu_0 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0} \sqrt{\frac{2(\varrho_0 - f)}{\varrho_3}} \quad (8)$$

Ist endlich  $\varrho_3$  sehr klein gegenüber  $\varrho_1$  und nicht zu groß gegenüber  $\varrho_0$  (was dem Fall eines Sekundärteilchens entspricht, dessen Energie von der Größenordnung von einigen Hunderttausend oder einer e-MV ist), so kann man die Formel folgendermaßen schreiben:

$$\mu_0 = \frac{\varrho_1}{\varrho_0(\varrho_4 - \varrho_0)} \sqrt{(\varrho_3 + \varrho_4 - \varrho_0 - f)(\varrho_3 - \varrho_4 + \varrho_0 - f)} \quad (9)$$

Diese Formeln sind gültig für Primär- und Sekundärbahnen, die zur Feldrichtung normal sind. Ist dieser Zustand nicht ganz verwirklicht, dann kann man ähnliche Beziehungen aufstellen durch Einführung der Winkel  $(\pi/2 - \xi)$  und  $(\pi/2 - \zeta)$ , den die Primär- bzw. Sekundärbahnen mit der Feldrichtung bilden. Die Beziehung (1) wird dann:

$$Mv = \frac{eH\varrho}{\cos \xi}$$

Definieren wir gewisse Vektoren  $r$  der Länge  $r = \varrho/\cos \xi$  in Richtung der Geschwindigkeit, so ergibt sich eine analoge Rechnung durch Einsetzen von  $r$  an Stelle von  $\varrho$  und durch Einsetzen des zugehörigen Wertes von  $f$ . (Man kann zeigen, daß  $\varrho_3 - f$  sich nicht ändert.)

*Günstige Versuchsbedingungen.* Aus den Formeln (7), (8) und (9) ergeben sich die günstigsten Versuchsbedingungen. Aus der Formel (8) folgt, daß im Falle von  $\varrho_1 \gg \varrho_3 \gg \varrho_0$  die Ungleichung  $\varrho_0 - f > 0$  gilt. Die Ablenkung  $f$  ist also begrenzt durch  $\varrho_0 = \frac{m_0 c^2}{e c H} = \frac{1700}{H}$  ( $H$  in Gauss,  $\varrho_0$  in cm.)

Um  $f$  gut abschätzen zu können, muß  $\varrho_0$  nicht allzu klein sein, d. h. das Feld  $H$  muß schwach sein, da  $\varrho_0$  dem Felde  $H$  umgekehrt proportional ist.

Für  $H = 17000$  Gauss, einem Wert, der für die Höhenstrahlungsforschung gebräuchlichen Felder zuweilen erreicht und zuweilen auch überschritten wird, ergibt sich  $\varrho_0 = 0,1$  cm. Hieraus folgt, daß es nicht möglich

ist, mit so starken Feldern zu einer guten Abschätzung von  $f$  zu gelangen. Es ergibt sich also die Notwendigkeit der Beschränkung auf  $H = 3400$  Gauss, wenn man für  $\varrho_0$  einen Wert von 0,5 cm anstrebt, der zu einer zufriedenstellenden Abschätzung von  $f$  führt, da hierbei die Unsicherheit in der Breite der Bahn klein wird gegenüber  $\varrho_0$ .

Diese Bemerkung gilt auch für die anderen oben aufgestellten Beziehungen. Hieraus ist der Grund ersichtlich, der die nicht zufriedenstellenden Abschätzungen der Mesotronenmassen erklärt, die man bei dem elastischen Stoß erhält (die andererseits theoretisch die besten sind). Einerseits sind Aufnahmen mit elastischen Stößen im Gas sehr selten, da auf Zehntausenden von Nebelkammeraufnahmen nur sehr wenige dieser Art veröffentlicht worden sind<sup>1)</sup>. Andererseits waren die verwendeten Felder viel zu stark, um die Massen der einfallenden Teilchen erkennen zu lassen.

Der Gebrauch eines schwachen magnetischen Feldes, wie es hierbei notwendig ist, führt jedoch den großen Nachteil mit sich, daß bei Primärstrahlen großer Energie  $\varrho_1$  nicht mehr mit genügender Genauigkeit bestimmt werden kann. Es ergibt sich die Zweckmäßigkeit, die üblicherweise gebrauchten starken Felder durch weniger starke und ausgedehntere Felder zu ersetzen, und hieraus ergibt sich die Notwendigkeit der Anwendung einer Expansionskammer von großen Vertikaldimensionen. Auch mit einer solchen Kammer jedoch ist es für eine genaue Bestimmung von  $\varrho_1$  notwendig, Primärstrahlen von nicht allzu großer Energie zu benutzen, wodurch sich die für eine Beobachtung günstigen Bedingungen verschlechtern.

*Versuchsanordnung.* Eine besonders glückliche Messung der Masse eines Mesotrons konnte auf einer der vielen Tausend stereoskopischer Aufnahmen erzielt werden, die im März 1939 mit dem Magnetfeld des Elektromagneten von Bellevue<sup>2)</sup> gemacht worden waren. Die Expansionskammer war so umgebaut worden, daß eine größere Regelmäßigkeit im Betrieb erzielt werden konnte. Der Absorber in der Mitte (Fig. 3) war durch eine dünnwandige Messingdose ersetzt worden, die zwei kleine Geiger-Müller-Zählrohre aus Chromeisen enthielt mit je 0,9 cm Durchmesser und 8 cm wirksamer Länge, so daß etwaige Absorber bis zu 2,5 cm Dicke eingeschoben

---

<sup>1)</sup> P. M. S. Blackett. La radiation cosmique. Paris, Hermann éd., 1935; J. G. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **166**, 482, 1938; L. Leprince-Ringuet u. J. Grussard, Journ. of Phys. et le Rad. **8**, 207, 1937; siehe auch W. Gentner, H. Maier-Leibnitz, W. Bothe, Nebelkammerbilder. Berlin, Springer, 1940. — <sup>2)</sup> L. Leprince-Ringuet, S. Gorodetzky, E. Nageotte, R. Richard-Foy, C. R. Acad. Sciences **211**, 382, 1940.

werden konnten. In der Versuchsreihe, aus der die Mesotronenaufnahme stammt, befand sich kein Absorber zwischen den Zählrohren.

Die Halterungen der verschiedenen Kammerteile sind sehr einfacher Art und sehr stabil. Die Fenster und die Metallteile werden einfach durch Druck zusammengehalten. Die Dichtung wird durch Gummiringe erreicht. Die vier Fenster sind in Rillen der Dose und in Rillen des Bodens und des Deckels der Kammer eingelassen. Alle diese Teile haben die gleiche Breite (5,5 cm), und zwei flache Halterungen sichern gleichzeitig die Starrheit und die Justierung der gesamten Anordnung. Das elektrische Feld ist zwischen die Dose mit den Zählrohren und dem Boden bzw. Deckel der

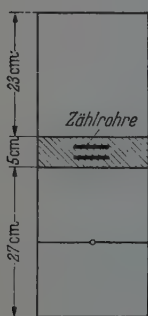


Fig. 3. Schema der Nebelkammer.

Kammer angelegt. Ein schwarzer Samt ist auf dem Gitter des Bodens ausgespannt. Der Kolben besteht wie bei den Versuchen von 1936 aus Duralumin und hat die gleiche Oberfläche wie die Doppelkammer. Er befindet sich in zwei Gummiplatten eingebettet. Die Kammer befindet sich zum Schutze gegen Luftströmungen in einem Schutzgehäuse.

Die Geiger-Müller-Zählrohre, die sich in der Dose befinden, lösen die Expansion aus. Die Zählrohre befinden sich in einem durchbrochenen Kasten, der in die Dose eingeführt werden kann. Die Wandstärke der Messingwand der Dose ist 1 mm, die Wandstärke der Zählrohrwände 0,5 mm. Auf diese Weise ist es möglich, die Anordnung der Zählrohre zu ändern und Absorberfolien hinzuzufügen oder zu entfernen, ohne die Kammer zu öffnen. Die Kammerfüllung bestand aus Argon mit 83 cm Hg Druck und enthielt Alkohol und Wasser. Die Druckerhöhung gegenüber dem Atmosphärendruck dient zur Expansion.

Wie bei vielen ähnlichen Apparaturen erfolgte die Beleuchtung durch Kurzschließung der Sekundärwicklung eines Transformators von 15 kW und 12 kV über ein 4 mm dickes und 55 cm langes Rohr mit erhitztem Quecksilberdampf bei einem Druck von ungefähr 1 cm Hg.

Der Stromkreis dieses Rohres wird  $\frac{2}{100}$  Sekunden nach Expansionsende geschlossen und  $\frac{3}{100}$  Sekunden später wieder geöffnet.

*Beobachtung eines günstigen Stoßes. Meßresultat.* Wir hatten das Glück, mit der oben erwähnten Versuchsanordnung einen besonders günstigen Stoß eines Höhenstrahlmesotrons mit einem Elektron im Ruhezustand innerhalb des Gases der 55 cm hohen Wilson-Kammer beobachten zu können (Fig. 4).

Es folgen die Versuchsdaten:

$$H = 2650 \text{ Gauss,}$$

$$115 < \varrho_3 < 120 \text{ cm,}$$

$$f < 0,03 \text{ cm.}$$

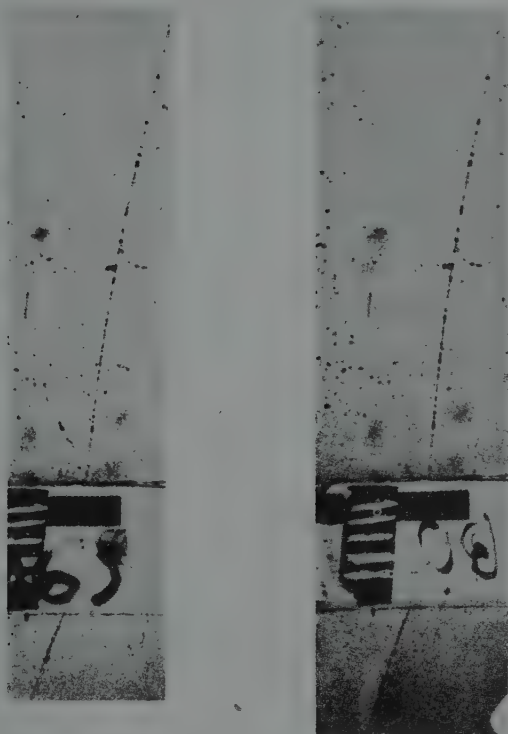


Fig. 4. Stereoskopische Aufnahme des Stoßes eines Mesotrons auf ein ruhendes Elektron.

Die Sekundärbahn bildete mit dem Feld einen Winkel von  $\pi/2 - \zeta$ , und zwar mit  $\cos \zeta = 0,97$ . Wir haben hier den Fall der Formel (9) vor uns, indem wir  $\varrho_3$  durch  $r_3 = \varrho_3 / \cos \zeta$  ersetzen.

Die Massenbestimmung ergibt

$$M_0 = 240 m_0.$$

Das Teilchen ist negativ. Man sieht, daß die Energie des Mesotrons gering ist und nur  $W = 33 \cdot 10^6$  e-Volt beträgt. Dank dieser geringen Energie konnte die Bestimmung von  $\varrho_1$  mit guter Genauigkeit erfolgen.

*Fehlerbetrachtung.* Wir betrachten die hauptsächlichsten Fehlerquellen des Versuchs und bestimmen deren Einfluß auf den Wert von  $\mu_0$ . In den hier angeführten Ergebnissen wählen wir als obere und untere Grenze einer Größe gewisse Werte, die offensichtlich größer oder kleiner als die zu bestimmende Größe selbst sind. Es handelt sich hier also nicht um den „wahrscheinlichen Beobachtungsfehler“:

a) Fehler für  $\varrho_1$ : Man hat  $\frac{\Delta \mu_0}{\mu_0} = \frac{\Delta \varrho_1}{\varrho_1} = 2\%$ .

b) Fehler für  $r_3$ : Bei  $r_3 = \varrho_3 / \cos \zeta$  müssen zwei Fehlerquellen berücksichtigt werden. Die Unsicherheit von  $\cos \zeta$  beträgt mit  $0,95 < \cos \zeta < 0,985$  2%.

Ferner beträgt die Ungenauigkeit der Messung von  $\varrho_3$  2,5%. Im ganzen ist also die Meßgenauigkeit von  $r_3$  4,5%. Dies geht in die Näherungsformel  $\frac{\Delta \mu_0}{\mu_0} = \frac{2}{3} \frac{\Delta \varrho_3}{\varrho_3} = 3,5\%$  ein.

c) Der Fehler in der Bestimmung von  $\gamma$  geht ein in die Beziehung

$$\frac{\Delta \mu_0}{\mu_0} = \frac{\varrho_3}{(\varrho_3 + \varrho_4 - \varrho_0)(\varrho_3 + \varrho_4 + \varrho_0)} \approx 2\%.$$

d) Der Fehler von  $H$  konnte bei unseren Versuchsbedingungen bis 5% betragen. Dieser Fehler geht aber nur wenig ein und man hat

$$\frac{\Delta \mu_0}{\mu_0} \sim \frac{1}{5} \frac{\Delta H}{H} = 1\%.$$

e) Andere Fehlerquellen sind zu berücksichtigen in Zusammenhang mit den Aufnahmen und der Wiedergabe der Aufnahmen. Für diese Wiedergabe wurde der Weg einer maßgetreuen Reproduktion gewählt unter Benutzung desselben Objektivs, mit dem die Aufnahme gemacht wurde. Da für die Wiedergabe die Mittellage der Kammer dient und da das Teilchen die Kammer etwas schräg gegen diese Mittellage durchsetzen kann, entsteht hierdurch eine neue Fehlerquelle, die jedoch vernachlässigt werden kann in Hinsicht auf die hohe Verhältniszahl zwischen Kammerhöhe und Durchleuchtungstiefe der Kammer.

Die weiteren Fehler können auch gegenüber den obenerwähnten Fehlern vernachlässigt werden.

Wir können folglich die Größe  $\mu_0$  in folgende Fehlergrenzen einschließen:

$$\mu_0 = 240 \pm 22.$$

*Diskussion.* Der hier gemessene Wert von  $\mu_0$  steht in ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Abschätzungen von Neddermeyer und Ander-

son auf Grund ihrer bekannten Aufnahme<sup>1)</sup>. Es besteht auch Übereinstimmung mit der Abschätzung von Corson und Brode<sup>2)</sup> auf Grund der spezifischen Ionisation und der Krümmung. Die anderen Abschätzungen auf Grund von Aufnahmen anderer Autoren [Nishina und Mitarbeiter<sup>3)</sup>, J. G. Wilson<sup>4)</sup>, Street und Stevenson<sup>5)</sup>, Williams und Pickup<sup>6)</sup>] geben alle niedrigere Massenwerte als unser Versuchsergebnis.

Es ist uns durch einen glücklichen Umstand gelungen, auf der Mesotronenaufnahme noch eine Bestätigung der Größenordnung der Masse zu finden. Dies war möglich durch Betrachtung der Bahnen vor und nach Durchgang durch die Dose, die die Geiger-Müller-Zählrohre enthält. Die Masse  $M_0$  kann man nämlich berechnen, wenn die Werte für  $H$  und  $\varrho$  vor und nach Durchgang durch die Schicht bekannt sind bei bekannter Schichtdicke. Das Luftäquivalent dieser letzteren ist bei unserem Versuch  $3,6 \text{ g/cm}^2$ . Nach Durchgang ist der Krümmungsradius  $55 < \varrho < 65 \text{ cm}$ . Durch Anwendung der üblichen Beziehung, die den Energieverlust mit der Masse verknüpft, erhält man einen Wert für  $\mu_0$ , der in zufriedenstellender Übereinstimmung steht mit dem genauen Wert, den man durch Betrachtung des elastischen Stoßes erhält.

*Paris, Ecole Polytechnique.*

*Bellevue, Laboratoire de l'Electro-aimant.*

---

<sup>1)</sup> S. H. Neddermeyer u. C. D. Anderson, Phys. Rev. **54**, I, 89, 1938. — <sup>2)</sup> D. R. Corson u. R. Brode, Phys. Rev. **53**, 10, 774, 1938. — <sup>3)</sup> Y. Nishina u. Mitarb., Phys. Rev. **52**, 1198, 1937; **55**, 585, 1939. — <sup>4)</sup> J. G. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **172**, 517, 951, 1939. — <sup>5)</sup> J. J. Street u. E. C. Stevenson, Phys. Rev. **52**, 1003, 1937. — <sup>6)</sup> E. J. Williams u. E. Pickup, Nature **141**, 684, 3572, 1938.



(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Chemie, Berlin-Dahlem.)

## Hat ein Caesium-Isotop langer Halbwertszeit existiert?

### Ein Beitrag zur Deutung ungewöhnlicher Linien in der Massenspektrographie\*).

Von J. Matthauch und H. Ewald, O. Hahn und F. Strassmann.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 4. September 1942.)

Im Sulfatrückstand aus dem geologisch alten Caesiummineral Pollucit hat Wahl massenspektrographisch die Linie 132 gefunden, die er als  $^{132}\text{Ba}$ , das Folgeprodukt eines  $\beta^-$ -aktiven, jetzt ausgestorbenen  $^{132}\text{Cs}$ , deutet. Zur Überprüfung seiner Versuchsergebnisse wurde aus einem Pollucit gleicher Herkunft (30,77%  $\text{Cs}_2\text{O}$ ) das darin in kleiner Menge enthaltene Barium möglichst rein abgeschieden und massenspektrographisch untersucht. Es zeigte sich, daß dieses Barium dieselben Isotope mit der gleichen relativen Häufigkeit besitzt wie gewöhnliches Barium. Die Deutung der von Wahl beobachteten Linie 132 als  $^{132}\text{Ba}$  ist demnach nicht haltbar. Dabei war unsere Methode empfindlich genug, um nachzuweisen, daß das mit dem Barium nur zum Teil mit abgeschiedene Strontium nicht die normale Isotopenverteilung zeigt; es war vielmehr zu etwa 80% aus dem  $\beta^-$ -aktiven Rubidium entstanden, das im Pollucit in viel geringerem Prozentsatz (1,60%  $\text{Rb}_2\text{O}$ ) enthalten ist als Caesium. — Die im Hochfrequenzfunken erzeugten Ionen ergaben eine Reihe bisher noch nicht beobachteter Linien und Liniengruppen. Es wird gezeigt, wie durch Messung der Intensitätsverteilung oder des Packungsanteiles eine einwandfreie Identifizierung dieser Linien vorgenommen werden kann. Z. B. trat bei Verwendung eines Kohlestiftes als Elektrode unter Umständen die Linienserie  $C_1, C_2, C_3$  bis  $C_{15}$  auf ( $C_{11}$  hat die Massenzahl 132); demnach fand im Funken eine Zerstäubung der Kohle bis zu molekularen Dimensionen herab statt. Wie ferner an Nickel, Xenon und anderen Elementen beobachtet wurde, können sehr stark auftretende Isotopenspektren sich mit geringer Intensität, aber gleicher Häufigkeitsverteilung bei den doppelten Massen wiederholen; die Ursache dafür sind Umladungen von doppelt geladenen auf einfach geladene Ionen im Raum zwischen den beiden Ablenkfeldern. Bei Anwesenheit von Natrium und Brom zeigten sich neben  $\text{NaBr}$  die Linien der chemisch ungewöhnlichen Verbindung  $\text{Na}_2\text{Br}$ . Weiter ergaben quantitative Intensitätsmessungen an den sich zum Teil überlagernden Gruppen für  $\text{BaO}$  und für  $\text{BaOH}$  den Beweis für die Richtigkeit der Deutung, sowie einen Hinweis für die Entstehung dieser zunächst fraglichen Linien. Schließlich konnten mehrere zum Teil nur in Spuren vorhandene Elemente leicht durch Messung des Dublett Abstandes ihrer Isotope mit Kohlenwasserstofflinien identifiziert werden.

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

*Einleitung.* In einer Arbeit über die „Radioaktivität des Caesiums“ ging Wahl<sup>1)</sup> von dem Gedanken aus, daß es möglicherweise auch beim Caesium ein ähnliches Isotop geben könnte wie bei den chemisch homologen Elementen Kalium und Rubidium. Diese besitzen bekanntlich die langlebigen Atomarten  $^{40}\text{K}$  (rel. Häufigkeit 0,012%, Halbwertszeit  $1,4 \cdot 10^9$  Jahre) und  $^{87}\text{Rb}$  (rel. Häufigkeit 27,2%, Halbwertszeit  $6,3 \cdot 10^{10}$  Jahre), die beide eine natürliche  $\beta$ -Aktivität aufweisen. Da das in der Natur vorkommende Caesium ein inaktives Reinelement der Massenzahl 133 ist, könnte es sich bei dieser vermuteten Analogie zu Kalium und Rubidium nur um ein bereits ausgestorbenes Isotop handeln. Ein solches Cs-Isotop würde sich dann durch die Anwesenheit seines Umwandlungsproduktes Barium in einem geologisch alten Caesiumvorkommen verraten.

Ähnlich wie dies bei der Festlegung des radioaktiven Rb-Isotops geschah, welche erstmalig durch die massenspektrographische Untersuchung einer Strontiumprobe gelang, die aus einem geologisch alten Rb-haltigen Glimmer isoliert worden war<sup>2)</sup>, ging nun Wahl hier vor und wählte als Ausgangsmaterial Pollucit, ein Aluminium-Caesiumsilikat, aus den vor einigen Jahren entdeckten und von Quensel genauer erforschten Pegmatiten von Varuträsk im nördlichen Schweden. Eine Analyse einer Probe dieses Pollucits ergab nach Quensel<sup>3)</sup> 30,77%  $\text{Cs}_2\text{O}$ ; er ist wahrscheinlich älter als 1000 Millionen Jahre. Während Wahl im Massenspektrum von gewöhnlichem Barium die Linien 138, 137, 136, 135 und 134 in der Reihenfolge der bekannten Häufigkeiten der Ba-Isotope findet ( $^{132}\text{Ba}$  und  $^{130}\text{Ba}$  mit je etwa 0,1% Häufigkeit sind zu selten, um von ihm nachgewiesen zu werden), zeigen seine massenspektrographischen Aufnahmen des in Schwefelsäure schwerlöslichen Sulfatrückstandes des Pollucits von Varuträsk neben einer starken Linie bei der Massenzahl 133 für  $^{133}\text{Cs}$  nur eine schwache Linie bei der Masse 132; die übrigen Ba-Linien treten nicht auf, nicht einmal die des häufigsten Isotops  $^{138}\text{Ba}$ , das im gewöhnlichen Barium mit etwa 72% beteiligt ist. Die Deutung dieser schwachen Linie als  $^{132}\text{Ba}$  unterstützt Wahl durch die Untersuchung seiner Proben aus dem Pollucit von Varuträsk im optischen Spektrographen, wo er neben der Cs-Linie bei 4555,56 Å auch die Ba-Linie bei 4554,04 Å nachweisen konnte.

Die massenspektrographischen Untersuchungen führte Wahl in einem Mattauch-Herzogschen Apparat in der gleichen Weise durch, wie sie

<sup>1)</sup> W. Wahl, C. Scient. Fenn., Comm. Phys.-Math. X, S. 18, 1940. —

<sup>2)</sup> O. Hahn, F. Strassmann u. E. Walling, Naturwissensch. 25, 189, 1937; J. Mattauch, ebenda 25, 189, 1937. — <sup>3)</sup> P. Quensel, Geol. Fören. Stockholm Förh. 60, 612, 1938.

seinerzeit bei der Untersuchung des  $\text{Sr}^{11}$ ) aus  $\text{Rb}$  und seither auch bei anderen Elementen<sup>2)</sup> im Anschluß an ältere Versuche von Bainbridge<sup>3)</sup> erprobt worden war, indem nämlich die zu untersuchenden Proben in kleine Löcher rund um die Kanalöffnung der Al-Kathodenkappe einer Gasentladungsröhre (Trägergas?) gefüllt wurde. Den Verdacht, daß es sich bei der schwachen Linie 132 um das häufigste Xenon-Isotop handeln könne, konnte Wahl ausschließen, da dann auch die beiden praktisch gleich häufigen Atomarten  $^{129}\text{X}$  und  $^{131}\text{X}$  hätten auftreten müssen, was nicht der Fall war. Wahl deutet demnach seinen Befund in der Weise, daß in früheren erdgeschichtlichen Perioden in den Pegmatitlösungen von Varuträsk neben dem stabilen  $^{133}\text{Cs}$  ein genügender Anteil eines radioaktiven und heute ausgestorbenen Isotops  $^{132}\text{Cs}$  vorhanden gewesen sein müsse, welches sich nach der Kristallisation des Pollucits durch  $\beta$ -Zerfall in das stabile  $^{132}\text{Ba}$  umgewandelt hat.

Die Versuche,  $^{132}\text{Cs}$  künstlich herzustellen, sind bisher ergebnislos verlaufen<sup>4)</sup>, obwohl es sich z. B. durch Bestrahlung von  $\text{Cs}$  mit schnellen Neutronen durch einen ( $n, 2n$ )-Prozeß bilden sollte; seine Halbwertszeit ist offenbar zu lang (oder zu kurz), um bei solchen Versuchen beobachtet werden zu können. Von dieser Seite spricht also nichts gegen den Wahlschen Befund, der, falls er sich bestätigen würde, von großem Interesse wäre; denn eine so weitgehende Analogie zwischen Hülle und Kern des Atoms (je ein sehr langlebiges  $\beta$ -aktives Isotop bei den chemisch homologen Elementen Kalium, Rubidium und Caesium), wie sie sonst bei keiner Kerneigenschaft beobachtet wurde, wäre recht auffallend. Als einziger weiterer Fall nach dem Kalium und Rubidium wurde allerdings die natürliche  $\beta$ -Aktivität des von den Alkalien verschiedenen Cassiopeiums entdeckt<sup>5)</sup>.

Da uns durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Prof. Quensel eine größere Probe des Pollucits von Varuträsk zur Verfügung stand, haben wir die Versuche von Wahl in etwas abgeänderter Weise wiederholt. Die Aufnahmen boten nun über das unmittelbare Ziel der Untersuchung hinaus massenspektrographisch manches Neue und zum Teil Unerwartete, weshalb im folgenden die Versuche eingehender beschrieben werden sollen.

<sup>1)</sup> J. Mattauch, l. c.; Naturwissensch. **25**, 170, 1937. — <sup>2)</sup> J. Mattauch u. V. Hauk, ebenda **25**, 763, 780, 1937; J. Mattauch u. H. Lichtblau, ZS. f. Phys. **111**, 514, 1939; H. Lichtblau, Naturwissensch. **27**, 260, 1939. — <sup>3)</sup> K. T. Bainbridge, Phys. Rev. **39**, 847, 1932; K. T. Bainbridge u. E. B. Jordan, ebenda **50**, 282, 1936. — <sup>4)</sup> D. C. Kalbfell u. R. A. Coolley, Phys. Rev. **58**, 91, 1940. — <sup>5)</sup> M. Heyden u. W. Wefelmeier, Naturwissensch. **26**, 612, 1938. Abgesehen ist hier natürlich von der Aktivität der aus Uran und Thor ihren Ausgang nehmenden Reihen und von der  $\alpha$ -Aktivität des Samariums, die in diesem Zusammenhang nicht erwähnt zu werden brauchen.

*A. Chemischer Teil.*

Für die Aufnahme im Massenspektrographen wurden zwei Bariumpräparate aus dem Pollucit von Varuträsk hergestellt.

1. Beim Pollucit handelt es sich um ein relativ leicht zersetzliches Silikat. Es wurden etwa 50 g des feingepulverten Minerals mit konzentrierter Schwefelsäure aufgeschlossen. Die beim Abrauchen entstehenden löslichen Sulfate wurden durch Auskochen der Aufschlußmasse mit Wasser extrahiert. Zur Lösung der Gesamtmenge des entstehenden, bei Zimmertemperatur schwer löslichen, bei 80—100° aber leicht löslichen Caesiumsalzes war eine so große Flüssigkeitsmenge erforderlich, daß die Löslichkeit des Bariumsulfats sich bei der Isolierung der unbekannten, aber sicher sehr kleinen Menge Bariumsulfat störend bemerkbar machen konnte. Daher wurde die Aufschlußmasse wiederholt mit kleinen Flüssigkeitsmengen ausgekocht, und zwar mit Ausnahme der ersten und letzten Extraktion stets mit der Mutterlauge der vorhergehenden Extraktion. Der unlösliche Rückstand enthielt die Kieselsäure und das Bariumsulfat, aber auch noch merkliche Mengen von Aluminium und auch Caesium; er wurde durch Abrauchen mit Flußsäure und Schwefelsäure von der Kieselsäure und anschließend auch von der Flußsäure befreit. Die zurückbleibenden löslichen Sulfate (Cs, Al) wurden in möglichst wenig Wasser gelöst und vom unlöslichen Rückstand abfiltriert. Das Filter wurde verascht und der geringe Rückstand, der hauptsächlich aus Bariumsulfat bestand, mit Soda aufgeschlossen und in der üblichen Weise auf Barium verarbeitet. Die Trennung von eventuell vorhandenem Strontium erfolgte durch Fällung des Bariums als Chromat. Der sehr geringe Niederschlag wurde in Salzsäure gelöst, mit Alkohol reduziert und vom Chrom befreit.

Da es wünschenswert erschien, für die Aufnahmen im Massenspektrographen wenigstens eine Menge von 10 bis 20 mg Substanz zur Verfügung zu haben, wurde die Lösung des Bariums mit einer entsprechend großen Menge von Strontium versetzt. Beide Erdalkalimetalle wurden als Carbonate gefällt und mit Jodwasserstoffsäure in die Jodide übergeführt.

2. Die mit diesem Präparat hergestellten Aufnahmen zeigten, daß zur Erzielung guter Spektrogramme bei sorgfältigem Arbeiten Mengen von größenordnungsmäßig 1 mg Substanz ausreichten. Es wurde deshalb aus einer neuen Verarbeitung ein zweites Präparat hergestellt, und zwar als Bromid, das nicht mit zugesetztem Strontium vermischt wurde, um dem möglichen Einwand zu begegnen, die kleine aus dem Pollucit abgeschiedene Menge Bariumsulfat sei durch eine im zugesetzten Strontium enthaltene Verunreinigung von gewöhnlichem Barium so stark überdeckt worden.

daß eine Isotopenverschiebung nicht mehr festgestellt werden konnte. Es wurden deshalb 50 g Pollucit direkt mit Flußsäure und Schwefelsäure aufgeschlossen. Der Rückstand wurde in der bereits beschriebenen Weise von löslichen Sulfaten befreit. Der geringe Rückstand von unlöslichen Sulfaten wurde mit Soda aufgeschlossen und mit Rücksicht auf die geringe Menge nur kurz gewaschen (Filter also nicht ganz natriumfrei). Die Carbonate wurden durch Bromwasserstoffsäure in die Bromide übergeführt. Eine Trennung des Bariums von eventuell vorhandenem Strontium nach der Chromatmethode erfolgte diesmal nicht. Infolge der Mischkristallbildung zwischen Bariumsulfat und Strontiumsulfat muß also etwa vorhandenes Strontium trotz der etwa 40mal größeren Löslichkeit seines Sulfats zum erheblichen Teil in dem Barium anwesend sein.

Alle zur Verarbeitung benutzten Reagenzien wurden in der angewandten Menge auf Abwesenheit von Barium geprüft.

### *B. Massenspektrographischer Teil.*

*Ionenerzeugung.* Die ersten Versuche, die massenspektrographische Untersuchung in altgewohnter Weise durch Aufbringung des Salzes auf die Kathode durchzuführen, verliefen negativ. Offenbar ist diese Methode gerade für die Untersuchung kleiner Substanzmengen recht ungeeignet, da die gewünschte Ionenart naturgemäß nur einen geringen Prozentsatz des gesamten Ionenstromes beträgt und daher lange Expositionszeiten erforderlich sind<sup>1)</sup>.

Es wurde vielmehr eine inzwischen fertiggestellte Funkenröhre nach Dempster<sup>2)</sup> (s. Fig. 1) verwendet<sup>3)</sup>. Die Ionen werden dabei zwischen den stiftförmigen Elektroden *S* in einem Hochfrequenzfunken erzeugt, der mit einem Teslatransformator betrieben wird. Sie werden dann mit einer Gleichspannung von etwa 25 kV durch die Blende *B* herausgezogen und gegen die gleiche Aluminiumkappe *K* beschleunigt, die auch bei Verwendung der Gasentladungsröhre als Kathode diente. Die Funkenröhre wurde durch einen Kurzschlußweg parallel zum Kanal von einer Öldiffusionspumpe Modell *P* evakuiert, die sonst bei Verwendung der Gasentladungsröhre bei geschlossenem Kurzschlußweg das Zwischenvakuum zwischen dem Kanal und dem eigentlichen Spektrographenspalt zu erzeugen hatte. Das Barium-

---

<sup>1)</sup> Bei der Untersuchung des aus Rubidium entstandenen Strontiums waren Expositionszeiten bis zu 1 Stunde benötigt worden. — <sup>2)</sup> A. J. Dempster. Proc. Amer. Phil. Soc. 75, 755, 1935; Rev. Scient. Instr. 7, 46, 1936. — <sup>3)</sup> Die Konstruktion der Funkenröhre ist in der Hauptsache von Herrn Dr. Klemm durchgeführt worden, wofür wir ihm auch an dieser Stelle bestens danken.



präparat wurde in eine kleine Höhlung der unteren Elektrode eingeschmolzen, die entweder aus Nickel oder aus Molybdän bestand.

Zunächst wurde, abweichend von Dempster, die Primärspule des Teslators mit ungedämpften Schwingungen gespeist, die mit Hilfe einer Senderöhre von 0,5 kW Nutzleistung erzeugt wurden. Damit konnte zwar an den Enden der Sekundärspule in Luft ein kräftiger Bogen erzeugt werden, der sich auf einige cm auseinander ziehen ließ; im Vakuum und hinter der Metallabschirmung mußten die Elektroden jedoch einander

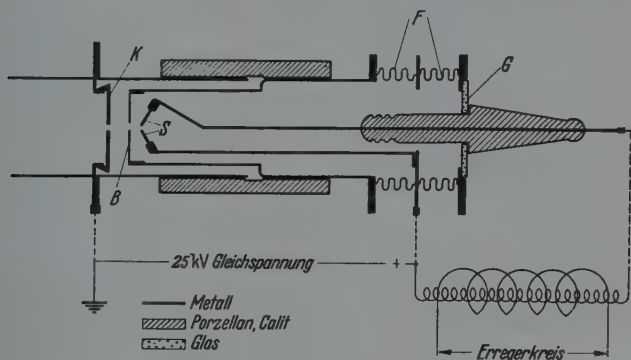


Fig. 1.

K: Aluminiumkathode, B: Messingblende 22 mm × 5 mm, S: Metallstifte (Elektroden), F: Federungskörper, G: Glasfenster.

auf weniger als 1 mm genähert werden, wobei es nur selten und mit Schwierigkeiten gelang, den Funken lange genug für eine Aufnahme aufrechtzuerhalten; denn die Elektroden verschweißten, auch bei Verwendung von Molybdän oder Wolfram, sehr bald miteinander und schlossen die Teslaspule kurz. Diesem Übelstand wurde vorerst dadurch abgeholfen, daß als obere Elektrode ein Kohlestift Verwendung fand. Neben der intensiv roten Strontiumfarbe bildete der Funke je nach dem Abstand der beiden Elektroden ein mehr oder weniger prächtiges Feuerwerk von herumspritzenden Kohleteilchen, die nach einiger Zeit die Innenteile der Röhre vollkommen verußten. Doch wurden damit eine Reihe recht brauchbarer, wenn auch sehr linienreicher Spektren erzielt; dabei fand das erste  $\text{BaJ}_2$ -Präparat aus Pollucit Verwendung, das ungefähr im Verhältnis 1 : 40 mit  $\text{SrJ}_2$  verdünnt war, nachdem zunächst die Vergleichsaufnahmen mit einem ähnlichen Gemisch mit gewöhnlichem  $\text{BaJ}_2$  gemacht worden waren.

Mancherlei Nachteile, die sich bei den Aufnahmen, verursacht durch die Verwendung eines Kohlestiftes als Elektrode, herausgestellt hatten,



bewogen uns, dem Beispiele Dempsters folgend, an Stelle des Senders zur Anregung des Teslatransformators in gewohnter Weise Induktor, Funkenstrecke und Leidener Flaschen zu verwenden<sup>1)</sup>. Da dabei nur bei jeder Unterbrechung des Induktors ein Stoß gedämpfter Schwingungen entsteht, wird bei hoher Spannung am Hochfrequenzfunken der Strom im Mittel so klein, daß keine Verschweißung der Elektroden mehr auftrat. Die damit gemachten Aufnahmen waren nun in jeder Hinsicht befriedigend. Zunächst wurde noch einmal das erste mit Strontium verdünnte Präparat untersucht und dann mit Aufnahmen des zweiten unverdünnten  $\text{BaBr}_2$ -Präparates die Untersuchung abgeschlossen. Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß beide Male unter möglichst identischen Bedingungen Vergleichsaufnahmen mit gewöhnlichem Bariumsalz vorangegangen waren.

*Diskussion der Aufnahmen. 1. Das erste Präparat. a) Ungedämpfte Schwingungen.* Die Spektren sowohl der einfach wie der doppelt geladenen Ba-Ionen zeigten einwandfrei, daß das Barium aus dem Pollucit dieselben Isotope mit der gleichen Intensitätsverteilung besitzt wie gewöhnliches Barium. Die Aufnahmen waren aber ungemein linienreich und, wegen der Gasabgabe aus dem Kohlestift, leicht verschleiert, wodurch sich stets eine Verschlechterung des Vakuums zu erkennen gibt.

Zunächst waren von  $^{12}\text{C}$  angefangen bis etwas über die  $\text{Ba}^{++}$ -Linien hinaus, zum Teil als Dubletts von den übrigen Linien getrennt, fast sämtliche Massenzahlen besetzt durch die Glieder der  $\text{C}_1$ -,  $\text{C}_2$ -,  $\text{C}_3$ -,  $\text{C}_4$ - und  $\text{C}_5$ -Gruppen, die bis  $\text{C}_5\text{H}_{12}$  auftraten. Auf manchen Aufnahmen, und zwar sowohl mit gewöhnlichem, wie mit Barium aus Pollucit war aber u. a. auch die Linie 132 mit wechselnder Intensität besetzt, und zwar deutlich stärker als dies dem seltenen Isotop  $^{132}\text{Ba}$  entsprechen würde. Z. B. war das auf der ersten Platte, die mit dem Präparat aus Pollucit gemacht wurde, auf den letzten beiden Aufnahmen der Fall, während auf den ersten vier Aufnahmen der gleichen Platte diese und andere Linien fehlten. Eine ins einzelne gehende Durchsicht der Platte ergab, daß zugleich mit 132 neben wenigen anderen die folgenden Linien neu aufgetreten waren oder sich durch Verstärkung vorhandener Linien bemerkbar machten, nämlich 72, 84, 96, 108 und 120. Gleichzeitig wurde bemerkt, daß auf diesen beiden Aufnahmen die Linien  $\text{C}$ ,  $\text{C}_2$ ,  $\text{C}_3$ ,  $\text{C}_4$  und  $\text{C}_5$  auf Kosten der Kohlenwasserstofflinien sehr verstärkt waren. Es war nun klar, daß es sich bei den obigen Linien um  $\text{C}_6$ ,  $\text{C}_7$ ,  $\text{C}_8$ ,

<sup>1)</sup> Für Rat und Hilfe bei der Verbesserung dieses Kreises möchten wir auch an dieser Stelle Herrn Prof. Rausch v. Traubenberg bestens danken.

$C_9$ ,  $C_{10}$  und  $C_{11}$  (132) handeln müsse. Sobald diese Deutung gefunden war, gelang es sofort bei den Massenzahlen 144, 168 und 180 als Fortsetzung dieser Serie recht schwach die Linien für  $C_{12}$ ,  $C_{14}$  und  $C_{15}$  aufzufinden. Das früher beschriebene Verspritzen der Kohle im Funken fand offenbar bis zu molekularen Dimensionen herab statt.

Nun ist unter 90,3 Kohlenstoffatomen im Durchschnitt stets eines vom Gewicht 13. Es muß daher jede Linie  $^{12}C_n$  von einer schwachen Linie  $^{12}C_{n-1}^{13}C$  im Verhältnis  $(90,3/n - 1):1$ , das mit wachsendem  $n$  abnimmt, begleitet sein. Tatsächlich wurde bei den Linien  $C_6$  bis  $C_{11}$  dieser Begleiter gefunden; bei  $C_6$ ,  $C_7$ ,  $C_{10}$  und  $C_{11}$  war er auch stark genug, so daß nach einer später noch zu beschreibenden Methode sein Intensitätsverhältnis zur Hauptlinie ausgemessen werden konnte. Es ergab sich bei:

	$C_6$	$C_7$	$C_{10}$	$C_{11}$
für das Verhältnis $\frac{^{12}C_n}{^{12}C_{n-1}^{13}C}$ {				
ber.: 14,0	11,9	8,3	7,2	
beob.: 10	8,8	7,7	7,15	

Dazu ist zu bemerken, daß, wie erwähnt, die Aufnahme stark verschleiert war, wodurch die Messungen an und für sich sehr erschwert waren und daß naturgemäß kleinere Intensitätsunterschiede genauer zu messen sind. In Anbetracht dessen ist es als genügende Bestätigung der obigen Deutung der Linienserie zu bewerten, daß der Gang mit  $n$  bei den Messungen deutlich herausgekommen ist.

Da Wahl mit einer Gasentladungsröhre arbeitete, kann die von ihm beobachtete Linie 132 nicht auf diese Weise gedeutet werden. Vielleicht kann aber die folgende Beobachtung einen Hinweis für ihre Deutung geben. Zu den intensivsten Linien zählten die des Nickels, da die untere Elektrode, die zur Aufnahme des Sr-Ba-Salzgemisches diente, aus einem Ni-Stift bestand. Außer bei den halben Massen, die den doppelt geladenen Ni-Ionen entsprechen, wiederholte sich das Ni-Spektrum noch einmal, diesmal sehr schwach, aber mit der gleichen Intensitätsverteilung, bei den doppelten Massen. Schon beim Arbeiten mit der Gasentladungsröhre war uns vor einiger Zeit bei Versuchen mit Xenon, das wie alle Edelgase sehr intensive Massenspektren ergibt, die interessante Tatsache aufgefallen, daß auf derselben Aufnahme das bekannte Bild der Xenon-Linien nicht nur bei den halben, drittel und viertel Massen verursacht durch  $X^{++}$ ,  $X^{+++}$ ,  $X^{++++}$ , sondern auch bei den doppelten Massen mit der gleichen Intensitätsverteilung auftrat. Natürlich kann es sich dabei nicht um Xenon-Moleküle handeln, da sich bei solchen wegen der verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten

zwischen den einzelnen Isotopen nicht nur die Intensitätsverteilungen stark ändern, sondern auch neue Linien auftreten müßten. Bei Molekülbildung müssen z. B. die beiden gleich häufigen Brom-Isotope neben den beiden gleich starken Molekül-Linien  $^{79}\text{Br}_2$  und  $^{81}\text{Br}_2$  auch die doppelt so starke Linie für  $^{79}\text{Br}^{81}\text{Br}$  aufweisen<sup>1)</sup>. Die Deutung ist vielmehr die, daß doppelt geladene Ionen im Zwischenstück zwischen elektrischem und magnetischem Ablenkfeld eine Ladung verlieren, und dadurch im Spektrum zur doppelten Masse kommen<sup>2)</sup>. Die gleichen Umladungen waren, durch verschlechtertes Vakuum begünstigt, offenbar auch bei den Ni-Ionen aufgetreten.

<sup>1)</sup> Das Element  $E$  habe  $n$  Isotope von den relativen Häufigkeiten  $H_1 : H_2 : \dots : H_n$  und den (in aufsteigender Folge geschriebenen) Massenzahlen  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; erfahrungsgemäß kann dann  $(A_{j+1} - A_j)$  nur die Werte 1 oder 2 haben (bis auf die beiden fehlenden Atomarten  $^{146}\text{Sm}$  und  $^{236}\text{U}$ ). Diese Isotope können  $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$  verschiedene zweiatomige Moleküle  $^{A_i}E^{A_k}E$  bilden, nämlich so viele wie die quadratische Form  $(H_1 \cdot ^{A_1}E + H_2 \cdot ^{A_2}E + \dots + H_n \cdot ^{A_n}E)^2$  verschiedene Glieder hat. Davon liefern diejenigen  $n$  Moleküle, für die  $i = k$  (z. B.  $= j$ ) ist, die also den quadratischen Gliedern  $H_j^2 \cdot ^{A_j}E_2$  entsprechen, zwar ein Spektrum bei den doppelten Massen; ihre Intensitätsverteilung gleicht aber nicht denen der Einzelatomarten, sondern ist durch  $H_1^2 : H_2^2 : \dots : H_n^2$  gegeben. Dazu kommen  $1 + 2 + \dots + (n-1) = n(n-1)/2$  weitere Moleküle für die  $i \neq k$  und die, entsprechend den doppelten Produkten, die relativen Häufigkeiten  $2 H_i H_k$  haben. Nicht alle unsymmetrischen Moleküle  $^{A_i}E^{A_k}E$  geben aber neue Linien, sondern es überlagert sich ein Teil davon, nämlich diejenigen, für die  $A_i + A_k = 2 A_j$  ist, den Linien für die symmetrischen Moleküle  $^{A_j}E_2$  und verändert deren Intensitätsverteilung. — Die Zahl der durch die unsymmetrischen Moleküle neu hinzukommenden Linien ist (bei gleichem  $n$ ) dann am kleinsten, nämlich gleich  $(n-1)$ , wenn die Linien im Spektrum der Atom-Ionen überall äquidistant liegen; d. h. wenn 1. überall  $(A_{j+1} - A_j) = 1$  (Beispiel: Titan) oder wenn 2. überall  $(A_{j+1} - A_j) = 2$  (Beispiel: Cer). Im ersten Falle besetzen bereits die symmetrischen Moleküle alle geraden Massenzahlen  $2 A_j$  von  $2 A_1$  bis  $2 A_n$ . Von den unsymmetrischen Molekülen, deren leichtestes die Massenzahl  $2 A_1 + 1$  und deren schwerstes die Massenzahl  $2 A_n - 1$  hat, besetzen diejenigen, die sich aus der Kombination zweier benachbarter Atomarten ergeben, alle ungeraden Massenzahlen zwischen diesen Grenzen, also insgesamt  $(n-1)$  bisher freie Plätze. Die restlichen Linien fallen zum Teil auf diese Plätze, zum Teil auf die der symmetrischen Moleküle. Der zweite Fall geht aus dem ersten einfach durch Verdoppelung der Massendispersion hervor. — Im allgemeinen hat das Spektrum der Atom-Ionen neben Massenzahlen, die einander im Abstände 1 folgen, noch  $l$  Lücken, für die also  $(A_{j+1} - A_j) = 2$  ist; erfahrungsgemäß kann  $l$  nur 1, 2, 3 oder 4 sein und die Lücken liegen stets (bis höchstens je zwei) an den Rändern des Spektrums. Wie man sich leicht überlegt, ist die Anzahl der im Molekülspektrum neu hinzukommenden Linien dann gleich  $n - 1 + l$ . Spezialisierung für  $l = 0$  liefert die oben behandelten titanähnlichen Spektren. — <sup>2)</sup> Siehe J. Mattauch u. H. Lichtblau, Phys. ZS. **40**, 16, 1939, Gleichung (1). Danach kommt das Ion auf der Platte zur  $n_0/n_1^2$ -fachen Masse, wenn es das elektrische Feld  $n_0$ -fach, das magnetische Feld  $n_1$ -fach geladen durchläuft.

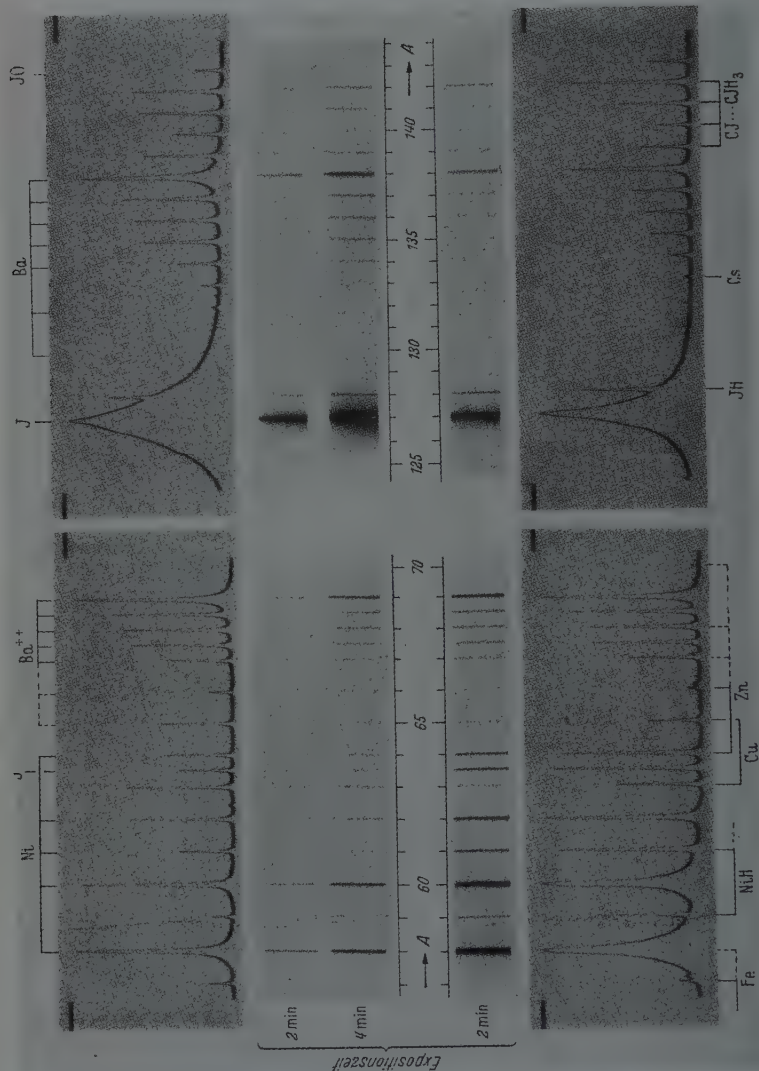
Diese Erscheinung war an Einzellinien ( $^{40}\text{A}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $^{127}\text{J}$  usw.), wenn sie sehr intensiv sind, bereits in Wien beobachtet und zuerst von Lichtblau<sup>1)</sup> gedeutet worden. Bei nicht gut abgeschirmtem Magnetfeld fallen sie nämlich nicht genau zur doppelten Masse und sind von den Moleküllinien getrennt. Die Wiederholung von Spektren mit mehreren Isotopen wurde damals noch nicht beobachtet. Auch sonst findet sich in der Literatur unseres Wissens kein Hinweis auf diese Erscheinung, wohl deshalb, weil im Mat-tauch-Herzogschen Apparat wegen des großen umspannten Massenbereichs die Chancen für die Beobachtung solcher Linien am besten sind. Bei der Deutung sehr schwacher Linien muß man aber auf solche Möglichkeiten Rücksicht nehmen. Z. B. wäre es denkbar, daß bei einer Kanalstrahlröhre, wie sie Wahl verwendet, dann, wenn die Entladung auf der Kathodenseite mit einem Messingteil in Berührung kommt, die Zink-Isotope sehr stark auftreten; dann könnten sich die Hauptlinien des Zinks durch die oben erwähnten Umladungen im Zwischenstück bei den doppelten Massen wiederholen und das zweithäufigste Isotop  $^{66}\text{Zn}$  käme zur Masse 132. Diese Deutung setzt voraus, daß mit fast der doppelten Intensität auch die Linie 128 ( $2 \cdot ^{64}\text{Zn}$ ) besetzt wäre, worüber jedoch nichts ausgesagt werden kann, da dieser Teil der Platte in dem von Wahl reproduzierten Abschnitt nicht mehr aufgenommen ist. Jedoch hätte in diesem Falle, allerdings mit geringerer Intensität, die Massenzahl 136 ( $2 \cdot ^{68}\text{Zn}$ ) erscheinen müssen, was nicht der Fall gewesen ist.

b) *Gedämpfte Schwingungen.* Mit einem Nickelstift als unterer und einem Wolframstift als oberer Elektrode wurde dann eine Reihe von Aufnahmen mit gewöhnlichem und mit  $\text{Ba J}_2$  aus Pollucit gemacht, die beide noch mit  $\text{Sr J}_2$  gemischt waren. Drei dieser Aufnahmen sind in Fig. 2 wiedergegeben. Der Vergleich beider Bariumpräparate zeigt, sowohl bei den einfachen wie den doppelt geladenen Ba-Ionen die gleiche charakteristische Intensitätsverteilung (s. Tabelle 1). Entsprechend seiner geringen Häufigkeit ist  $^{132}\text{Ba}$  kaum angedeutet. Eine nähere Diskussion der Aufnahmen von Fig. 2, die leicht und eindeutig durchzuführen ist, liefert ganz interessante Einzelheiten. Im Pollucitpräparat ist die Caesiumlinie zwar etwas stärker als im Vergleichspräparat; doch war der allergrößte Teil der überwiegenden Caesiummenge abgetrennt worden<sup>2)</sup>. Im Gegensatz

<sup>1)</sup> H. Lichtblau, Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Kl. IIa, 147, 101, 1938. — <sup>2)</sup> Bei Wahl blieb ein großer Teil des Caesiums in dem massenspektrographisch untersuchten Präparat und bildete den Hauptteil des Ionenstroms; die Bariummenge war dagegen zu klein, um auch nur die Hauptlinie des Bariums zu liefern, die Wahl bei den Vergleichsaufnahmen mit gewöhnlichem Barium erhalten hatte.

zum Barium variieren die Intensitäten der CJ bis  $CJH_3$  und JO-Linien naturgemäß auf allen Aufnahmen recht stark, da diese Intensitäten von den

Bariumjodid aus Pollueit von Varuträsk.



Gewöhnliches Bariumjodid.

Entladungsbedingungen abhängen. Ferner sind bei der Aufnahme mit gewöhnlichem Barium die Ni-Linien viel stärker, da hier der Funke offenbar intensiver brannte. Auch die doppelt geladenen Ionen ( $J^{++}$  und  $Ba^{++}$ ) sind



Tabelle 1. Relative Häufigkeiten in Prozent.

Element	2A:						127		130	132	134	135	136	137	138	
	A: 58	59	60	61	62	63	63,5	64	65	66	67	67,5	68	68,5	69	70
Ni <sup>1)</sup>	67,4		26,7	1,2	3,8			0,88								
NiH <sup>1)</sup>		67,4		26,7	1,2	3,8			0,88							
Cu <sup>2)</sup>						68			32							
Zn <sup>3)</sup>								50,9		27,3	3,9		17,4			0,5
J <sup>++4)</sup>							100									
Ba <sup>++5)</sup>									0,101	0,097	2,42	6,6	7,8	11,3	71,7	

gegenüber den einfach geladenen hier stärker vertreten. Gleichzeitig scheint infolge der vermehrten Gasabgabe auch die Hydridbildung (NiH und JH) begünstigt worden zu sein. Bei den Aufnahmen mit dem Präparat aus Pollucit sieht man dagegen, daß die Messingblende (B der Fig. 1) durch den Funken etwas stärker in Mitleidenschaft gezogen wurde, da die Kupfer- und Zinklinien stärker auftraten. Daß der Hauptteil der Intensität der Linie 66 dem <sup>66</sup>Zn und nicht etwa dem <sup>132</sup>Ba<sup>++</sup> zuzuschreiben ist, erkennt man vor allem daran, daß bei dieser Aufnahme die Linie 64 nach Ausweis der Photometerkurve intensiver ist als die Linie 61, was nur durch die Anwesenheit von Zn zu erklären ist (s. Tabelle 1). Durch <sup>68</sup>Zn ist auch die Linie für <sup>136</sup>Ba<sup>++</sup> sichtlich etwas verstärkt.

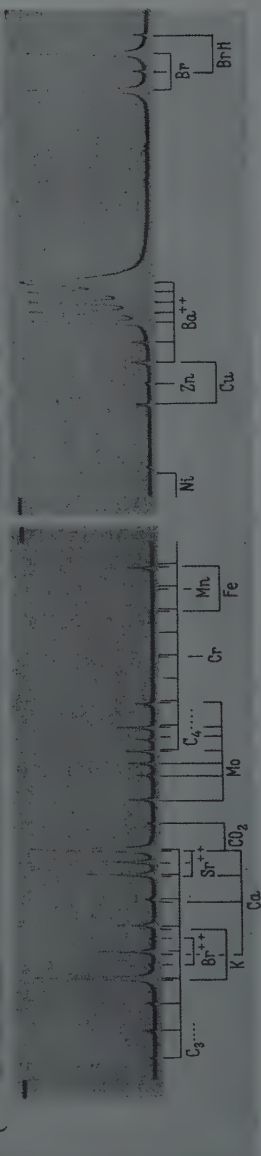
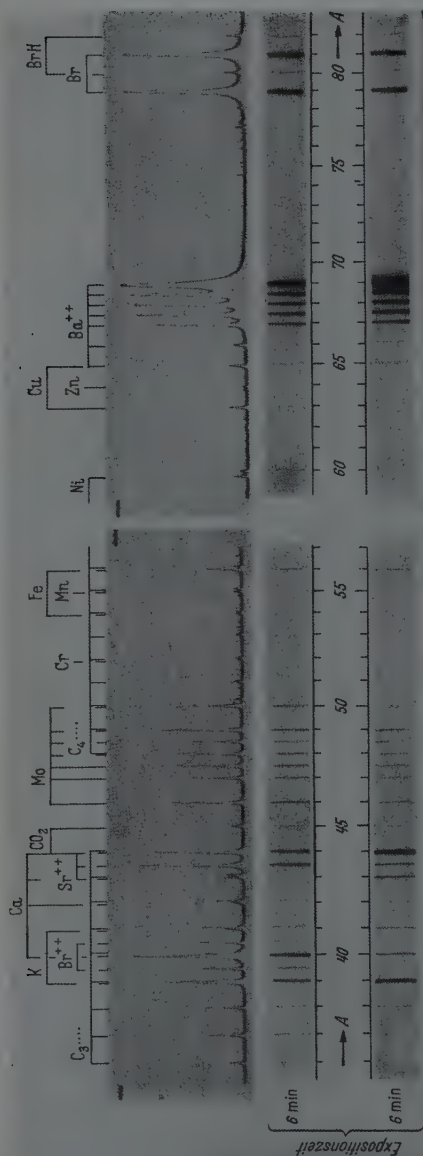
2. Das zweite Präparat. Auf allen bisherigen Aufnahmen waren die Strontiumlinien sehr viel stärker als die des Bariums. Wir hatten nun inzwischen gelernt, mit Mengen von nur 0,5 oder 1 mg bei den massenspektrographischen Aufnahmen auszukommen; das zweite Bariumpräparat aus Pollucit wurde deshalb ohne Zugabe von gewöhnlichem Strontium verwendet.

Um die Ba-Spektren beiderseits möglichst rein von fremden Linien zu bekommen, wurde diesmal das Bromid gewählt und als untere Elektrode, die zur Aufnahme des Präparates diente, ein Stift aus Molybdän, als obere einer aus Wolfram verwendet. Die damit gemachten Aufnahmen zeigen wieder eine Reihe zum Teil sehr interessanter Einzelheiten, die an Hand der Fig. 3 und 4 verfolgt werden können; diese beiden zusammengehörigen Figuren zeigen in vier Fortsetzungen Ausschnitte aus je einer Aufnahme mit gewöhnlichem BaBr<sub>2</sub> und solchem aus Pollucit. Auch bei dem Präparat aus Pollucit waren einige Aufnahmen intensiv genug, um sowohl bei den

<sup>1)</sup> G. E. Valley, Phys. Rev. 59, 836, 1941. — <sup>2)</sup> Aus dem chem. Atomgewicht berechnet. — <sup>3)</sup> A. O. Nier, Phys. Rev. 48, 283, 1935; 50, 1041, 1936. — <sup>4)</sup> A. O. Nier, ebenda 52, 933, 1937. — <sup>5)</sup> A. O. Nier, ebenda 54, 275, 1938.



Bariumbromid aus Pollucit von Varuträsk.



Gewöhnliches Bariumbromid.

Fig. 3.



einfach, wie bei den doppelt geladenen Ionen sogar die beiden mit nur je 0,1 % beteiligten Isotope  $^{130}\text{Ba}$  und  $^{132}\text{Ba}$  zu zeigen. Eine Isotopenreinheit oder auch nur eine Auszeichnung der Linie für  $^{132}\text{Ba}$  liegt aber nicht vor.

Die Abtrennung von Caesium war diesmal äußerst sorgfältig durchgeführt worden, denn es zeigt sich keine Spur einer Linie bei 133. Mit geringer Intensität wiederholt sich aber das Bariumspektrum für die fünf häufigen Isotope noch mehrmals, nämlich, zum Teil miteinander überlagert, um 16 bzw. 17 Masseneinheiten höher für  $\text{BaO}$  bzw.  $\text{BaOH}$ , ferner, etwas stärker um 79 und 81 Masseneinheiten höher für die beiden Gruppen von  $\text{BaBr}$ -Molekülen.

Es mag zunächst befremden, daß wir die Linie bei  $A = 155$  als  $^{138}\text{BaOH}$  deuten, daß also die schwachen Bariumoxyde Hydride gebildet haben sollen, während die viel intensiveren Ba-Ionen keine Spur von Hydridbildung zeigen; denn der Platz  $A = 139$  neben der starken Linie für  $^{138}\text{Ba}$  ist vollkommen linienfrei. Wir können diese Deutung aber quantitativ beweisen, wobei der Gedankengang der folgende ist: Soll die Linie 155 durch  $^{138}\text{BaOH}$  verursacht worden sein, dann müssen auch die übrigen Bariumoxyde im selben Maße von Hydriden begleitet sein, die sich den Linien 151 bis 154 überlagert haben. Die Intensitäten der OH-Verbindungen müssen den Häufigkeiten der Ba-Isotope, die man jeder Isotopentabelle entnehmen kann, proportional sein. Diese zieht man von der Liniengruppe 151 bis 155 ab, nachdem man sie mit einem geeigneten Faktor multipliziert hat, so daß die Linie 155 verschwindet. Die verbleibende Intensität der Gruppe 150 bis 154 ist nun die der Bariumoxyde, die, wenn die Deutung richtig ist, wieder den bekannten Häufigkeiten der Ba-Isotope proportional sein müssen.

Um die angedeutete Rechnung durchzuführen, müssen die gemessenen Schwärzungswerte oder Photometerausschläge in Intensitäten umgewandelt werden. Das geschieht graphisch nach einem Verfahren, das inzwischen beim Hafnium erprobt worden ist und über das noch ausführlich berichtet werden wird<sup>1</sup>). Das Prinzip ist dabei folgendes: Man verschafft sich mit Hilfe einer geeigneten Isotopengruppe, die auf der gleichen Aufnahme vorhanden ist, und deren Häufigkeiten anderweitig elektrometrisch gemessen sind, die Schwärzungskurve der Platte. Etwa im gleichen Schwärzungsbereich wie die zu vermessende Gruppe, lagen die  $\text{BaBr}$ -Linien, die wir daher zur Eichung benutzten. Sie reichen, sich zum Teil überlagernd, von  $A = 213$  ( $^{134}\text{Ba}^{79}\text{Br}$ ) bis  $A = 219$  ( $^{138}\text{Ba}^{81}\text{Br}$ ). Ihre Häufigkeiten errechnen sich

<sup>1</sup>) J. Mattauch u. H. Ewald, ZS. f. Phys., im Druck.

leicht aus den elektrometrischen Messungen der Ba-Isotope von Nier<sup>1)</sup> (s. auch 3. Zeile von Tabelle 2) und der Br-Isotope von Blewett<sup>2)</sup>, welche letztere mit einer für unsere Zwecke ausreichenden Genauigkeit im Verhältnis 1:1 stehen. Dann wurden die Photometerausschläge der BaBr-Linien als Ordinaten und die bekannten Häufigkeiten als Abszissen aufgetragen und die Punkte durch eine möglichst glatte Kurve verbunden. In diese Kurve geht man mit den Photometerausschlägen der zu vermessenden Liniengruppe 150 bis 155 hinein und liest an der Abszisse die Intensitätsverhältnisse ab. Die so erhaltenen Zahlen sind in Tabelle 2 in der zweiten Zeile eingetragen.

Tabelle 2.

Massenzahlen		150	151	152	153	154	155	
Intensitätsverhältnis von	Ba O + Ba OH	2,48 : 12,5 : 22,0 : 29,8 : 100 : 153						gemessen × 1,53
	Ba OH nach Nier <sup>1)</sup>	(3,37 : 9,2 : 10,9 : 15,8 : 100)						
	Ba O	3,26 : 9,7 : 10,5 : 17,3 : 100    0						Differenz

Man erkennt sofort, daß die gemessenen Intensitäten für  $A = 150$  bis  $A = 154$  nicht im Verhältnis der Ba-Isotope stehen, wie ein Vergleich mit der nächsten Zeile lehrt, die um eine Masseneinheit nach rechts verschoben die Nierschen Ba-Werte enthält. Diese Linien können daher nicht allein durch Bariumoxyd gebildet sein, sondern dieses muß durch andere überlagernde Linien verfälscht sein. Zieht man nun die mit 1,53 multiplizierten Zahlen der dritten Zeile von Tabelle 2 von denen der zweiten Zeile ab und normiert die verbleibende Intensität der Linie 154 wieder zu 100, so erhält man die Zahlen der letzten Zeile. Diese stimmen nun überraschend gut mit den Nierschen Bariumwerten überein, besonders wenn man bedenkt, daß nur eine Aufnahme vermessen wurde.

Damit ist unsere Deutung dieser Gruppe auch quantitativ erwiesen. Die Messung zeigt außerdem, indem man z. B.  $^{138}\text{BaOH}$  mit  $^{138}\text{BaO}$  vergleicht, daß auf jedes BaO-Molekül  $153/(100 - 1,53 \cdot 15,8) = 2,02$  BaOH-Moleküle kommen. Die Photometrierung von drei verschiedenen Aufnahmen ergab jedesmal ungefähr den Wert 2 für das Verhältnis von BaOH zu BaO. Dieser hohe Wert macht es wahrscheinlich, daß nicht Hydridbildung von BaO eingetreten war, sondern daß BaOH-Ionen primär vorhanden waren, von denen bereits im Hochfrequenzfunken etwa der

<sup>1)</sup> A. O. Nier, Phys. Rev. **54**, 275, 1938. — <sup>2)</sup> J. P. Blewett, ebenda **49**, 900, 1936.

dritte Teil in  $\text{BaO} + \text{H}$  dissoziierte. Dadurch wird auch das Fehlen der Hydride beim Barium selbst verständlich.

Bei den Aufnahmen mit dem Präparat aus Pollucit zeigten sich links vom Bariumspektrum bei den Massenzahlen  $A = 125$  und  $127$  zwei mittelstarke Linien (s. Fig. 4), die bei gewöhnlichem Barium nicht aufgetreten waren und deren Deutung sich nicht sofort aufdrängt. Aus der Tatsache, daß ihr Intensitätsverhältnis auf allen Aufnahmen konstant und sehr genau gleich 1 ist, folgt, daß sie etwas mit Brom zu tun haben müssen. Es ist ferner aus verschiedenen Gründen klar, daß diese Linien nichts mit Umladungen der Br-Ionen nach der früher beschriebenen Art im Zwischenstück zu tun haben können. Denn  $79/125$  läßt sich nicht auf die Form  $n_0/n_1^2$  bringen, so daß  $n_0$  und  $n_1$  kleine Zahlen bleiben. Das nächste dazu wäre  $10/4^2$ ; aber dann müßte der Abstand beider Linien mehr als drei Masseneinheiten betragen. Es muß sich daher um eine Bromverbindung handeln. Nach Abzug der Massenzahlen der Br-Isotope erhält man 46. Diese Linie war nicht merklich stärker als es der Intensität von  $^{92}\text{Mo}^{++}$  entsprach; es zeigte sich aber, daß die Linie 28 bei weitem die intensivste des ganzen Spektrums war und daß sogar die bisher von uns noch nicht beobachtete Linie 11,5 schwach sichtbar war. Es mußte demnach Natrium im Präparat vorhanden gewesen sein, das die Linien für  $^{23}\text{Na}$  und  $^{23}\text{Na}^{++}$  geliefert hatte. Nach dem Vorgang bei der Herstellung dieses Präparates war das auch vollkommen verständlich. Auch 28 Masseneinheiten oberhalb der Br-Linien wurden jetzt die schwachen NaBr-Linien gefunden, so daß für die fraglichen Linien bei 125 und 127 nur die Deutung  $\text{Na}_2\text{Br}$  möglich ist.

Es ist bekannt, daß im Kanalstrahl die chemisch unmöglichsten Moleküle vorkommen; denn erstens handelt es sich um Ionen und zweitens brauchen die Verbindungen nur etwa  $10^{-5}$  sec existenzfähig zu sein. Einen Grund dafür, daß in vorliegenden Falle  $\text{Na}_2\text{Br}$  stärker vertreten war als NaBr, können wir nicht angeben. Es zeigt sich aber, wie nützlich es für die Deutung solch ausgefallener Linien ist, daß die gleiche Aufnahme von der Massenzahl 11,5 ( $^{23}\text{Na}^{++}$ ) bis über 219 ( $^{138}\text{Ba}^{81}\text{Br}$ ) reicht.

In den meisten Fällen kommt man bei der Deutung ungewöhnlicher oder unerwarteter Linien mit ähnlichen Überlegungen aus, wie wir sie eben beim  $\text{Na}_2\text{Br}$  benutzten, oder unter Heranziehung der bekannten relativen Häufigkeiten durch Messung der Linienintensitäten, die uns zur Bestätigung der Identifikation der durch die Kohleteilchen verursachten Linienreihe C,  $\text{C}_2 \dots \text{C}_{15}$ , der Zn-Isotope auf Fig. 2 oder der  $\text{BaO} + \text{BaOH}$ -Gruppen auf Fig. 4 verhalfen. Aber auch die bekannten oder aus der Packungsanteilkurve geschätzten Massendefekte leisten für diesen Zweck oft gute Dienste. Dafür

bietet der in Fig. 3 links oben reproduzierte Teil der Aufnahme mit dem Präparat aus Pollucit eine Reihe von Beispielen. Einerseits zeigen sich hier vom Öldampf der Pumpen herrührend die zum Teil sehr schwachen Kohlenwasserstofflinien der  $C_3$ - und  $C_4$ -Gruppen; andererseits treten von Verunreinigungen stammend, die zum Teil nur spurenweise im Präparat oder dem Elektrodenmaterial vorhanden waren, die Linien der Hauptisotope von Kalium, Calcium, Strontium (doppelt geladen), Chrom, Mangan und Eisen auf. Die Ausmessung dieser Aufnahme ergab für die Massendifferenzen  $\Delta M$  der betreffenden Dubletts die in Tabelle 3 in der ersten Spalte in tausendstel Masseneinheiten (TME) angegebenen Werte, während die folgende Spalte die bekannten oder aus der Packungsanteilkurve geschätzten Werte<sup>1)</sup> enthält. Die Übereinstimmung, die bei Einzelmessungen natürlich nicht besser als zu etwa 5 bis 10% zu erwarten ist, gibt hier die Bestätigung für die Deutung dieser Linien.

Tabelle 3.

Dublett	$\Delta M$ in TME		Dublett	$M$ in TME	
	beob.	berechnet <sup>2)</sup>		beob.	berechnet <sup>2)</sup>
( $C_3H_3 - ^{39}K$ )	57,8	$59,8 \pm 1,7$	( $C_4H_4 - ^{52}Cr$ )	84,7	$89,1 \pm 1,0$
( $C_3H_4 - ^{40}Ca$ )	74,9	69,0 geschätzt	( $C_4H_6 - ^{54}Fe$ )	96,5	$103,7 \pm 2,5$
( $C_3H_5 - ^{41}K$ )	77,0	79,3 oder 77,8	( $C_4H_7 - ^{55}Mn$ )	115,1	112,5 geschätzt
( $C_3H_6 - ^{42}Ca$ )	82,1	86,4 geschätzt	( $C_4H_8 - ^{56}Fe$ )	121,0	$123,5 \pm 1,7$

Der interessanteste Befund war aber folgender. Beide Aufnahmeserien zeigen neben Barium in viel geringerer Intensität auch die Strontiumlinien (s. Fig. 3 und 4). Für Strontium hatten die Messungen von Nier <sup>3)</sup> ergeben:

Massenzahlen .....	84	86	87	88
Prozentuelle Häufigkeiten .....	0,56	9,86	7,02	82,56

An den Aufnahmen mit gewöhnlichem Barium sieht man qualitativ, daß die Sr-Linien in diesen Intensitäten auftreten. Man bemerkt deutlich (siehe die Photometerkurve von Fig. 4) die etwas größere Beteiligung von  $^{86}Sr$  gegenüber  $^{87}Sr$  und die überragende Häufigkeit von  $^{88}Sr$ . Ganz anders ist das Bild bei den Aufnahmen mit dem Pollucit-Präparat. Hier ist die Linie 87 bei weitem die stärkste. Das kann nicht von  $^{87}Rb$  herrühren, da das 2,68mal so häufige  $^{85}Rb$  vollständig fehlt. Es kann aber auch nicht durch Überlagerung einer hypothetischen Verbindung verursacht sein, wie

<sup>1)</sup> Siehe z. B. J. Mattauch u. S. Flügge, Kernphysikalische Tabellen. Berlin, Springer, 1942. — <sup>2)</sup> J. Mattauch u. S. Flügge, l. c. — <sup>3)</sup> A. O. Nier, Phys. Rev. **54**, 275, 1938.



man auf Fig. 8 an den Linien der doppelt geladenen Ionen erkennt. Hier sieht man bei  $\lambda = 48$  neben  $C_3H_7$  deutlich als Dublettlinie  $^{86}Sr^{++}$  getrennt. Während auf den Aufnahmen mit gewöhnlichem Barium die halbzahlige Linie  $^{87}Sr^{++}$  merklich schwächer ist als diese, ist sie beim Pollucit-Präparat wieder bedeutend stärker; ja sie ist sogar noch stärker als die Linie 44, obwohl hier  $^{88}Sr^{++}$  durch die fast immer vorhandene und davon nicht getrennte Linie für  $CO_2$  stark verfälscht ist. Im Pollucit-Präparat ist also tatsächlich  $^{87}Sr$  das weitaus häufigste der Sr-Isotope!

Dieser Befund spricht eigentlich für sich selbst. Im Pollucit von Varuträsk waren nämlich von Quensel<sup>1)</sup> bei der Mineralanalyse neben 30,77%  $Cs_2O$  auch 1,60%  $Rb_2O$  gefunden worden. Es war demnach unsere chemische Präparation so sauber, daß sich im Massenspektrogramm das aus dem Rubidium durch  $\beta$ -Zerfall entstandene Strontium markiert hat. Dieser Nachweis war um so überraschender, als er zunächst gar nicht beabsichtigt gewesen war und tatsächlich auch erst einige Tage nach Fertigstellung der Aufnahmen bei einer genaueren Durchsicht derselben gefunden wurde. Wenn es aber möglich war, das aus der geringen Rubidiummenge gebildete Strontium nachzuweisen, dann hätte sich wohl erst recht das Folgeprodukt des im Ausgangsmaterial häufigeren Caesiums finden lassen müssen. Die Deutung der von Wahl gefundenen Linie 132 als  $^{132}Ba$  kann daher nicht zutreffend sein.

Bei den Untersuchungen des ersten Präparates konnte sich eine Isotopenverschiebung beim Strontium natürlich nicht bemerkbar machen; denn bei seiner Herstellung war das im Mineral enthaltene Strontium vom Barium chemisch abgetrennt worden, bevor die Verdünnung mit gewöhnlichem Strontium erfolgte.

Um die Deutung des Strontiumbefundes zu erhärten, wurden nach der schon beschriebenen Methode die Intensitäten der Sr-Linien ausgemessen. Die Linie  $^{88}Sr$  oder auch  $^{86}Sr$  gibt dann ein Maß für den Betrag an gewöhnlichem Strontium, während  $^{87}Sr$  sich zusammensetzt aus der bekannten Beteiligung dieser Atomart im gewöhnlichen Strontium plus der aus Rubidium entstandenen Strontiummenge. Bezeichnen wir die letztere mit  $^{87}Sr^*$ , die Menge von gewöhnlichem Strontium mit  $Sr$  und die seiner Isotope in der üblichen Weise, dann gibt das Linienvverhältnis  $87/88$  das Verhältnis  $(^{87}Sr^* + ^{87}Sr)/^{88}Sr$  an. Nach Abzug des bekannten Verhältnisses  $^{87}Sr/^{88}Sr$  und Multiplikation mit der prozentualen Beteiligung  $^{88}Sr/Sr$  erhält man das Verhältnis  $^{87}Sr^*/Sr$ . Daraus ergibt sich dann leicht

<sup>1)</sup> P. Quensel, l. c.

$^{87}\text{Sr}^*/(^{87}\text{Sr}^* + \text{Sr})$ , die prozentuelle Beteiligung des aus Rubidium entstandenen Strontiums am gesamten im Pollucit-Präparat enthaltenen Strontium. Dafür erhielten wir durch Ausmessung des Linienpaares 87/88, für die vier Aufnahmen brauchbar waren, im Mittel 77%. Dieser Wert wird gestützt durch Messungen des Linienverhältnisses 87/86, wozu zwei Aufnahmen zur Verfügung standen, und des Verhältnisses 48/43,5 bei den doppelt geladenen Ionen, die nur auf einer Aufnahme möglich war und die 79 bzw. 82% ergaben. In Anbetracht des Umstandes, daß es recht schwierig ist, stark verschiedene Linienintensitäten miteinander zu vergleichen, was in diesem Falle notwendig war, ist diese Übereinstimmung eine befriedigende zu nennen. Wir können also sagen, daß sich rund 80% der im Pollucit von Varuträsk vorhandenen Strontiummenge aus seinem Rubidiumgehalt gebildet hatte. Ist nun noch das Verhältnis  $\text{Rb}/\text{Sr}$  bekannt, dann läßt sich mit Hilfe der Halbwertszeit des  $^{87}\text{Rb}$  das geologische Alter des Pollucits berechnen.

Zum Schluß möchten wir Fräulein H. Scheld bestens danken, deren Eifer zum nicht geringen Teil das gute Gelingen der massenspektrographischen Aufnahmen zuzuschreiben ist.

---

## **Zum Nachweis von Interferenzerscheinungen durch Streuteilchen im Interferenzfeld \*).**

Von E. Mollwo in Göttingen.

Mit 7 Abbildungen. (Eingegangen am 21. September 1942.)

Interferenzen gleicher Dicke an dünnen, durchsichtigen, aufgedampften Kristallschichten werden durch Streuung an den Inhomogenitäten der Schichtoberfläche sichtbar gemacht. Eine keilförmig auf einen Silberspiegel aufgedampfte LiF-Schicht zeigt bei streifender Beleuchtung mit dem Licht einer Hg-Lampe ortsfest für beliebige Blickrichtung scharfe, helle Interferenzlinien auf dunklem Grunde.

*Vorbemerkung.* In mehreren Arbeiten des hiesigen Instituts sind optische Konstanten verschiedener Stoffe an dünnen, durchsichtigen, aufgedampften Schichten untersucht worden. Die Bestimmung der Schichtdicke geschah dabei mit Hilfe Newtonscher Interferenzstreifen im reflektierten Licht, also Interferenzen gleicher Dicke in der üblichen Beobachtungsart. In ganz anderem Zusammenhang ergab sich kürzlich eine andere Beobachtungsmöglichkeit für Interferenzen gleicher Dicke an aufgedampften Schichten. Da sie für manche Zwecke gewisse Vorteile zu bieten scheint, soll anschließend darüber berichtet werden.

1. Zum Nachweis von Interferenzen beliebiger Art muß man irgendwelche Empfänger, die die Energie des Wellenfeldes in andere Energieformen verwandeln können, in das Überschneidungsgebiet der interferenzfähigen Wellen oder in eine Abbildung dieses Gebietes hineinbringen. In der Optik verwendet man als Empfänger meist die Stäbchen oder Zäpfchen unserer Augennetzhaut, die Körner einer photographisch empfindlichen Schicht, oder auch die Auffangfläche einer Thermosäule oder Photozelle. Oft jedoch setzt man an die Stelle dieser direkten Empfänger als „Zwischenempfänger“ Streukörper. Sie gestatten, durch ihre Sekundärstrahlung die im allgemeinen sonst nur aus einer Richtung mögliche Abbildung aus beliebig vielen Richtungen vorzunehmen. Dabei gelangt man je nach Art des benutzten Streukörpers zu einem mehr oder weniger guten Bild des Interferenzfeldes. Projektionsschirme oder Mattscheiben liefern mit ihren recht groben Streuteilchen ein in vielen Fällen ausreichendes Bild, doch vermögen sie nicht alle Einzelheiten, z. B. den Polarisationszustand, richtig wiederzugeben. Zudem sind sie für manche Interferenzversuche, z. B. stehende

---

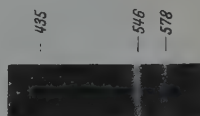
\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

Lichtwellen, wegen ihrer Abschirmwirkung unbrauchbar. In dieser Hinsicht einwandfrei sind fein verteilte, gegenüber der Lichtwellenlänge möglichst kleine Streukörper, wie sie z. B. Wood<sup>1)</sup> und später besonders Selenyi<sup>2)</sup> sowie Leistner<sup>3)</sup> und Schult<sup>4)</sup> bei ihren Interferenzversuchen angewendet haben<sup>5)</sup>.

Ganz ähnlich, besonders den Woodschen Versuchen, benutzt auch der Versuch, über den ich im folgenden berichten will, sehr kleine Streuteilchen zum Nachweis einer Interferenzerscheinung.

2. Auf einer beliebigen, zuvor sorgfältig gereinigten Glasplatte wird durch Verdampfen im Hochvakuum ein möglichst gut reflektierender Silber Spiegel hergestellt. Auf diesen Spiegel wird ebenfalls durch Verdampfen im Hochvakuum eine dünne LiF-Schicht niedergeschlagen. Die Dicke dieser

Fig. 1. Ein mit einer keilförmigen LiF-Schicht überzogener Silber Spiegel zeigt streifend mit dem Licht einer Hg-Lampe beleuchtet für beliebige Blickrichtung die einzelnen Linien des Hg-Spektrums. Der Spiegel kann als roher Spektralapparat dienen. Spektrum erster Ordnung mit Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene (Glan-Thompson-Prisma), Lichteinfall parallel der Keilkante.



LiF-Schicht steigt keilförmig an, was man technisch nach Belieben durch einfaches Schrägstellen der Glasplatte gegenüber dem Dampfstrahl erreicht. Diese LiF-Keilschicht wird streifend, parallel der Keilkante mit dem Licht einer Hg-Lampe beleuchtet. Dann sieht man auf der vollkommen dunklen Oberfläche der Schicht helleuchtend und deutlich voneinander getrennt die einzelnen Linien des Hg-Spektrums. Dabei ist das der Keilkante am nächsten liegende Spektrum, sowie das dritte, fünfte usw. am hellsten bei senkrechter Aufsicht auf die Schicht, das zweite, vierte, sechste usw. dagegen bei streifender Beobachtung senkrecht zur Richtung des einfallenden Lichts<sup>6)</sup>. Das gestreute Licht ist polarisiert. Die Schwingungsrichtung des elek-

<sup>1)</sup> R. W. Wood, Phil. Mag. 7, 385, 1904. Abgedruckt in Physical Optics, 2. Auflage, S. 172. — <sup>2)</sup> P. Selenyi, Ann. d. Phys. 35, 444, 1911. — <sup>3)</sup> K. Leistner, Ann. d. Phys. 74, 325, 1924; K. Leistner u. W. Möbius, ebenda 74, 700, 1924. — <sup>4)</sup> E. Schult, Ann. d. Phys. 82, 1025, 1927. — <sup>5)</sup> Nicht in diesen Zusammenhang gehören die sogenannten Queteletschen oder Newtonschen Staubringe. Bei ihnen liegen die Streukörper nicht als „Zwischenempfänger“ in einem Interferenzfeld, sondern sie erzeugen dieses erst durch ihre Sekundärstrahlung, eine Erscheinung, die neben anderen natürlich leicht den Nachweis eines ursprünglich vorhandenen Interferenzfeldes stören kann (vgl. dazu die Arbeit von P. Selenyi und die folgende Anmerkung). — <sup>6)</sup> Etwa vom fünften Spektrum an zeigen die Interferenzlinien zusätzlich beim Wechsel der Blickrichtung auffallende Helligkeitsschwankungen, ohne dabei ihre Lage zu ändern (Glanzwinkel). Diese Änderung der Strahlungsverteilung kommt durch Interferenz des direkten und einmal gespiegelten Streulichtes zustande (Selenyis Interferenzen).

trischen Vektors liegt beim ersten, dritten, fünften usw. Spektrum parallel der Oberfläche des Silberspiegels, senkrecht zur Einfallsebene. Beim zweiten, vierten, sechsten usw. dagegen liegt sie in der Einfallsebene, und zwar senkrecht auf der Spiegeloberfläche. Genauer betrachtet handelt es sich beim zweiten, vierten, sechsten usw. Spektrum nicht um eine lineare, sondern um eine elliptische Schwingung in der Einfallsebene, wobei die große Achse senkrecht auf der Spiegeloberfläche steht. Beleuchtet man mit polarisiertem Licht, dessen elektrischer Vektor parallel der Spiegeloberfläche schwingt, so erscheint nur das erste, dritte, fünfte usw. Spektrum, die anderen fehlen vollständig. Das umgekehrte gilt, wenn der elektrische Vektor des einfallenden Lichts senkrecht zur Spiegeloberfläche steht.

3. Zum Verständnis dieser Erscheinung hat man folgendes zu beachten. Jede durch Verdampfung und Kondensation hergestellte Schicht besitzt eine mehr oder minder raue Oberfläche nach Art des Reifs. Nach den Untersuchungen von de Boer<sup>1)</sup> und Bauer<sup>2)</sup>, sowie zahlreichen neueren elektronenoptischen Arbeiten haben auch optisch gut spiegelnde, im Hochvakuum aufgedampfte dünne Schichten keineswegs eine „glatte“ Oberfläche. Die Unebenheiten, Risse und Spalten sind in diesen Fällen nur sehr klein, verglichen mit der Lichtwellenlänge, und bilden eine äußerst dünne Grenzschicht auf einer relativ kompakten Unterlage des verdampften Stoffes. Sie liegen aber, insbesondere bei streifendem Lichteinfall, unterhalb der reflektierenden Grenzfläche. Dort können sie als sehr kleine Streukörper wirken. Ihre Größe ist im übrigen von Stoff zu Stoff recht verschieden. Unter den durchsichtigen, leicht aufdampfbaren Stoffen hat LiF den Vorteil, sehr kleine Streuteilchen zu liefern, im ultravioletten Spektralgebiet weit durchlässig und außerdem nicht wasserlöslich zu sein<sup>3)</sup>.

In Fig. 2a ist ein der Keilkante paralleler Schnitt durch die LiF-Schicht mit dem Verlauf einiger „Lichtstrahlen“, also Wellennormalen, gezeichnet. Das von links streifend einfallende Lichtbündel wird nahezu unter dem Winkel der Totalreflexion in die LiF-Schicht hinein gebrochen. An dem untenliegenden Silberspiegel fast 100%ig reflektiert, trifft es wieder beinahe unter dem Winkel der Totalreflexion auf die Schichtoberfläche. Dort tritt ein geringer Bruchteil aus (nicht gezeichnet), größtenteils wird es weiter reflektiert, genau wie bei der Lummer-Gehrke-Platte speziell in der von Lau

<sup>1)</sup> J. H. de Boer, ZS. f. phys. Chem. **21**, 198, 1933. — <sup>2)</sup> G. Bauer, Ann. d. Phys. **19**, 434, 1934. — <sup>3)</sup> Man kann z. B. die LiF-Keilschicht leicht anhauen und sieht dann, wie sich die Interferenzstreifen wegen der vergrößerten Schichtdicke zur Keilkante verschieben und nach dem Trocknen wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehren.

angegebenen Ausführung mit Versilberung auf der einen Seite<sup>1)</sup>. Mit den gezeichneten Strahlen wird also der Punkt 3b direkt unter der spiegelnden Oberfläche getroffen erstens von nur gebrochenem Licht, zweitens von Licht, das außerdem mindestens einmal am Silber und einmal an Luft reflektiert wurde. Der Punkt 3a erhält nur gespiegeltes Licht, und zwar erstens solches, das einmal an Silber, und zweitens solches, das zusätzlich noch mindestens einmal am Silber und einmal an Luft reflektiert wurde. Tatsächlich haben wir es aber nicht nur mit den gezeichneten Strahlen zu tun, sondern mit beliebig vielen, so daß jeder Punkt unter der spiegelnden Oberfläche sowohl den Fall 3a als auch 3b gleichzeitig enthält. Die

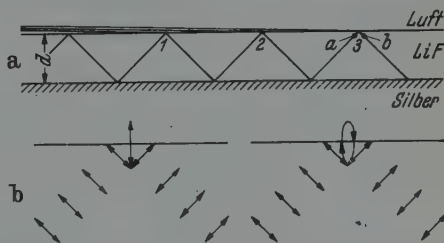


Fig. 2. Zur Entstehung der Interferenzerscheinung.

Schwingung des in der Einfallsebene liegenden elektrischen Vektors innerhalb der Schicht ergibt sich also durch Überlagerung der beiden Vektorstellungen vor und nach der Reflexion. Bei gleicher Größe der Einzelvektoren und Phasendifferenz 0 ist sie also senkrecht auf der Spiegeloberfläche (Fig. 2b).

Beim Auftreten eines kleinen Phasensprunges bei der Reflexion an Luft, wie er bei Grenzschichten zu erwarten ist<sup>2)</sup>, wird die Schwingung vor der Reflexion gegenüber derjenigen nach der Reflexion etwas phasenverschoben, so daß eine in der Einfallsebene liegende elliptische Schwingung resultiert. Die Schwingung des senkrecht zur Einfallsebene liegenden Vektors bleibt natürlich stets sich selbst parallel und linear, auch wenn ein Phasensprung auftreten würde.

Das innerhalb der Schicht reflektierte Licht hat verschiedene Wege durchlaufen, die sich durch ihre Länge und die Anzahl der Reflexionen an Silber oder Luft unterscheiden. Alle bei 3a und 3b zusammentreffenden Strahlen unterscheiden sich um einen konstanten Gangunterschied, der sich zusammensetzt aus dem durch die Schichtdicke bestimmten reinen Wegunterschied und dem durch die Reflexion an Silber und Luft gegebenen Phasensprung multipliziert mit  $\lambda/2\pi$ . Macht man diesen konstanten Gangunterschied durch Änderung der Schichtdicke  $d$  gleich der Wellenlänge des einfallenden Lichts oder ihrem ganzzahligen Vielfachen, so treffen bei 3 nur solche Wellenzüge zusammen, deren Gangunterschiede ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge sind. Es überlagern sich dort

<sup>1)</sup> E. Lau, ZS. f. Instrkde. 49, 57, 1929. — <sup>2)</sup> G. Bauer, l. c.



aber nicht nur die gezeichneten, sondern unendlich viele Wellen, die sich in der Phase um  $2\pi$  und in der Amplitude um einen konstanten Faktor, gegeben durch den Reflexionskoeffizienten bei der Spiegelung am Silber und an Luft in der Nähe der Totalreflexion, unterscheiden. Da dieser Faktor nur wenig von 1 verschieden ist, erhält man auch bei geringen Gangunterschieden zwischen den einzelnen Wegen scharfe Interferenzstreifen (vgl. Abschn. 4). Während nun der senkrecht zur Einfallsebene schwingende Vektor unabhängig vom Einfallswinkel bei der Reflexion an Luft unterhalb des Winkels der Totalreflexion keinen Phasensprung, und bei Reflexion am Silber einen solchen um  $\pi$  macht, findet man für den in der Einfallsebene schwingenden Vektor je nach Einfallswinkel verschiedene Phasensprünge. Diese verschwinden im Idealfall bei der Reflexion an Luft für Winkel zwischen Polarisations- und Totalreflexionswinkel<sup>1)</sup> (bei Grenzschichten können kleine Phasensprünge auftreten. Vgl. Kleindruck von S. 621). Bei der Reflexion an Silber treten sie aber stets in beträchtlicher Größe auf. In unserem Beispiel beträgt der Einfallswinkel auf den Silberspiegel etwa  $45^\circ$  und der Phasensprung (genauer die Summe der Phasensprünge an Luft und Silber) nahezu  $\pi/2$ . Der Gangunterschied  $\lambda$  für die in einem Punkt direkt unter der Schichtoberfläche zusammentreffenden Wellenzüge wird also für den senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Vektor bei einer anderen Schichtdicke  $d$  erreicht, als für den parallel der Einfallsebene schwingenden. In der keilförmig aufgedampften LiF-Schicht liegen die Schichten verschiedener Dicke nebeneinander. Direkt unter der spiegelnden Schichtoberfläche befinden sich die oben erwähnten Streuteilchen. Sie leuchten nur an denjenigen Stellen auf, an denen die Gangunterschiede ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge sind.

Im *reflektierten* Licht sieht man, natürlich perspektivisch stark verzerrt, die im Streulicht hellen Linien dunkel auf hellem Grund. Man sieht dann aber nicht etwa die Streuteilchen, sondern eine Interferenzerscheinung, die durch Strahlenpaare erzeugt wird, von denen die eine Hälfte teils einmal, teils zweimal usw. am Silberspiegel reflektiert wurde, die andere aber einmal in Luft an der Oberfläche der Schicht. Ihre räumliche Lage (Schnittpunkt der kohärenten Strahlen) fällt zwar nahezu mit der für die Streuteilchen maßgebenden Interferenzerscheinung zusammen, ist aber komplementär zu ihr, da die Reflexion an der Schichtoberfläche in Luft einen Phasensprung um  $\pi$  verursacht (vgl. dazu Lummer-Platte mit und ohne Gehrkesches Prisma).

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. W. Voigt, Gött. Nachr., Math.-phys. Kl., 1902, Heft 4, S. 259.

4. Zur Erläuterung folgen noch einige quantitative Messungen. Eine plane Glasplatte wurde wie beschrieben behandelt und mit dem Licht einer Hg-Höchstdrucklampe beleuchtet. Ein mit Spalt- und Photoobjektiv hergestelltes Parallelbündel fiel durch ein Polarisationsprisma streifend, parallel der Keilkante auf die LiF-Schicht auf. Vom ersten Spektrum mit Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors parallel der Spiegeloberfläche wurde vergrößert eine photographische Aufnahme hergestellt und ausphotometriert (Fig. 3). Die Form von Interferenzstreifen, die durch

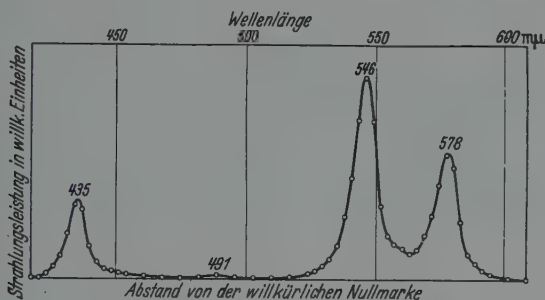


Fig. 3. Verteilung der Strahlungsleistung für die Interferenzstreifen in erster Ordnung.  
 ⊥ senkrecht zur Einfallsebene. Lichteinfall parallel der Keilkante.

Überlagerung unendlich vieler Wellen entstehen, deren Amplituden konstante Verhältnisse haben, wird durch die Airysche Formel beschrieben (vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einführung in die theoretische Physik, Bd. 3, S. 525). Sie ergibt für eine Phasendifferenz  $\delta = 2k\pi$  ( $k = \text{ganze Zahl}$ ) zwischen den einzelnen (je zweimal gespiegelte  $n$ ) interferierenden Strahlen Maxima der Strahlungsleistung proportional zu  $(1 - r)^{-2}$  ( $r = \text{Reflexionskoeffizient}$ ). Läßt man bei großem  $r$  die Phasendifferenz  $\delta$  um den Ausdruck  $\pm (1 - r)$  wachsen, so daß

$$\delta = 2k\pi \pm (1 - r),$$

so sinkt die Strahlungsleistung auf die Hälfte der maximalen. Für unseren Fall ist die Änderung der Phasendifferenz proportional der Änderung der Keildicke, und diese bei linearem Keilanstieg proportional der Verschiebung auf der Schichtoberfläche. Dann ist für das Maximum des ersten Interferenzstreifens  $\delta_1 = 2\pi$ , für die beiden Punkte der Halbwertsbreite  $\delta_2 = 2\pi \pm (1 - r)$ . Daraus folgt

$$r = 1 \mp 2\pi \frac{\delta_2 - \delta_1}{\delta_1}$$

z. B.  $\delta_1 = \text{const} \cdot 578$ ;  $2 \cdot (\delta_2 - \delta_1) = \text{const} \cdot 10,4$ . Man findet für

$$\begin{array}{lll} \lambda = 578 \text{ m}\mu & \lambda = 546 \text{ m}\mu & \lambda = 435 \text{ m}\mu \\ r = 0,948 & r = 0,940 & r = 0,987, \end{array}$$

wobei der berechnete Reflexionskoeffizient  $r$  das Mittel aus der Reflexion an Silber und an Luft ist. Die nach der Formel zu erwartende Verschärfung der Interferenzen bei höheren Ordnungen ist leicht zu beobachten.

Als Gangunterschied zwischen den interferierenden Strahlen tritt nicht nur die Wegdifferenz, sondern auch der Phasensprung multipliziert mit  $\lambda/2\pi$  bei der Reflexion am Metall auf. Daher fällt die Interferenzlinie einer Wellenlänge im Spektrum erster Ordnung keineswegs zusammen mit derjenigen der halben Wellenlänge in zweiter Ordnung. Das sieht man in Fig. 4 ohne

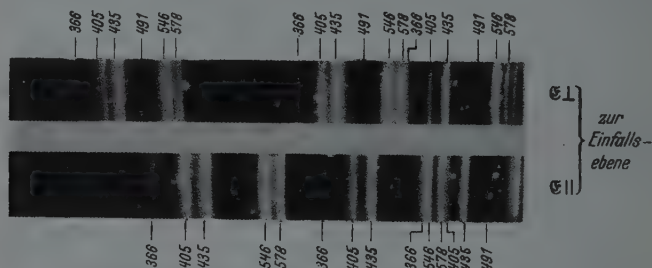


Fig. 4. Silberspiegel mit keilförmiger LiF-Schicht streifend mit polarisiertem Licht (Rochon-Prisma) einer Hg-Lampe beleuchtet. Lichteinfall senkrecht zur Keilkante von der Keilkante zur Keilbasis.  $E \perp$  wurde länger als  $E \parallel$  belichtet, da ja hier in die Aufnahmerrichtung nur die kleine Achse der Schwingungsellipse (Fig. 2b) strahlt. Einige Linien sowie die als weiße Punkte erscheinenden Staubkörner auf der Schichtoberfläche sind in der Aufnahme überbelichtet.

jede Messung, ebenso auch, daß die Spektren mit der Schwingungsrichtung parallel der Einfallsebene näher aneinanderliegen, als die mit der dazu senkrechten Richtung. Quantitativ gilt: Für die Schichtdicke  $d_k$  und  $d_{k+1}$ , bei denen dieselbe Wellenlänge in  $k$ -ter und  $k+1$ -ter Ordnung ihr Maximum hat,

$$\frac{d_k}{d_{k+1}} = \frac{k - \varphi}{k + 1 - \varphi} \quad \text{mit } \varphi = \frac{\delta}{2\pi},$$

wenn  $\delta$  den Phasensprung bei der Metallreflexion bedeutet. Daraus folgt

$$\varphi = k + 1 - \frac{d_{k+1}}{d_{k+1} - d_k}.$$

Bei bekannter Steigung des Keils kann man also den durch Reflexion am Metallspiegel auftretenden Phasensprung ausrechnen. Das ist für einen linear ansteigenden Keil und Schwingungsrichtung des elektrischen Vektors senkrecht zur Einfallsebene in Fig. 5 ausgeführt. Während für diese Berechnung konstante Steigung des Keils von einer Ordnung bis zur nächsten nötig ist, lassen sich kleine Phasendifferenzen, wie sie z. B. bei Reflexion an dünnen Silberspiegeln gegenüber Reflexion an dickeren auftreten, auch dann messen, wenn der Keil über größere Strecken schwankende Steigung besitzt. Dazu dampft man die verschieden dicken Silberschichten neben-

einander und über alle Schichten gleichzeitig den LiF-Keil. Dann zeigen die Interferenzlinien an den Berührungskanten der Silberspiegel Verschiebungen. Die an diesen Stellen herrschende Keilsteigung bestimmt man mit verschiedenen Wellenlängen der gleichen Ordnung und kann dann aus den Verschiebungen die Phasendifferenzen für die verschiedenen Reflexionen ausrechnen.

Ist umgekehrt der Phasensprung  $\delta = 2\pi\varphi$  bei der Metallreflexion bekannt, so kann man nach der üblichen Formel für den Gangunterschied  $\Delta$  in den Maxima der Interferenzerscheinung die Schichtdicke  $d$  bestimmen:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\beta} + \varphi\lambda = k\lambda,$$

wobei der Einfallswinkel  $\beta$  zu  $90^\circ$  und der Brechungsindex  $n$  gleich dem des kompakten Materials angenommen wird. Dabei kann man gleichzeitig

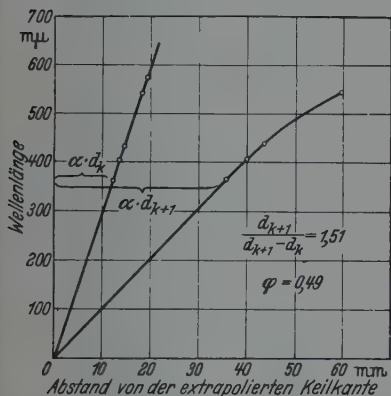


Fig. 5. Bestimmung des Phasensprungs für  $\lambda$  senkrecht zur Einfallsebene bei der Reflexion an einem noch durchsichtigen Silberspiegel.

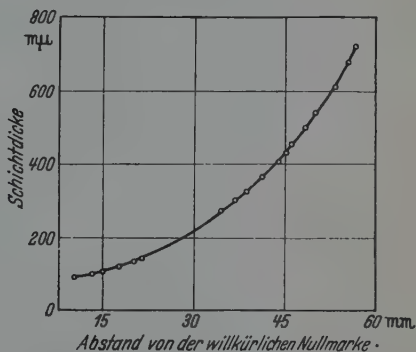


Fig. 6. Profil einer aufgedampften LiF-Keilschicht, gemessen mit Hilfe der gleichzeitig vorhandenen scharfen Interferenzmaxima der 6 Hg-Linien 366, 405, 435, 491, 546, 578  $m\mu$ . Undurchsichtiger Silberspiegel,  $\lambda$  senkrecht zur Einfallsebene.

mit mehreren Wellenlängen beleuchten, da sich ihre Interferenzstreifen bei der großen Schärfe nicht gegenseitig stören. Ein Beispiel findet sich in Fig. 6. Zur Erläuterung ist in Fig. 7 das Profil eines Keils aufgetragen, wie es entsteht, wenn beim Verdampfen die Abnahme des Teilchenstromes proportional dem Quadrat der Entfernung von einem punktförmigen Strahler ist. In diesem Fall erhält man einen nahezu linearen Keilanstieg, von etwa  $x/a = 1,0$  bis etwa  $x/a = 0,2$ .

Alle bisherigen Erörterungen bezogen sich auf den Fall, daß das Licht streifend, parallel der Keilkante einfällt. Die Erscheinungen ändern und

komplizieren sich, sobald man andere Beleuchtungsrichtungen wählt. Fällt das Licht z. B. senkrecht zur Keilkante, und zwar von der Keilkante zur Keilbasis ein, so ändert sich jede Interferenzlinie in der Weise, daß an der zur Keilbasis gelegenen Seite ein steiler Helligkeitsabfall, und daran anschließend mehrere schwache, sehr schmale Linien auftreten. Bei entgegengesetzter Richtung der Einstrahlung bleiben die Linien einfach, sind aber

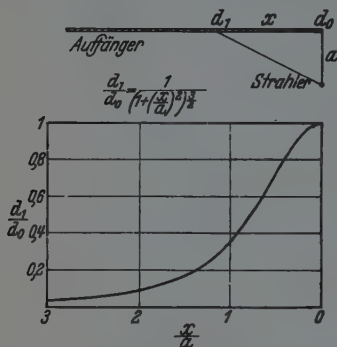


Fig. 7. Zur Entstehung des Keilprofils bei Verdampfung von einem punktförmigen Strahler. Ein kleiner kreisscheibenförmiger Strahler, dessen Fläche parallel der Auffangfläche steht, würde eine Dickenverteilung der Form

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ergeben.  $d$  = Schichtdicke.

stark verbreitert. Beide Erscheinungen dürften mit der in diesen Fällen auftretenden Änderung der Reflexionswinkel bei den mehrfachen Reflexionen in der Schicht zusammenhängen. Strahlt man dagegen senkrecht auf die Spiegeloberfläche, so beobachtet man im Gegensatz zu den bislang betrachteten nur Interferenzen, die einerseits durch gestreutes, andererseits gestreutes und gespiegeltes Licht erzeugt werden<sup>1)</sup>. Das erkennt man sofort daran, daß die an einer Stelle entstehende Interferenzfarbe sich bei sonst unveränderter Anordnung je nach Blickrichtung ändert. Speziell im Falle streifender Beobachtung, aber nur dann, erhält man dasselbe Bild wie bei streifender Beleuchtung, da dann die geometrischen Verhältnisse für das Streulicht mit denen für das direkte Licht bei streifender Beleuchtung übereinstimmen.

*Zusammenfassung.* An einer dünnen keilförmig aufgedampften, durchsichtigen Kristallschicht werden scharfe Interferenzen gleicher Dicke mit vielen mehrfach gespiegelten Lichtbündeln hergestellt. Sie werden sichtbar gemacht durch sehr kleine Streuteilchen unterhalb der spiegelnden Schichtoberfläche.

Göttingen, I. Physikalisches Institut der Universität. September 1942.

<sup>1)</sup> Vgl. P. Selenyi, a. a. O.

## Das Geiger-Müller-Zählrohr im Dienste des Bergbaués\*)<sup>1)</sup>.

Von B. Rajewsky.

Mit 5 Abbildungen. (Eingegangen am 2. Februar 1943.)

### *I. Einleitung.*

Das Auffinden radiumhaltiger Erze stößt bekanntlich insofern auf Schwierigkeiten, als nur spärliche geologisch-mineralogische Merkmale für das Auftreten von Radiumerzen vorliegen. Die Mehrzahl der heute bekannten Radiumvorkommen wurde daher mehr oder weniger zufällig gefunden. Auch in den bestehenden Ra-Bergwerken ist das Suchen nach neuen Erzgängen meist nur ein Tasten. Indessen ist der europäische Raum an reichhaltigen Radiumerzvorkommen verhältnismäßig arm. Zwar verfügt Deutschland über die ältesten und qualitativ hochwertigen Radiumbergwerke von St. Joachimsthal, und auch in anderen Ländern finden sich einige Radium-Abbaustätten, doch ist ihre absolute Ergiebigkeit am europäischen Radiumbedarf gemessen nur gering. Die Kriegszeit hat die Anforderungen an Radium-Produktion in Europa sehr wesentlich verschärft. Es ist deshalb verständlich, daß in den letzten Jahren das Bestreben, die wissenschaftlich-technischen Hilfsmaßnahmen bei der Auffindung von Radiumerzen wirksamer zu gestalten, in den Vordergrund getreten ist. So war es naheliegend, eine mögliche Abhilfe in der Ausnutzung der durchdringenden Radiumstrahlung zu sehen und Anpeilung der Erzgänge mit Hilfe von Strahlen-Meßgeräten zu versuchen.

Der Einsatz der auf Strahlenmessung beruhenden Erzanpeilung ist aber nicht nur im Radiumbergbau erfolgversprechend. In gleicher Weise können sich auch Kalium- und Mineralöl-Vorkommen durch ihre Radioaktivität manifestieren, so daß auch hierbei die Anwendung von „Strahlen-Suchgeräten“ aussichtsreich erscheint.

Da eine in praktischer Hinsicht nutzbringende Lösung der oben kurz angedeuteten Aufgaben nur unter Verwendung von Strahlungsmeßinstrumenten höchster Empfindlichkeit denkbar ist, kommt hierbei das von H. Geiger der Physik geschenkte Zählrohr, das sich durch seine

---

\*) Herrn Prof. Dr. H. Geiger zum 60. Geburtstag in hoher Verehrung gewidmet.

<sup>1)</sup> Nach den im Auftrage des Reichsamts für Wirtschaftsausbau im Kaiser Wilhelm-Institut für Biophysik, Frankfurt a. M., gemeinsam mit W. Dreblow und H. Himmelreich durchgeführten Entwicklungsarbeiten.



große Empfindlichkeit und seine für die praktischen Zwecke besonders wertvolle Einfachheit auszeichnet, in erster Linie als „Suchgerät“ in Frage.

Versuche, Strahlungsmeßgeräte für geologische Problemstellungen, besonders für Messungen im Gelände (Messungen an Verwerfungen, Erdspalten u. dgl.) zu verwenden, wurden in den letzten Jahren von verschiedener Seite sowohl in Deutschland als auch im Auslande unternommen. Meist wurde dabei das Zählrohr als Meßinstrument benutzt. Auch für andere Zwecke des praktischen Bedarfs, z. B. zum Suchen verlorengegangener Ra-Präparate, Strahlenschutzmessungen, Materialuntersuchungen mit Röntgen- und Ra-Strahlen, fand es wiederholt Verwendung. Über die dabei benutzten Meßanordnungen und ihre praktische Bewährung wird demnächst an einer anderen Stelle berichtet werden<sup>1)</sup>. Hier sei lediglich erwähnt, daß über den Einsatz des Zählrohres im Dienste des Bergbaues bisher nur einige spärliche Berichte aus Amerika und Rußland vorlagen.

Nachdem es uns gelang, insbesondere mit Hilfe von Geiger-Müllerschen Zählrohren, die Diagnostizierung von Ra-Ablagerungen im menschlichen Körper bei gewerblichen Radiumvergiftungen zu verwirklichen<sup>2)</sup>, wobei die Feststellung von Ablagerungen in der Größenordnung von  $10^{-7}$  bis  $10^{-8}$  g Ra möglich war, hat der Verfasser gemeinsam mit seinen Mitarbeitern W. Dreblow und H. Himmelreich versucht, unter zweckmäßiger Umgestaltung der Methodik und der technischen Ausführung der Meßanordnungen ein Verfahren und ein Gerät zur Auffindung von Radium- und anderen in Frage kommenden Erzen zu entwickeln. Die Arbeiten wurden im Auftrage des Reichsamtes für Wirtschaftsausbau durchgeführt. Als Grundlage zur Ausbildung geeigneter Strahlungsempfänger diente das Geiger-Müllersche Zählrohr.

## *2. Prinzipielle Gesichtspunkte.*

Die Aufgaben, die einem Strahlenmeßgerät im Bergbau zukommen, sind kurz die folgenden:

1. Das Absuchen des Geländes oder der Gesteinsmassen, wobei die bis an die Oberfläche der Erdkruste bzw. des Gesteins vordringende  $\gamma$ -Strahlung festzustellen oder zu messen ist.

2. Die Überprüfung der Verhältnisse im Innern einer bestimmten Erd- oder Gesteinsschicht. Dabei ist es notwendig, mit Hilfe von Bohrlöchern die Meßkammer vertikal, horizontal oder unter einem bestimmten Winkel ins Innere der zu untersuchenden Masse einzuführen und durch

<sup>1)</sup> W. Dreblow, in Vorbereitung zum Druck. — <sup>2)</sup> B. Rajewsky, Strahlenther. 69, 438—502, 1941.

eine zweckentsprechende Folge von Messungen den Erzgang anzupeilen. Die Bohrlochtiefen variieren dabei bei Ra- und K-Erz von 1 . . . 2 m bis zu 15 . . . 80 m (und mehr) und gehen bis zu mehreren hundert Metern beim „Öl-Suchen“. Eine laufende Registrierung der Meßanzeige mit zunehmender Tiefe ist hier oft notwendig.

3. Schließlich ist es manchmal erforderlich, Radioaktivität von Gesteins- oder Erzproben im Bergwerk oder im Bergwerkslaboratorium feststellen oder laufend überprüfen zu können.

Die unter 1. genannte Aufgabe ist prinzipiell die leichteste. Sie erfordert lediglich ein möglichst empfindliches und möglichst leicht transportierbares Gerät. Sie ist aber zugleich wenig erfolgversprechend, da einmal schon verhältnismäßig geringe Dicken von Erd- bzw. Gesteinschichten genügen, um die  $\gamma$ -Strahlung der darunter liegenden Ra-haltigen Gänge so stark abzuschwächen, daß eine sichere Messung entweder erschwert oder überhaupt unmöglich ist; zum anderen beeinträchtigen auch verhältnismäßig schwache, jedoch nahe zur Oberfläche gelagerte radioaktive Einsprengungen oder Verunreinigungen die Auswertung des Meßresultates, so daß eine Kontroll-„Tiefenmessung“ doch unerlässlich ist.

Der Forderung nach einer großen Empfindlichkeit des Meßgerätes, die für die Methode entscheidend ist, kann man durch die Vergrößerung der Zählrohr-Oberfläche und mit Hilfe der Kombinierung mehrerer Zählrohre zu einem Strahlenempfänger nachgehen. So hat z. B. Lutz<sup>1)</sup> (1940) eine solche Meßanordnung für Messungen im Gelände, speziell an Verwerfungen, beschrieben. Auch von anderen Autoren wurden dafür, wie schon gesagt, verschiedene Konstruktionen vorgeschlagen. Doch setzt die Erhöhung der „spontanen Stoßzahl“ (des Nulleffektes) bei Benutzung vieler großflächiger Zählrohre eine gewisse Grenze in Richtung der praktischen Erreichung höchster Meßempfindlichkeit.

Zur Lösung der unter 2. genannten Aufgabe ist Konstruktion besonderer Zählrohre notwendig, die zum Teil entgegengesetzt lautende Forderungen zu erfüllen haben. Vom meßtechnischen Standpunkt aus ist bei einem Bohrloch-Meßgerät anzustreben:

a) Ganz allgemein eine möglichst hohe absolute und relative Empfindlichkeit.

b) Für die Messung des „Nulleffektes“ im tauben Gestein, für Bestimmung des allgemeinen Aktivitätsspiegels im radioaktiven Gestein oder zur Prüfung der Radioaktivität einer größeren Menge von mit radioaktiver

<sup>1)</sup> W. Lutz, Beitr. z. angew. Geophys. 8, 211—226, 1940, H. 2.

Substanz durchsetztem Material (z. B. Überprüfung von alten Halden, von Aufbereitungsgut auf verschiedenen Stufen des Aufbereitungsprozesses, von Rest- und Abfallmaterial usw.) ist in erster Linie eine kugelsymmetrische Empfindlichkeit des Strahlenempfängers zu fordern.

c) Für die Anpeilung von Erzgängen ist dagegen eine richtungsabhängige Strahlenanzeige von Vorteil, da dadurch nicht nur die zur Auffindung von Erzgängen oder Linsen und Einsprengungen (Apophysen) erforderliche Meßfolge sehr wesentlich abhängt, sondern vor allem das Ansetzen von Bohrlöchern und Sprengungen mit anschließender Abräumung des anfallenden tauben Gesteins vermindert werden kann.

Die unter 3. angeführte meßtechnische Aufgabe ist grundsätzlich mit den Geräten der ersten beiden Gruppen ohne weiteres zu lösen. Es wird daher in den vorliegenden Betrachtungen auf ihre besondere Erörterung verzichtet. Es läßt sich natürlich auch an verschiedene spezielle Anordnungen für solche Messungen denken.

Vom konstruktiv-technischen Standpunkt aus ist für ein Bohrloch-Zählrohr zu fordern: 1. Die äußeren Abmessungen des Zählrohres mit den geerdeten Schutzkapseln zusammen und den elektrischen Zuleitungen (des Kabels) müssen so gewählt werden, daß der gesamte Strahlungsempfänger in ein normales Bohrloch leicht eingeführt werden kann. Der Außendurchmesser der Schutzkapsel sowie des Kabels darf deshalb im allgemeinen etwa 30 bis 32 mm nicht übersteigen; 2. das Gerät muß noch leichter zu transportieren sein als das Gerät für die Messungen im Gelände; zugleich muß es aber eine robuste Bauweise aufweisen, um allen bei Befahrung der Gruben möglichen Vorfällen gewachsen zu sein; 3. besondere Bedeutung ist der Forderung nach einer vollständigen Unempfindlichkeit gegen Feuchtigkeit, Staub und Verseuchung mit Ra-Em und radioaktiven Niederschlägen beizumessen. (Diese letzte Anforderung ist auch an die Geländegeräte zu stellen, nur ist sie hinsichtlich der Geräte, die für Messungen in den Gruben bestimmt sind, besonders verschärft); 4. technisch besonders schwerwiegend ist die ebenfalls den beiden Gerätegruppen gemeinsame Forderung einer völligen Unabhängigkeit der gesamten Meßanordnung vom elektrischen Netzanschluß, da die in den Bergwerken praktisch vorliegenden Verhältnisse die Benutzung von Netzanschlußgeräten entweder überhaupt nicht oder nur unter Überwindung großer Schwierigkeiten zulassen.

Da einerseits für Geländemessungen bereits eine entwicklungsfähige Konstruktion von Lutz (l. c.), bei der allerdings das verhältnismäßig große Gewicht des Gerätes eine Erschwerung seiner Anwendung zu bedeuten

schien, vorlag und andererseits mit einem Gerät der zweiten Gruppe auch die Geländemessungen grundsätzlich durchführbar sind, haben wir uns zunächst mit der Entwicklung eines Bohrlochgerätes befaßt. Die Konstruktionsarbeiten wurden gemeinsam mit W. Dreblow und H. Himmelreich, die insbesondere den praktischen Aufbau des Gerätes übernahmen, durchgeführt.

### 3. Die Zählrohre.

a) Das Zählrohr mit *kugelsymmetrischer Empfindlichkeit* wurde in Anlehnung an das von uns kürzlich beschriebene<sup>1)</sup> Kugelzählrohr gebaut. Fig. 1 gibt Aufschluß über den prinzipiellen Aufbau dieses letzteren.

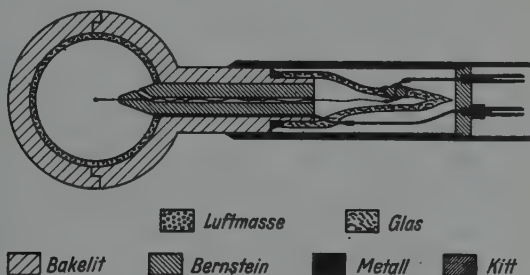


Fig. 1. Schema des Kugelzählrohres.

Es zeichnet sich, wie schon aus dem Schema zu ersehen ist, durch seine praktisch vollkommene kugelsymmetrische Empfindlichkeit, ferner durch seine Konstanz, einen kleinen Nulleffekt: 2 bis 4 Stöße/min und dementsprechend eine große relative Empfindlichkeit aus. Zur Erreichung einer auch im Röntgengebiet wellenlängen-unabhängigen Anzeige wurde seinerzeit die Wand des Kugelzählrohres aus „luftäquivalentem“ Material hergestellt. Da bei den Bohrlochmessungen im allgemeinen stark gefilterte  $\gamma$ -Strahlen in Frage kommen, ist es zweckmäßiger, die Kugel in diesem Fall aus Metall anzufertigen. Für die Wahl des Materials ist die Forderung eines möglichst kleinen Nulleffektes einerseits und einer möglichst großen Elektronenemission der Zählrohrwand maßgebend. Auch einige andere konstruktiv-technische Gesichtspunkte sind hierbei mitbeteiligt. Wir werden darüber später berichten, wenn mehr praktische Erfahrungen vorliegen und andere, zeitbedingte Umstände es gestatten.

<sup>1)</sup> B. Rajewsky, M. Dorneich u. W. Dreblow, Naturwissensch. 30, 332, 1942, H. 22.

b) *Richtungsabhängige Zählrohre* haben wir schon früher für die Zwecke der physikalischen Diagnostik von gewerblichen Radiumvergiftungen gebaut<sup>1)</sup>. Sie beruhen auf der Ausnutzung der bereits aus den Messungen von Bragg und Madsen<sup>2)</sup> bekannten Asymmetrie der Elektronenemission verschiedener Elemente bei  $\gamma$ -Strahlen. Diese Asymmetrie besteht darin, daß die Emission der der Strahlung zugekehrten Seite einer Schicht (Eintrittsemission) und die Emission der anderen Seite (Austrittsemission) ungleich sind, wobei das Verhältnis der beiden Emissionen bei verschiedenen Elementen sehr verschieden sein kann: Bei leichten Elementen überwiegt die Austrittsemission, während bei schweren Elementen die Eintrittsemission vorherrscht. So beträgt die Asymmetrie nach Bragg und Madsen bei Al 1:6,6, bei Pb dagegen 1,2:1. Die Gültigkeit der asymmetrischen Elektronenemission für die Vorgänge im Zählrohr hat H. Geiger in seiner klassischen Zählrohrarbeit<sup>3)</sup> nachgewiesen, indem er ein Zwei-Metallrohr baute (vgl. Fig. 2) und unter Verwendung verschiedener Metalle die Verschiedenheit ihrer Emission zeigte.

Aus der Überlegung heraus, daß diese Asymmetrie für die Bestimmung der Strahlenrichtung ausgenutzt werden kann, haben wir versucht, durch eine zweckmäßige Wahl des Zählrohrmaterials und eine geeignete Konstruktion des Zählrohres selbst, richtungsabhängig anzeigende Zählrohre zu erhalten. Ihrer von der klassischen Zählrohrform abweichenden Ausführung wegen bezeichnen wir sie als Topfzählrohre. Auf Fig. 3 ist ein solches Zählrohr schematisch dargestellt.

Das Topfzählrohr besteht aus einem isolierenden Zylinder (z. B. Hartgummi, Glas u. dgl.) und zwei parallel zueinander als Basisflächen des Zylinders angebrachten Metallscheiben, die als eine der Elektroden des Zählers dienen. Die zweite Elektrode bildet, wie üblich ein Draht, der in Form einer Schleife oder irgendwie anders zwischen den beiden Metallscheiben angeordnet ist und durch den Isolierungszylinder zu einer Anschlußklemme führt. Die beiden Scheiben sind aus verschiedenem Material hergestellt, z. B. wie in Fig. 3 angegeben, aus Al und Pb. Die Wirkungsweise des Topfzählers, insbesondere seine Richtungsabhängigkeit, ist an Hand der Fig. 3 leicht zu verstehen. Für die Strahlrichtung Al $\rightarrow$ Pb wird das Maximum der Elektronenemission beider Metallscheiben, für die Strahlrichtung Pb $\rightarrow$ Al dagegen das Minimum erzielt. Man erhält also in einem solchen

---

<sup>1)</sup> W. Dreblow u. B. Rajewsky, Naturwiss. 28, 92–93, 1940; B. Rajewsky, Strahlenther. 69, 438–502, 1941; W. Dreblow, ZS. f. Instrkde. 62, 60–93, 1942, H. 2. — <sup>2)</sup> W. Bragg u. J. Madsen, Phil. Mag. 16, 918, 1908. — <sup>3)</sup> H. Geiger u. W. Müller, Phys. ZS. 30, 489–493, 1929.



Zwei-Metallrohr sowohl eine Vergrößerung der gesamten Elektronenemission und damit auch der  $\gamma$ -Strahlenempfindlichkeit des Zählrohres, als auch eine je nach der benutzten Metallkombination mehr oder weniger ausgeprägte Verschiedenheit dieser Empfindlichkeit für die gegeneinander gerichteten Strahlungen ( $\text{Al} \rightarrow \text{Pb}$  und  $\text{Pb} \rightarrow \text{Al}$ ).

Es ist verständlich, daß zur vollen Ausnutzung des Effektes als Wandelektroden Metallscheiben von Sättigungsdicke für Elektronenemission verwendet werden müssen. Es zeigte sich aber, daß die Empfindlichkeit

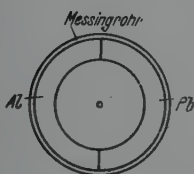


Fig. 2. Schema eines zylindrischen Zwei-Metallzählrohres nach Geiger-Müller.

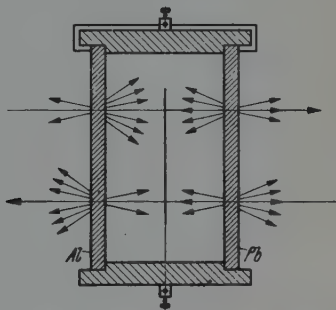


Fig. 3. Schema eines Topfzählrohres nach Dreblow-Rajewsky.

und die Asymmetrie der Topfzählrohre außerdem von den Besonderheiten der Konstruktion abhängig sind. Darüber kann ebenfalls erst später berichtet werden. Als eine Erläuterung der hinsichtlich der Empfindlichkeit von Zwei-Metallzählrohren erreichbarer Verhältnisse sind in den nachfolgenden Tabellen einige auf Grund vorliegender Meßergebnisse<sup>1)</sup> berechneten Zahlenangaben zusammengestellt.

Da für die praktische Durchführung der Messungen neben der Möglichkeit, kleinste Strahlungsintensitäten festzustellen, auch die Schnelligkeit, mit der diese Feststellung möglich ist, von Bedeutung ist, sind in den Tabellen 1 und 2 die dort aufgeführten Zählrohre durch die Angabe ihrer absoluten und relativen Empfindlichkeit charakterisiert. Unter der absoluten Empfindlichkeit wird dabei die durch eine bestimmte Strahlungsmenge bedingte Erhöhung der Stoßzahl des Zählrohres gegenüber der spontanen Stoßzahl, also Meßzahl — Nulleffekt pro Minute verstanden, unter der relativen Empfindlichkeit — das Verhältnis dieser Differenz zu der Null-Stoßzahl in % ausgedrückt. Ferner ist die Asymmetrie der einzelnen Zählrohre

<sup>1)</sup> Vgl. W. Dreblow u. B. Rajewsky, l. c.; W. Dreblow, l. c.



Tabelle 1. Ungefilterte  $\gamma$ -Strahlung.

Art des Zählrohrs	Material des Zählrohrs	O-Stoßzahl pro min	Empfindlichkeit für $1 \cdot 10^{-6}$ g Ra (ungefiltert) in 20 cm Abstand		Asymmetrie	Vergleich der Empfindlichkeiten	
			absolute in Stößen pro min	relative in %		absolute	relative
Zylinderzählrohr .....	Al-Al	11,8	16,7	141	—	62,8	103,6
	Pb-Pb	27,4	5,3	19,3		19,9	14,2
	Al-Pb	19,6	26,6	136		100	100
	Pb-Al	19,6	13,5	68,9		57,5	50,6
Topfzählrohr (Type II) .....	Al-Al	14,6	60,0	412	—	45,5	62,3
	Al-Pb	20,0	132,0	660		100	100
	Pb-Al	20,0	73,3	366		55,6	55,5
	Al-Pb	30,4	149,0	490		100	100
Topfzählrohr (Type I) .....	Pb-Al	30,0	56,0	187	—	37,6	38,2

Tabelle 2. Mit 1 cm Pb gefilterte  $\gamma$ -Strahlung.

Art des Zählrohrs	Material des Zählrohrs	O-Stoßzahl pro min	Empfindlichkeit für $10^{-6}$ g Ra (gefiltert) in 20 cm Abstand		Asymmetrie	Vergleich der Empfindlichkeiten	
			absolute in Stößen pro min	relative in %		absolute	relative
Topfzählrohr (Type III) .....	Al-Pb	17,6	22,8	128,5	2,07	100	100
	Pb-Al	17,6	11,0	51,7		48,2	40,2
	C-Pb	18,6	20,4	109,7		89,5	85,1
	Pb-C	18,6	7,2	38,7		31,6	30,1
	Be-Pt	11,0	30,4	276,5		134,3	215
	Pt-Be	11,0	14,0	127,4		61,4	99,0

für ihre absoluten Empfindlichkeiten  $\text{Al} \rightarrow \text{Pb}$  und  $\text{Pb} \rightarrow \text{Al}$  angegeben. Schließlich sind die Zählrohre bezüglich ihrer absoluten und relativen Empfindlichkeiten miteinander verglichen, wobei die Empfindlichkeit für  $(\text{Al}-\text{Pb})$  bei jeder Gruppe gleichartig gebauter Zählrohre als 100 gesetzt ist. Die Angaben beziehen sich auf zylindrische Zwei-Metallzählrohre und auf drei verschiedene Typen von Topfzählrohren, die sich im wesentlichen nur durch ihre geometrische Gestaltung unterscheiden. Die Zahlen der Tabelle 1 gelten für ungefilterte  $\gamma$ -Strahlung (Ra-Präparat in Glasröhrchen), die Zahlen der Tabelle 2 für mit 1 cm Pb gefilterte  $\gamma$ -Strahlung.

Wie aus Tabelle 1 zu ersehen ist, weist ein Zwei-Metallzählrohr in der Tat außer der gewünschten Richtungsabhängigkeit (Asymmetrie) auch eine größere absolute Empfindlichkeit auf als ein normales Zählrohr. Das Topfzählrohr ist dabei dem zylindrischen Zählrohr überlegen, da bei ihm neben der absoluten auch die relative Empfindlichkeit erhöht ist. Ferner kann bei den Topfzählern durch geeignete Maßnahmen die Asymmetrie ebenfalls verstärkt werden.

Die Zahlenwerte der Tabelle 2 zeigen, wie sich die Eigenschaften eines Topfzählrohres mit Veränderung des Elektrodenmaterials ändern. Unter den angeführten Beispielen ergibt das Elektrodenpaar  $(\text{C}-\text{Pb})$  die größte Richtungsabhängigkeit, während die beste Empfindlichkeit (relative und absolute) bei  $\text{Be}-\text{Pt}$  erreicht wird. Mit einem aus drei solcher Zwei-Metallzählrohre in zweckmäßiger Weise zusammengesetzten Strahlungsempfänger kann man, wie leicht einzusehen, die Strahlenrichtung in drei Raumkoordinaten feststellen, indem man die einzelnen Zählrohre hintereinander einschaltet. Durch die Änderung der Zählrohrlage (Drehung um die Bohrlochachse) oder durch die Vermehrung der Zählrohranzahl läßt sich auch jede beliebige Strahleneinfallrichtung ermitteln.

In dem von uns entwickelten Bohrlochgerät haben wir sowohl zylindrische Zweimetallzählrohre, die durch Axialdrehung ebenfalls die Strahlenrichtung aus einem großen Raumwinkel festzustellen gestatten, als auch Topfzählrohre verwendet.

#### 4. Das Bohrlochgerät.

Alle Zubehöerteile des Gerätes sind in einem stabilen, luftdicht verschließbaren Metallbehälter untergebracht. Der Behälter hat die Form eines Tornisters und kann bequem auf dem Rücken getragen werden. An den Behälter wird, ebenfalls luftdicht, doch leicht abnehmbar, das Zählrohr-Zuleitungskabel angeschlossen, das an einem Ende in einen starren Zählkammerträger übergeht. Die Zählkammer wird leicht abnehmbar und luft-

dicht an den Träger aufgesetzt. Sie ist in einer geerdeten Schutzhülle eingeschlossen. Der Behälter, in dem für Transportzwecke eine besondere Abteilung für Reservebatterie, Zählwerk mit Stoppuhr und einen Satz von Zählkammern vorgesehen ist, hat die Abmessungen von etwa 40 cm Höhe, 35 cm Breite und 18 cm Tiefe. Das Gesamtgewicht des fertig montierten Gerätes einschließlich Zubehör und Ersatzteile mit Behälter aus Leichtmetall beträgt etwa 15 kg. Zur Erreichung dieses verhältnismäßig kleinen Gewichtes war eine besonders leichte und kleindimensionierte Ausführung aller Einzelteile des Gerätes erforderlich. Dies betrifft vor allem den Verstärker, die Stromquelle zu seiner Speisung und die Hochspannungsbatterie für das Zählrohr. Durch geeignete konstruktive Maßnahmen wurde die ganze Verstärkeranlage in 2 Kästchen von 480 und 810 cm<sup>3</sup> Volumen untergebracht. Da die Zählrohre des Gerätes in der Auslöseschaltung arbeiten, war die Verwendung eines leistungsfähigen Verstärkers erforderlich. Die Verkleinerung seines Volumens und Gewichtes wurde durch die Zerlegung der Verstärkeranlage in zwei Teile — ein Verstärker und ein empfindliches Relais — notwendig. Für die Zählerspannung wurde eine Trockenelementbatterie hergestellt, die aus 1000 Elementen von je 1,3 cm<sup>3</sup> Volumen und 1,5 g Gewicht besteht. Sie ist in einem besonderen Gestell, das eine bequeme Auswechslung der Elemente gestattet und mit allen Schaltvorrichtungen zum praktisch kontinuierlichen Variieren der Spannung versehen ist, untergebracht. Das Batteriegestell ist etwa 26 × 15 × 14 cm<sup>3</sup> groß. Im Laufe der mit dem Gerät durchgeführten Messungen hat sich diese Liliputbatterie ausgezeichnet bewährt.

Auf Fig. 4 ist der Apparatebehälter dargestellt. Die Anordnung und Form der einzelnen Teile des Gerätes ist daraus leicht zu ersehen. Fig. 5 zeigt das ganze Gerät mit angeschlossener Zählkammer und Zählwerk, wie es bei den Messungen verwendet wird.

Da die Liliputbatterie trotz ihrer an sich sehr befriedigenden Leistungsfähigkeit doch eine begrenzte Lebensdauer hat und von Zeit zu Zeit der Auswechslung einzelner Elemente bedarf, wurde für die langdauernden (mehrere Monate) Messungen in den Gegenden, wo Nachlieferung der Ersatzelemente auf Schwierigkeiten stoßen kann, ein zweiter Gerätetyp gebaut. Bei diesem Gerät ist die Batterie durch eine Transformator-Wechselrichter-Akkumulatorenanlage ersetzt. Die dafür erforderliche Akkumulatorenbatterie ist bei diesem Gerät in einem besonderen Tragkasten untergebracht.

Für die beiden Geräte dienen die gleichen Meßkammern und die gleichen Zuleitungen. Nachdem in Vorversuchen mehrere Konstruktionstypen von Zählrohren geprüft wurden, sind für Grubenmessungen als besonders ge-

eignet folgende Typen vorgesehen: 1. Ein einfacher oder zusammengesetzter Kugelzählrohr-Strahlenempfänger, mit dessen kugelsymmetrischer Empfindlichkeit die Messung der an einem Ort herrschenden *Gesamtintensität* der

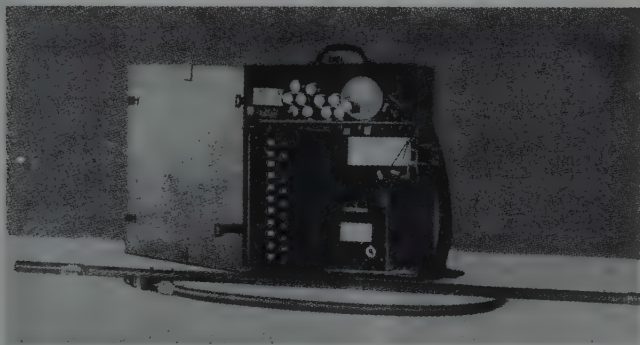


Fig. 4. Apparatebehälter und Zählrohrkabel des Bohrlochgerätes nach Dreblow, Himmelreich und Rajewsky.

Strahlung ermöglicht wird; 2. ein Zweimetall-Zylinderzählrohr mit richtungsabhängiger Anzeige in der Richtung senkrecht zur Zählrohrachse, das zur Messung der senkrecht zum Bohrloch gerichteten Strahlungen bestimmt ist; 3. ein „Topfzählrohr“ mit richtungsabhängiger Anzeige in der Richtung der Zylinderachse. Dieser Zähler kann auf seinen Träger (starrer Teil der Zuleitung) sowohl koaxial als auch mit senkrecht zueinander stehenden Achsen aufgesetzt werden. Er dient zur Messung der in der Richtung des Bohrloches oder seitlich davon einfallenden Strahlung; 4. eine aus zwei richtungsabhängigen „Topfzählern“ bestehende Meßkammer, die zur Messung gerichteter Vorder- bzw. Rückstrahlung bestimmt ist; 5. ein aus mehreren Topfzählern bestehender Strahlenempfänger. Jede Zählkammer ist in eine zylindrische, geerdete Metallhülse luftdicht eingeschlossen und kann ebenfalls luftdicht an den starren Teil der Zuleitung zum Zuhörbehälter mit einer Überwurfmutter befestigt werden.

Die Zuleitung, ein geerdeter Metallzylinder, der in ein biegsames Kabel übergeht, enthält im Innern die isoliert voneinander geführten Hochspannungs- und Zählleitung. Die Zuleitung wird durch Steckkontakte an die elektrische Anlage im Zuhörbehälter angeschlossen und mit einer Überwurfmutter an diesen luftdicht befestigt. Die Kabel sind kapazitätsarm gebaut.

Die Registriervorrichtung, bestehend aus einem Zählwerk, einer Stoppuhr und einem Beleuchtungslämpchen, ist in einem besonderen

Träger eingebaut, der erfahrungsgemäß während der Messung am besten an der Brust getragen wird (vgl. Fig. 4 und 5).

Das Gerät wurde im Jahre 1940/41 entwickelt und anschließend in den Ra-Bergwerken praktisch erprobt. Es hat sich dabei meßtechnisch gut bewährt. Über die Ergebnisse der Messungen, die eine Reihe wertvoller Hinweise bezüglich der Untersuchungsmethodik und der Auswertung der Meßresultate geliefert haben, wird später berichtet werden. In gleicher Weise werden dann auch die Einzelheiten der benutzten Schaltungen mitgeteilt werden.

Verständlicherweise kann das beschriebene Zählrohrgerät nicht ohne weiteres als etwa ein „Strahlenkompaß“ benutzt werden. Die Ermittlung der Lagerungsorte aktiver Gesteine und insbesondere die Anpeilung von Erzgängen erfordert eine bestimmte, je nach den vorliegenden Verhältnissen angelegte Meßfolge, deren Methodik

erst nachdem hinreichende praktische Erfahrungen vorliegen, zu systematisieren und endgültig festzulegen sein wird.

Auf Grund der mit dem Bohrlochgerät gesammelten Erfahrungen konnte auch mit der Entwicklung eines Gerätes für Ölbohrungen begonnen werden. Es befindet sich zur Zeit in Entwicklung.

So ist zu hoffen, daß das von H. Geiger der Strahlenforschung geschenkte Zählrohr, das in der Physik so viel neue Erkenntnisse und grundlegende Feststellungen ermöglicht hat, auch bei dem im vorhergehenden kurz skizzierten technischen Einsatz wertvolle Dienste leisten und dadurch auf einem wichtigen wirtschaftlichen Gebiet die angestrebte Abhilfe bringen wird.



Fig. 5. Bohrlochgerät für die Messung fertig montiert.



## Die Ionisation einzelner Alpha-Strahlen in verschiedenen Gasen \*).

Von Georg Stetter in Wien.

(Nach Versuchen gemeinsam mit Willibald Jentschke, Erich Schachinger +  
und Elfriede Maresch)<sup>1)</sup>).

Mit 9 Abbildungen. (Eingegangen am 9. September 1942.)

W. Jentschke und der Verfasser hatten seinerzeit die spezifische Ionisation des Einzelteilchens bestimmen können, indem sie ein und dasselbe Teilchen in einer geeigneten Kammer gleichzeitig zweimal registrierten; diese in Luft vorgenommenen Messungen werden auf verschiedene Gase erweitert. Ferner werden die Schwankungen der Gesamtionisation im Zusammenhang mit der Reichweitenstreuung bestimmt. — Das Ziel ist dabei außer der Schaffung brauchbarer Daten für die Auswertung kernphysikalischer Untersuchungen die Erlangung besserer Unterlagen für die Deutung des Ionisationsverlaufes und der Reichweitenstreuung.

Mit der zunehmenden Verwendung der elektrischen Nachweismethoden für die bei kernphysikalischen Untersuchungen auftretenden Korpuskularstrahlen ergab sich die Notwendigkeit einer möglichst genauen Kenntnis der Beziehung zwischen Ionisation und Reichweite (und somit Energie) für das Einzelteilchen. Der Verfasser hat deshalb gemeinsam mit W. Jentschke vor einigen Jahren (l. c.) für die experimentell am leichtesten zugänglichen  $\alpha$ -Strahlen derartige Messungen durchgeführt; die meisten älteren Arbeiten betrafen nur Messungen an Bündeln von vielen  $\alpha$ -Strahlen, aus denen sich nur eine ganz rohe Annäherung der gesuchten Beziehung ergibt: infolge der Reichweitenstreuung, die zuerst von Geiger<sup>2)</sup> experimentell nachgewiesen und seither von zahlreichen Autoren untersucht wurde, sind hierbei viele Einzelkurven überlagert, über deren Form zunächst nichts bekannt ist.

Die Methode von Stetter und Jentschke, die in der zitierten Abhandlung näher beschrieben ist, besteht kurz darin, daß mit Hilfe eines Doppelröhrenelektrometers<sup>3)</sup>, welches zwei gleichzeitige Registrierungen erlaubt, der  $\alpha$ -Strahl an zwei Stellen seiner Bahn gleichzeitig abgetastet

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

<sup>1)</sup> G. Stetter u. W. Jentschke, Phys. ZS. **36**, 441, 1935; ferner W. Jentschke, Wien. Ber. **144**, 151, 1935 (Mitt. d. Ra.-Inst. Nr. 356); E. Schachinger, Diss. Wien 1937, noch nicht veröffentlicht; E. Maresch, Diss. Wien 1942, noch nicht veröffentlicht. E. Schachinger fand den Fliebertod im April 1941. — <sup>2)</sup> H. Geiger, Proc. Roy. Soc. London (A) **83**, 505, 1910. —

<sup>3)</sup> G. Stetter u. J. Schintlmeister, Wien. Ber. **142**, 427, 1933 (Mitt. des Ra.-Inst. Nr. 322)



wird, so daß sich mosaikartig schließlich die Ionisationskurve des Einzelteilchens ergibt. Die verwendete Doppelkammer ist in Fig. 1 schematisch dargestellt: sie verwendet das Prinzip des Schutzringkondensators nach zwei Seiten; die beiden Röhrenelektrometer *A* und *B* müssen dazu auf verschiedenem Grundpotential liegen.

Die Endplatte *E* nimmt die (positiven) Ionen des Reichweitenendes auf und der Ausschlag von *A* gibt somit die jeweilige Reichweite an. Auf der

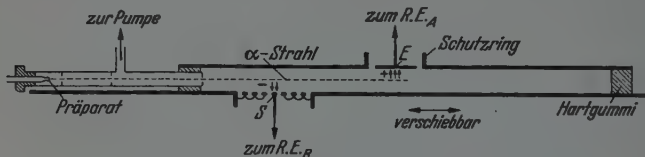


Fig. 1. Doppel-Ionisationskammer.

verschiebbaren Sonde *S* werden gleichzeitig die (negativen) Ionen eines beliebig wählbaren kleinen Bahnstückes niedergeschlagen und mit *B* registriert. Natürlich kann man so nicht sämtliche Bahnstücke gleichzeitig messen, sondern nur nacheinander, und dann die zu gleichem Endausschlag gehörigen

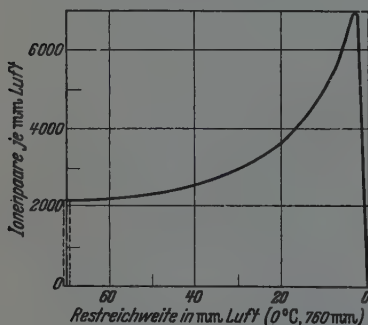


Fig. 2. Ionisationskurve des Einzelteilchens in Luft.

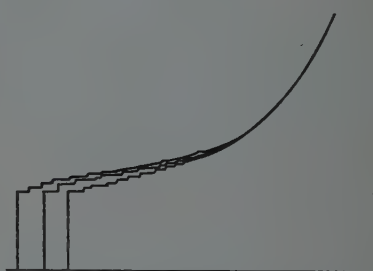


Fig. 3. Schematische Darstellung des die Reichweitenschwankungen verursachenden Ionisationsverlaufes.

Werte zusammensetzen. Die in diesem Verfahren liegende Voraussetzung, daß zu gleicher Reichweite gleiche Ionisationskurven gehören, wird durch die Ergebnisse gerechtfertigt.

Darüber hinaus ergaben schon die Messungen in Luft (l. c.), daß auch die Ionisationskurven von Teilchen verschiedener Reichweite — verschieden infolge der Reichweitenstreuung! — vom Reichweitenende her verglichen, praktisch zusammenfallen, so daß nur am Anfang etwas anzustückeln oder abzuziehen ist (Fig. 2). Das ist nur so zu erklären, daß, wie man schon aus älteren Untersuchungen weiß, die Reichweitenstreuung schon in den ersten

Zentimetern verursacht wird, wo wegen des flachen Verlaufes der Ionisationskurve Änderungen nicht bemerkt werden können. Eine anschauliche Darstellung der Verhältnisse kann man etwa geben, wenn man die Neigung der Kurve in jenem flachen Teil stark übertreibt: Fig. 3.

Zur Erweiterung der gewünschten technischen Daten sowie zur Klärung der sich ergebenden prinzipiellen Fragen wurden nun Versuche in einer Reihe von anderen Gasen angestellt, die sich zwanglos in die Messung der spezifischen und die der Gesamtionisation gliedern.

*Die spezifische Ionisation einzelner  $\alpha$ -Strahlen in Stickstoff, Luft und Xenon.* Für das Röhrenelektrometer mit kleiner Zeitkonstante<sup>1)</sup> muß man, um die proportionale Wiedergabe zu sichern, für eine sehr kleine Aufladezeit sorgen, d. h. die von dem  $\alpha$ -Strahl gebildeten Ionen müssen in sehr kurzer Zeit ( $< 10^{-4}$  sec) auf die isolierte Elektrode niedergeschlagen werden. Dies kann man entweder durch sehr große Feldstärken oder einfacher dadurch erreichen, daß man eine besonders große Ionenbeweglichkeit zu erzielen trachtet. In hoch gereinigten Edelgasen, ferner Stickstoff und Wasserstoff lagern sich die bei der Ionisation gebildeten Elektronen nicht an, sondern bleiben freie Elektronen von sehr großer Beweglichkeit. Am häufigsten nimmt man naturgemäß Stickstoff für derartige Zwecke<sup>2)</sup>; für manche Zwecke, wo man ein besonders schweres Gas haben will (z. B. zur Vermeidung der von Neutronen hervorgerufenen Rückstoßstrahlen), ist Xenon geeignet, wobei man nebenbei den Vorteil einer besonders großen Ionenausbeute hat.

Zunächst sei in Fig. 4 die nach der oben zitierten Methode gewonnene Ionisationskurve des Einzelteilchens in Stickstoff wiedergegeben. Die dazugehörigen Zahlenwerte gibt Tabelle 1.

Beim Vergleich mit den entsprechenden Daten in Luft (Stetter und Jentschke, l. c.) erweisen sich die Stickstoffwerte durchweg etwas kleiner; dafür gibt es zwei Ursachen: das Bremsvermögen in Stickstoff ist etwas (2%) kleiner, zur Umrechnung auf gleiches Bremsvermögen ist also die Kurve in der Abszissenrichtung zusammenzurücken und sind die Ordinaten entsprechend zu erhöhen. Ferner ist das Gesamt-Ionisationsvermögen in  $N_2$  um etwa 4% kleiner (s. u.). Wenn man annimmt, daß sich dieser Fehlbetrag gleichmäßig längs der Reichweite verteilt, so fällt mit der entsprechenden Korrektur die Stickstoffkurve praktisch mit der Luftkurve zusammen.

<sup>1)</sup> G. Ortner u. G. Stetter, Wien. Ber. **142**, 485, 1933 (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 328). — <sup>2)</sup> G. Ortner u. G. Stetter, Wien. Anz. **70**, 241, 1933.

Es sei darauf hingewiesen, daß es sich hier um die Ionisationskurve eines Teilchens *mittlerer Reichweite* handelt, d. h. also eines Teilchens aus einem Bündel homogener Anfangsgeschwindigkeit, wo nur durch die verschiedenartige Bremsung verschiedene Reichweiten entstehen; strenggenommen müßte man also zwischen einem durch die Reichweitenstreuung verkürzten

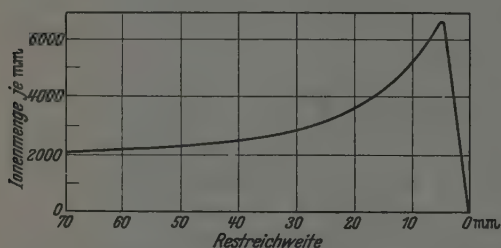


Fig. 4. Ionisationskurve des Einzelteilchens in Stickstoff.

Teilchen und einem solchen von etwas kleinerer Anfangsgeschwindigkeit, das keine Verkürzung erlitten hat, unterscheiden; praktisch fällt dieser Unterschied aber wegen des flachen Verlaufs der Ionisationskurve bei den größeren Geschwindigkeiten (und nur bei diesen gibt es eine merkliche Reichweitenstreuung) vollkommen weg. Für Energieberechnungen ist die obige Definition natürlich zu beachten.

Anschließend sei noch in Tabelle 2 die spezifische Ionisation in Luft angegeben; die betreffende Tabelle in der früheren Arbeit wird dabei etwas geändert. Damals wurde die Kurve für das nicht sehr genau gemessene äußerste Reichweitenende linear extrapoliert; nach den Messungen von Holloway und Livingston<sup>1)</sup>, die gerade das Reichweitenende genauer untersucht haben, scheint dies nicht richtig zu sein, sondern eine leichte (konvexe) Krümmung bis zum Ende zu bestehen.

Außerdem wurde auf die inzwischen genauer gemessene Gesamt-ionisation von Polonium- $\alpha$ -Strahlen zu 148,200 Ionenpaaren (s. u.) um-

<sup>1)</sup> M. G. Holloway u. M. S. Livingston, Phys. Rev. 54, 18, 1938. Die beiden Autoren arbeiten mit Verstärker, Thyatron und Zählwerk, und zwar wird bei jeder Stellung der seichten Ionisationskammer am Gitter des Thyatron gerade eine solche Gegenspannung eingestellt, daß nur die Hälfte aller Teilchen gezählt wird. Der — eichbare — Gegenspannungswert gibt dann unmittelbar, mit einer kleinen Korrektur wegen der endlichen Kammertiefe, die spezifische Ionisation an der betreffenden Stelle der Bahn für ein Teilchen mittlerer Reichweite. In der Gegend des Maximums muß dieses Verfahren jedoch unrichtige (zu kleine) Werte ergeben, wodurch die Kurvenform verändert wird. Aus diesem und auch aus anderen Gründen — bei der dort verwendeten Kammer ist das Feld longitudinal (keine Sättigung) und außerdem schlecht definiert; der Aufladeverlauf ungleich bei vermutlich zu kleiner Zeitkonstante — halten wir, abgesehen von der Korrektur am Reichweitenende, unsere Kurve für verlässlicher. — Siehe auch J. Schintlmeister, Eine Neubestimmung der Reichweite der  $\alpha$ -Strahlen des Urans. Wien. Ber. 148, 279, 1939.

Tabelle 1. Spezifische Ionisation des einzelnen  $\alpha$ -Teilchens in Stickstoff bei 0° C, 760 mm Hg.

Rest- reichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation	Rest- reichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation
1	1460	1,460	36	2575	139,540
2	3940	5,400	37	2545	142,085
3	5500	10,900	38	2515	144,600
4	6570	17,470	39	2485	147,085
5	6560	24,030	40	2455	149,540
6	6120	30,150	41	2430	151,970
7	5780	35,930	42	2410	154,380
8	5480	41,410	43	2390	156,770
9	5205	46,605	44	2370	159,140
10	4960	51,565	45	2350	161,490
11	4750	56,315	46	2330	163,820
12	4555	60,870	47	2310	166,130
13	4390	65,260	48	2290	168,420
14	4255	69,515	49	2270	170,690
15	4130	73,645	50	2265	172,955
16	4010	77,655	51	2255	175,210
17	3890	81,545	52	2245	177,455
18	3770	85,315	53	2235	179,690
19	3685	89,000	54	2230	181,920
20	3585	92,585	55	2225	184,145
21	3465	96,050	56	2215	186,360
22	3380	99,430	57	2210	188,570
23	3300	102,730	58	2205	190,775
24	3220	105,950	59	2195	192,970
25	3140	109,090	60	2190	195,160
26	3060	112,150	61	2185	197,345
27	2980	115,130	62	2180	199,525
28	2900	118,030	63	2175	201,700
29	2830	120,860	64	2170	203,870
30	2775	123,635	65	2165	206,035
31	2730	126,365	66	2155	208,190
32	2695	129,060	67	2150	210,340
33	2665	131,725	68	2145	212,485
34	2635	134,360	69	2140	214,625
35	2605	136,965			

gerechnet. Die Abweichung liegt zwar innerhalb der seinerzeit angegebenen Fehlergrenzen, ist aber vielleicht doch mitunter von Bedeutung.

Die Ergebnisse für Xenon zeigt Fig. 5 und Tabelle 3.

Während die Stickstoffkurve ebenso wie die Luftkurve mit Polonium und Thorium C' als Strahlungsquellen gewonnen wurde, ist der Verlauf in Xenon nur mit Po untersucht, und zwar wegen der l. c. beschriebenen Feldstörung durch die  $\alpha$ -Strahlenkanone nur bis etwa 13 mm Restreichweite; auf die volle Po-Reichweite, das ist in Xenon etwa 20 mm, wurde unter Berücksichtigung der gemessenen Gesamtionisation (s. d.) extrapoliert. Was die Form der Kurve betrifft, so sieht man sogleich, daß eine Trans-

Tabelle 2. Spezifische Ionisation des einzelnen  $\alpha$ -Teilchens in Luft bei 0° C, 760 mm Hg.

Rest- reichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation	Rest- reichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation
1	1505	1,505	36	2830	146,955
2	4135	5,640	37	2790	149,745
3	5720	11,360	38	2755	152,500
4	6875	18,235	39	2725	155,225
5	6845	25,080	40	2695	157,920
6	6455	31,535	41	2660	160,580
7	5990	37,525	42	2625	163,205
8	5600	43,125	43	2595	165,800
9	5310	48,435	44	2570	168,370
10	5060	53,495	45	2550	170,920
11	4845	58,340	46	2530	173,450
12	4655	62,995	47	2510	175,960
13	4500	67,495	48	2490	178,450
14	4370	71,865	49	2470	180,920
15	4245	76,110	50	2450	183,370
16	4120	80,230	51	2430	185,800
17	4000	84,230	52	2410	188,210
18	3900	88,130	53	2395	190,605
19	3815	91,945	54	2380	192,985
20	3735	95,680	55	2365	195,350
21	3655	99,335	56	2350	197,700
22	3580	102,915	57	2330	200,030
23	3515	106,430	58	2310	202,340
24	3450	109,880	59	2290	204,630
25	3390	113,270	60	2275	206,905
26	3330	116,570	61	2260	209,165
27	3270	119,840	62	2240	211,405
28	3210	123,050	63	2225	213,630
29	3155	126,205	64	2215	215,845
30	3105	129,310	65	2205	218,050
31	3055	132,365	66	2195	220,245
32	3005	135,370	67	2185	222,430
33	2960	138,330	68	2175	224,605
34	2920	141,250	69	2165	226,770
35	2875	144,125			

formation auf die Luftkurve, die bei Stickstoff volle Übereinstimmung brachte, hier nicht ohne weiteres möglich ist. Das rührt daher, daß das Bremsvermögen (bezogen auf Luft) keine Konstante ist, sondern bei den schweren Elementen mit wachsender Geschwindigkeit steigt. Die diesbezüglichen Daten reichen zu einer zahlenmäßigen Durchführung nicht aus, eine qualitative Übereinstimmung erhält man aber ohne weiteres, wenn man die Kurve in der entsprechenden Weise verzerrt. Aus der abweichenden Form der Xenonkurve kann man daher zunächst keine Schlüsse ziehen außer denen, die aus der erwähnten Abhängigkeit des Bremsvermögens allein schon folgen. Die Xenonkurve wurde etwa bei halbem Atmosphären-



Tabelle 3. Spezifische Ionisation des einzelnen  $\alpha$ -Teilchens in Xenon bei 0° C, 760 mm Hg.

Restreichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation	Restreichweite mm	Ionen- zuwachs	Gesamt- ionisation
1	4750	4,750	11	11100	141,570
2	13450	18,200	12	10700	152,270
3	17450	35,650	13	10200	162,470
4	16200	51,850	14	9850	172,320
5	15050	66,900	15	9450	181,770
6	14050	80,950	16	9100	190,870
7	13250	94,200	17	8750	199,620
8	12670	106,870	18	8550	208,170
9	12100	118,970	19	8350	216,520
10	11500	130,470	20	8150	224,670

druck aufgenommen, um sie gegenüber den leichteren Gasen der Länge nach ungefähr gleich dicht belegen zu können. In der Figur ist noch die Bündelkurve, wie sie von Naidu<sup>1)</sup> gemessen wurde, mit eingezeichnet; es ist ohne weiteres verständlich, daß das Maximum bei der Einzelkurve schlanker herauskommt.

Die Gesamtionisation einzelner Po- $\alpha$ -Strahlen in den verschiedenen Gasen und ihre Schwankung. Die Gesamtionisation wurde in den bisher genannten Gasen bestimmt, außerdem in Wasserstoff, um ein Element mit kleiner Atomnummer zu haben, in Neon als Beispiel eines einatomigen Gases von ungefähr

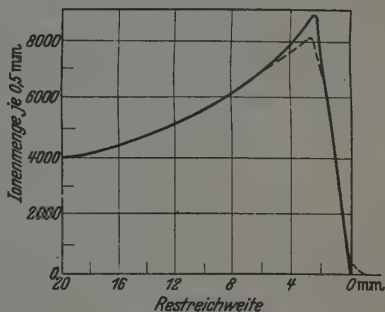


Fig. 5. Ionisationskurve des Einzelteilchens in Xenon.

der gleichen Atomnummer wie Luft und Stickstoff und schließlich noch in Argon und Krypton. Zur Untersuchung diente wiederum die von Stetter und Jentschke angegebene Doppelkammer, natürlich gasdicht eingebaut, wie das ja auch für die vorerwähnten Versuche notwendig war. Die Sondenelektrode war hierbei durch eine 9 cm lange Platte ersetzt (Fig. 6). Nur Wasserstoff ließ sich nicht in dieser Kammer untersuchen wegen der mehrfach größeren Reichweite der Po- $\alpha$ -Teilchen in diesem Gas. Es wurde für  $H_2$  eine einfache, genügend lange Zylinderkammer verwendet (Fig. 7). Das an sich für genaue Messungen unvorteilhafte Feld dieser Kammerform schadete nichts, da der  $H_2$  hochgereinigt war und daher die oben erwähnte hohe Beweglichkeit freier Elektronen ergab. Natürlich

<sup>1)</sup> R. Naidu, Journ. de Phys. 5, 343, 575, 1934.



entfällt bei einer einfachen Kammer die gleichzeitige Kontrolle der Reichweite; das macht aber weiter nichts, denn daß die Reichweiteschwankung

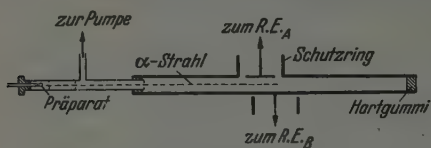


Fig. 6. Doppelkammer; Gesamtionisations- und Reichweitmessung.

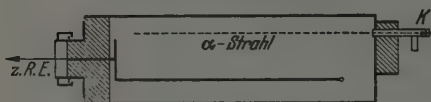


Fig. 7. Wasserstoff-Ionisationskammer.

Literatur vielfach so angegeben sind. Der Wert für Luft ist etwas höher als ihn Stetter und Jentschke (l. c.) angeben (147,500). Der neue Wert ist deswegen vertrauenswürdiger, weil wir inzwischen für die Eichung der Ladungsempfindlichkeit der beiden Röhrenelektrometer einen neuen Schutzringkondensator konstruiert haben, der an anderer Stelle näher beschrieben werden soll.

Tabelle 4.

Gas	Mittlere Gesamtionisation	Relative Ionisation
H <sub>2</sub> .....	146,600	0,99
N <sub>2</sub> .....	142,500	0,96
Luft .....	148,200	1,00
Ne .....	177,900	1,20
Ar .....	186,200	1,26
Kr .....	201,500	1,36
X .....	224,300	1,51

Der Wert für Neon wurde von Anna Eschner<sup>1)</sup> vollkommen unabhängig nach der Methode der Messung der Aufladezeiten eines Lutz-Edelmansschen Elektrometers mit 1,20 bestimmt, in ausgezeichnete Übereinstimmung mit dem obigen.

Für Argon ergab sich gelegentlich von Eichungsversuchen für ein kurzzeitiges Röhrenelektrometer (P. Hawliczek, Diss. Wien 1941, noch nicht veröffentlicht) ebenfalls eine gute Übereinstimmung.

Bei Krypton und Xenon treten, wohl wegen der Winkelstreuung an den schweren Kernen, etwas mehr verkürzte Teilchen auf — die Distanz

<sup>1)</sup> A. Eschner, Wien. Ber. 150, 175, 1941; Mitt. d. Ra.-Inst. Nr. 443.

der Platten ist ja nur 5 mm —, so daß die Auffindung einer richtigen mittleren Gesamtionisation wenig sicher wird.

Die Abhängigkeit der Gesamtionisation von der Gasart hat den erwarteten Verlauf: ihre Größe steigt mit abnehmendem Ionisationspotential: zum Teil ist dies ja schon aus älteren Arbeiten<sup>1)</sup> bekannt.

Neu ist dagegen die Feststellung der Schwankungen der Gesamtionisation, über welche die früheren Bündelmessungen keine Auskunft geben konnten; wir fassen unsere Ergebnisse in Tabelle 5 zusammen, wobei wir wieder nach der Atomnummer ordnen. Die Größe der Schwankung geht nämlich, wie man sofort sieht, mit der Atomnummer<sup>2)</sup>. Für die Schwankung ist nicht die Halbwertsbreite angegeben (die Verteilung ist ja keine gewöhnliche Fehlerkurve), sondern die Gesamtbreite. Die obere Grenze (maximale Ionisation) ist sehr gut definiert — besser als etwa die Reichweite bei Bündelmessungen — und auch für die untere Grenze ergibt sich ein genügend scharfer Knick; daß hier die Zahl der Teilchen nicht überhaupt Null wird, rührt zum Teil auch daher, daß man ein *vollkommen* reines Poloniumpräparat, ganz ohne Selbstabsorption (wegen Eindringung, Oxydation und dergl.) kaum herstellen kann. Will man die Verteilung zum Vergleich mit manchen anderen Angaben durch eine Gaußsche Fehlerkurve approxi-

Tabelle 5.

Gas	Atomnummer	$\Delta R$	$\Delta R \%$	$\Delta Q$
H <sub>2</sub> .....	1	nicht gemessen		3000
N <sub>2</sub> .....	7	2,86	7,6%	7,700
Luft .....		3,0	8,3	8,700
Ne .....	10	5,2	7,9	10,900
A .....	18	3,5	9	12,100
Kr .....	36	3,69	13	20,400
X .....	54	3,1*)	15	33,000

$\Delta R$  = maximale Reichweitendifferenz in mm.

$\Delta R \%$  = maximale Reichweitendifferenz in Prozenten der Gesamtreichweite.

$\Delta Q$  = maximale Differenz der Gesamtionenmenge.

<sup>1)</sup> R. Naidu, Ann. d. Phys. 1, 72, 1934; Journ. d. Phys. 5, 343, 575, 1934; R. W. Gurney, Nature 115, 212, 1925; Proc. Roy. Soc. London (A) 107, 332, 1925. — <sup>2)</sup> Die Reichweitenstreuung in Abhängigkeit von der Atomnummer wurde auf Veranlassung von H. Geiger von P. Preisler (ZS. f. Phys. 53, 857, 1929) behandelt. — \*) Die Reichweitenstreuung bei Xenon ist wegen der in den letzten Millimetern schon erheblichen Winkelstreuung schlecht definiert. Nur in der Anfangsrichtung der Bahn gemessen ist sie größer, längs der wirklichen, geknickten Bahn kleiner. Daher auch die verhältnismäßig geringe Abweichung der Bündelkurve.

mieren, so hat man für den Streuparameter (halbe Breite bei der Ordinate  $1/e$  des Maximums) etwa  $1/4$  der hier angegebenen Schwankung zu nehmen.

*Diskussion.* Wesentlich für die Deutung der Resultate ist, was allerdings aus den Tabellen nicht hervorgeht, sondern nur aus den Ionisations-Reichweitestatistiken über unsere Messungen, der Zusammenhang zwischen Gesamtionisation und Reichweite: je größer die Reichweitenverkürzung, um so kleiner ist auch die Gesamtionisation. Diesen Zusammenhang wollen wir daher an Hand einer unserer Ausschlagstatistiken, die sich auf Luft bezieht, (Fig. 8) noch näher erläutern. Von jedem doppelt registrierten Strahl wird

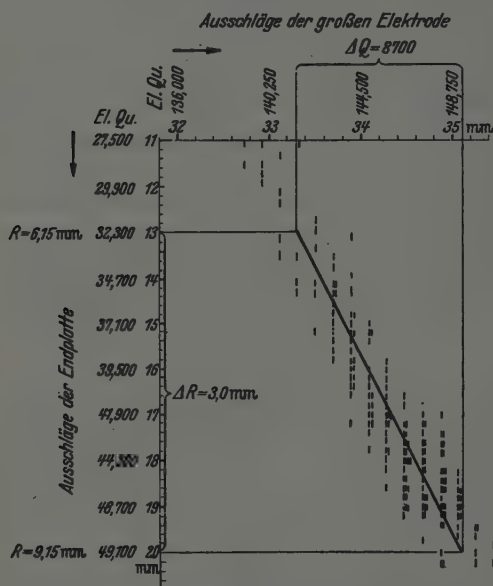


Fig. 8. Ausschlagstatistik mit der Kammer nach Fig. 6, zur Bestimmung der Gesamtionismengen einzelner Po-α-Strahlen.

die auf der Endplatte gemessene Ionenmenge, welche die Reichweite anzeigt, in der Vertikalen, die Gesamtionismenge in der Horizontalen aufgetragen. Bei eindeutigem Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen müssen die so gewonnenen Punkte eine bestimmte Kurve ergeben. Tatsächlich erhält man ein Band. Die endliche Breite dieses Bandes würde bedeuten, daß zu einer bestimmten Reichweite noch etwas verschiedene Werte der Gesamtionisation gehören können. An sich wäre das möglich; denn wenn wir, wie das die bisherige Theorie tut, einer bestimmten Energieabgabe (= Ionisation) verschiedene Reichweiten zuordnen, können auch zu einer bestimmten Reichweite verschiedene Ionisationen gehören.

In Wirklichkeit ist die beobachtete Breite, wenigstens zum größten Teil, durch die Unruhe des Instrumentes zu erklären. Eine exakte Prüfung, wie groß der Beitrag dieses Störhintergrundes ist, erweist sich als schwierig. Man brauchte dazu einen Leerversuch mit Ausschlägen, die frei von jeder spontanen Schwankung sind. Wir ziehen aber den obigen Schluß mit großer Wahrscheinlichkeit daraus, daß die gleiche absolute Verbreiterung gemessen wird, ob es sich nun um Messungen mit der Sonde (0,8 mm) mit einer 1 cm-Elektrode, oder mit dem ganzen großen Auffänger für die Gesamtionisation handelt.

Die richtige Gesamtionisation ergibt sich also durch Aufsuchen des Schwerpunktes in jeder horizontalen Zeile. Die (ausgeglichene) Verbindungslinie ist die Kurve, welche den obigen Zusammenhang eindeutig beschreibt. Das Verfahren ist dann aber immer richtig, auch wenn die Instrumentenschwankung einmal größer ist. Mit zunehmendem Atomgewicht scheint allerdings eine reelle Verbreiterung in geringem Maße stattzuhaben.

Im übrigen trägt auch der Störspiegel des zweiten Röhrenelektrometers zu der scheinbaren Breite, die zu dem ersten gehört, bei: denn die Schwankungen in der Vertikalen (Endplattenausschläge) wirken sich wegen der Schräglage der Statistik auch als Vergrößerungen der horizontalen Breite aus.

In der bisherigen Theorie<sup>1)</sup> wird die zufällige Verteilung der Energieabgabe durch Ionisation längs der Bahn als Ursache der Reichweitenstreuung angenommen. Auf dem kürzeren oder längeren Gesamtweg muß aber die ganze Energie einmal abgegeben werden. Für eine Streuung der Gesamtionisation, über die ja auch früher nichts bekannt war, ist in dieser Theorie kein Platz. Gewiß können die abgelösten Elektronen mehr oder weniger kinetische Energie mitbekommen, aber diese wird doch wieder als Ionisation oder Anregungsenergie verbraucht, lauter kleine Einzelbeträge also, die keine Schwankung der Gesamtionisation von genügender Größe begründen können, wenn auch eine Reichweitenschwankung durchaus damit erklärt werden kann.

Dafür, daß gerade die verkürzten Strahlen auch eine entsprechend kleinere Gesamtionisation haben, wurde schon von dem Verfasser und Jentschke (l. c.) die Erklärung vorgeschlagen, daß größere Energieabgaben, die nicht in Ionisation bestehen, also für diese Messungen verloren gehen, die Ursache der Ionisations- und Reichweitenschwankung sind. Eine Energieabgabe entsprechender Größe wäre die Ionisation innerer

<sup>1)</sup> L. Flamm, Wien. Ber. 123, 1393, 1914; Mitt. d. Ra.-Inst. Nr. 71; N. Bohr, Phil. Mag. 30, 581, 1915; weitere Literatur bei M. St. Livingston u. H. A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9, 245, 1937.

Schalen: die abgegebene Energie könnte als Röntgenstrahlung der Messung entgehen. Allerdings schreibt die Theorie diesem Prozeß nur eine sehr geringe Wahrscheinlichkeit zu und auch die von Bothe und Fränz<sup>1)</sup>, allerdings an anderen Substanzen, gefundene geringe Ausbeute an Röntgenstrahlen spricht vorläufig gegen diese Erklärung. Andere geeignete Prozesse sind aber derzeit nicht bekannt.

Wie stimmt nun der experimentelle Befund bei den verschiedenen Gasen zu der vorgeschlagenen Deutung? Die kleinste Streuung der Gesamt-ionisation haben wir bei  $H_2$ , da als Ursache nur die Verteilung zwischen Ionisations- und Anregungsenergie zur Verfügung steht. Bei  $N_2$  und Luft erfolgt die Ionisation in der Hauptsache an den *L*-Elektronen, die weniger zahlreichen *K*-Ionisationen erzeugen hier schon eine größere Streuung. Unterschied zwischen beiden Gasen gering. Der weitere Zuwachs erklärt sich zum Teil durch die größere Gesamtionisation der Edelgase. Von Neon bis Xenon treten dann immer mehr innere Schalen mit größeren Ablösungsarbeiten ins Spiel. Immerhin werden die innersten Schalen, wenn die Ablösungsarbeiten zu groß werden, wieder zum Teil ausfallen, wie das ja schon aus dem verhältnismäßig langsamen Anstieg des Bremsvermögens hervorgeht.

Parallel damit muß die Reichweitenstreuung gehen; man bekommt sie etwa aus einer Statistik wie Fig. 8 oder aus einer, auch aus dieser ableitbaren Endplattenstatistik. Zu den Ausschlägen werden z. B. nach Tabelle 2 die Reichweiten abgelesen und die Differenz gebildet. Bei A und Kr wurden mangels eigener Messungen bekannte Bündelkurven herangezogen. Übrigens kann man die Reichweitendifferenz auch indirekt bestimmen; wenn die früher aufgestellte Behauptung stimmt, daß alle Ionisationskurven, vom Reichweitenende gesehen, zusammenfallen, so braucht man nur die Differenz der Gesamtionenmenge durch die spezifische Ionisation am Anfang der Reichweite dividieren, um die Reichweitendifferenz zu erhalten<sup>2)</sup>.

Die hier bestimmten Reichwitedifferenzen stimmen mit den sonst bekannten Zahlen genügend überein; im übrigen ist eine gewisse Willkür bei der Festlegung der minimalen bzw. maximalen Reichweite für den Vergleich mit den Ionendifferenzen unbedenklich, weil die betreffenden Punkte doch jedenfalls zusammengehören.

Zum Schluß soll noch einmal die Gesamtionisation in den verschiedenen Gasen an Hand von Fig. 9 betrachtet werden. Der Punkt für Helium ist der Arbeit von Eschner (l. c.) entnommen. Für die Edelgase besteht ein

<sup>1)</sup> ZS. f. Phys. 52, 466, 1928–29. — <sup>2)</sup> Für die schwereren Gase stimmt diese Beziehung nicht mehr; das bedeutet, daß die zusätzlichen Energieabgaben die Form der Ionisationskurve merklich verändern (etwa nach Fig. 3).



gleichmäßiger Gang mit fallendem Ionisationspotential. Der Anstieg scheint im Verhältnis zu gering zu sein: dies kann aber durch die mit wachsender Atomnummer zunehmende Beteiligung der vorletzten Schale (höheres mittleres Ionisationspotential) erklärt werden.  $H_2$  und  $N_2$  fallen trotz

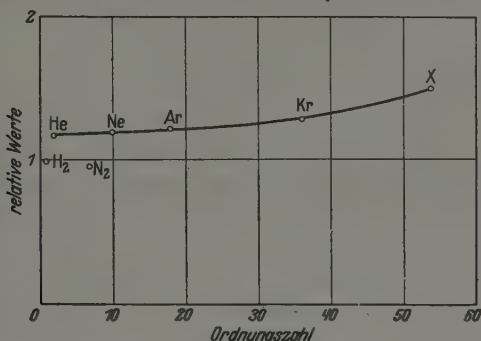


Fig. 9. Abhängigkeit der relativen Gesamtionisation (Luft = 1) von der Ordnungszahl.

wesentlich kleineren Ionisationspotentials nach unten heraus; man muß dies wohl in der Hauptsache auf die für die Dissoziation nötige Energieentnahme schieben.

*Zusammenfassung.* Durch Doppelregistrierungen mit dem Röhrenelektrometer gelingt es, die Ionisationskurve eines einzelnen Alpha-Strahls aufzunehmen. Die Kurven werden für Stickstoff, Luft und Xenon dargestellt und die dazugehörigen Tabellen, wie sie zur Auswertung kernphysikalischer Versuche benötigt werden, gegeben.

Bei der Untersuchung zeigte sich, daß bei den infolge der Reichweitenstreuung etwas verschieden langen Strahlen auch die Gesamtionisation verschieden ist, so zwar, daß zu dem kürzeren Strahl jeweils die kleinere Ionisation gehört. Die Erscheinung wurde darauf an einer Reihe weiterer Gase  $H_2$ , Ne, A, Kr, X geprüft und festgestellt, daß die Ionisationsschwankung ebenso wie die Reichweitenstreuung mit der Atomnummer wächst. die Ionisationsschwankung allerdings wesentlich rascher.

Zur Deutung wird angenommen, daß der Alphastrahl größere Energieverluste erleidet, die nicht in Ionenerzeugung umgesetzt werden, vielleicht durch Röntgenstrahlung bei der Ionisation innerer Schalen.



(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

## Zur Frage der als Normale festgelegten Radiumstandards \*).

Von Carlfriedrich Weiss.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 15. Oktober 1942.)

Eine kritische Betrachtung der Definition der als Normale festgelegten alten und neuen Standards in Verbindung mit sehr sorgfältig durchgeführten aktinometrischen Vergleichsmessungen läßt befürchten, daß die Genauigkeit der Radium-Normale überschätzt worden ist.

*Einleitung.* Schon zu einem frühen Zeitpunkt der radioaktiven Forschung hatte sich die Notwendigkeit gezeigt, meßtechnische Methoden zu entwickeln, um den Radiumgehalt von Präparaten aktinometrisch zu bestimmen. Es handelt sich dabei im wesentlichen um Relativmessungen der von ihnen (d. h. von dem im Gleichgewicht mit dem Radium befindlichen  $\text{RaC}$ ) ausgehenden  $\gamma$ -Strahlung, die bekanntlich der vorhandenen Substanzmenge proportional ist. Da der radioaktive Zerfall ein Kernvorgang ist, erhält man durch eine solche Messung den Gehalt an Radiumatomen („Radiumelement“) unabhängig von der chemischen Verbindung, in der dieses Element vorliegt. Für eine solche Relativmessung benötigt man Normale, deren Beschaffung von der Internationalen Radiumstandard-Kommission im Jahre 1910 beschlossen wurde. Diese Normale liegen nicht nur allen Bestimmungen der Gehalte von Radiumpräparaten (und ebenso von Emanationspräparaten, solchen von  $\text{RaC}$  usw.) zugrunde, sondern auf ihnen beruhen letzten Endes alle radioaktiven Messungen, die wissenschaftlichen sowohl als auch die für die Medizin und für die Technik. Auch alle anderen  $\gamma$ -Strahler werden, wie bekannt, auf Radium relationiert. Es ist daher unumgänglich nötig, die Definition der Normale genau zu kennen, um so mehr, als eine große Anzahl von wichtigen Konstanten die Beziehung auf vollkommen genau definierte Standardpräparate zur Voraussetzung hat.

Die Herstellung von solchen absoluten (sogenannten primären) Standards mit direkt festgelegtem Radiumgehalt ist äußerst schwierig und erfordert Wägungen extremer Genauigkeit sowie die Darstellung allerreinsten Radiumsalze. Im Jahre 1911 wurden solche Standards von M. Curie und von O. Hönigschmid hergestellt. Mit besonderer Sorgfalt wurde

---

\*) Herrn Prof. Geiger zum 60. Geburtstag am 30. September 1942 gewidmet.

dabei die Reinheit des verwendeten Radiumchlorids sichergestellt, insbesondere die Freiheit von Bariumchlorid, dessen letzte Spuren zu entfernen sehr schwierig ist. Neben spektroskopischen Methoden dienen zur Kontrolle fortgesetzte Atomgewichtsbestimmungen. Wichtig ist auch die vollständige Trocknung, die, abgesehen von der gewichtsmäßigen Definition, nötig ist, um Knallgasbildung zu verhindern.

Der von M. Curie hergestellte Standard wurde durch Beschluß der Internationalen Radiumstandard-Kommission von 1912 zum offiziellen internationalen Radiumstandard erklärt, während einer der von Hönigschmid verfertigten als offizieller internationaler Ersatzstandard übernommen wurde. Der erstere wurde im Institut Pierre Curie, der andere im Wiener Radiuminstitut niedergelegt. Ein während der Tagung der Standardkommission vom 25. bis 28. März 1912 in Paris durchgeführter Vergleich der beiden Normale ergab, daß das Verhältnis der Strahlungen mit dem Verhältnis der Gewichte innerhalb der Meßgenauigkeit übereinstimmte; diese wurde auf 0,2% veranschlagt.

Da die beiden primären Standards nicht für den eigentlichen Meßbetrieb verwendet werden dürfen und bestimmungsgemäß nur als Urnormale zu Vergleichszwecken dienen sollten, wurde an sie auf Veranlassung der Standardkommission eine Reihe von sekundären Normalen durch Strahlungsvergleich in Paris und Wien angeschlossen. Von diesen „sekundären Standards“, bei denen keine besonderen Ansprüche an die Reinheit des Radiumsalzes gestellt zu werden brauchen, besitzt jeder interessierte Staat ein Exemplar. Das dem Deutschen Reich überlassene Normal wird in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt aufbewahrt. Auf ihm basierte jahrzehntelang das Standardsystem der Reichsanstalt (tertiäre Standards), sowie viele von ihr für Interessenten angeschlossene Standards. Die Genauigkeit, die die Standardkommission für diese sekundären Normale garantierte, betrug offiziell 0,5%. Im Fall des deutschen Normal wurde der im Eichschein der Standardkommission für 1912 festgesetzte Gehalt von 15,02 mg Radiumelement als auf 0,2% genau verbürgt, vermutlich deshalb, weil die Eichwerte in Paris und Wien besonders gut übereinstimmten; ihre Abweichung voneinander betrug nur 0,5 Promille.

Aus einer Aufstellung der Meßwerte aller sekundären Normale ergibt sich allerdings, daß die Übereinstimmung der Pariser und Wiener Anschlußmessungen verschieden gut ausgefallen ist<sup>1)</sup>. Außerdem weichen die Ergebnisse der beiden Institute nicht stets im gleichen Sinn voneinander ab,

<sup>1)</sup> Siehe z. B. im Lehrbuch von Meyer-Schweidler, 2. Auflage, 1927, S. 274.

d. h. einmal ist der Pariser Wert größer (z. B. um 0,44 % beim portugiesischen Standard), das ander Mal ist es der Wiener Wert (z. B. um 0,81 % beim schwedischen Standard). Da man annehmen muß, daß alle sekundären Standards mit der gleichen Genauigkeit gemessen worden sind, d. h. mit den gleichen Meßmethoden und bei gleicher Zahl der Messungen, muß die gute Übereinstimmung der Messungen in Paris und Wien bei dem deutschen Normal als zufällig angesehen werden. Nimmt man gleiches Gewicht der Pariser und Wiener Meßergebnisse an, und nimmt man fernerhin für die beiden Urnormale völlige Übereinstimmung der Strahlungen mit den durch Wägung ermittelten Radiumgehalten an, dann ergibt sich aus der erwähnten Aufstellung mit Hilfe der Fehlerrechnung, daß die mittlere Abweichung zugehöriger Eichwerte voneinander  $\pm 0,24\%$  beträgt. Da deren Abweichung vom Mittelwert halb so groß ist, ergibt sich die *Fehlergrenze* des Mittelwertes zu  $\pm 0,36\%$ <sup>1)</sup>. Dazu kommt noch ein Abrundungsfehler bei der Mittelwertbildung der Standardkommission bis zu 0,05 %, so daß die von der Kommission angegebenen Werte auf  $\pm 0,41\%$  genau anzusehen sind. Gewährleistet wurde eine Genauigkeit von 0,5 %, die also tatsächlich nicht wesentlich überschritten worden ist. Zusammenfassend ist also zunächst festzustellen, daß immerhin die beiden primären Urnormale auf mindestens 0,2 % und die sekundären relativ zu jenen auf 0,5 % gesichert erschienen.

*Definition der Standards unter Berücksichtigung der Genauigkeit von Ionisationsmessungen.* Es ist eine selbstverständliche Voraussetzung der gesamten Meßtechnik, daß die irgendwelchen Messungen zugrunde liegenden Normale in ihrer Definition die Genauigkeit, mit der Vergleichsmessungen ausgeführt werden können, möglichst um eine Größenordnung übertreffen sollen. Wirft man also die Frage auf, ob die den älteren Radiumstandards zukommende Definition nach diesem Gesichtspunkt ausreicht, muß man die Genauigkeit, mit der Gehaltsbestimmungen durchgeführt werden können, in Betracht ziehen. Die Messungen der Intensität der  $\gamma$ -Strahlung laufen auf eine Bestimmung der von dieser in einem abgeschlossenen Gas-

---

<sup>1)</sup> Es muß darauf hingewiesen werden, daß leider allgemein bei der Fehlerfestsetzung sehr uneinheitlich verfahren wird. Eine exakte Feststellung des mittleren Fehlers kann nur durch eine Fehlerrechnung erfolgen. Durch eine zusätzliche Betrachtung der Verteilung der Streuungen kann man zugleich feststellen, ob eine statistische Verteilung vorliegt. Bezeichnet man dann mit Meßfehlergrenze ( $\pm$ ) ein Intervall, dessen Ausdehnung nach beiden Seiten vom Mittelwert gleich dem dreifachen mittleren Fehler ist, dann kann man mit hoher Wahrscheinlichkeit angeben (rund 1000 : 3), daß der wahre Wert innerhalb dieses Intervalls liegt. In diesem Sinn sind die Fehlerangaben über die in dieser Mitteilung beschriebenen Messungen aufzufassen.

volumen erzeugten Ionisation hinaus. Da die zugehörigen Ionisationsströme sehr klein sind, werden sie bekanntlich mit elektrometrischen Methoden gemessen, teils direkt im Relativmaß, teils durch Kompensation. Die Messung verläuft üblicherweise derart, daß vor und nach dem zu bestimmenden Präparat der Bezugsstandard gemessen wird. Die sogenannte „natürliche Zerstreuung“, d. h. die in Abwesenheit der Präparate vorhandene Ionisation wird dabei gesondert am Anfang und am Ende jeder Meßreihe bestimmt und in Abzug gebracht. Je nach der besonderen Ausgestaltung der Meßmethode ist noch auf eine Reihe von Einzelheiten zu achten, deren Vernachlässigung zu systematischen Fehlern führt. Dazu gehört unter anderem der Einfluß der Sekundärstrahlung aus der Umgebung, der der Filterung der Strahlung durch die Kammerwandung, der der Form der Präparate, sowie der von Isolator nachwirkungen. Außerdem muß der Absorption der Strahlung in den Umhüllungen des Präparats und in dem Radiumsalz selbst Rechnung getragen werden<sup>1)</sup>. Von der Relationierung anderer  $\gamma$ -Strahler auf Radium sei hier abgesehen.

Derartige Messungen zeigen Streuungen, die durch vielerlei Schwankungen zustandekommen. Dazu gehören: die primären Schwankungen der Ionisation und der natürlichen Zerstreuung, ferner Schwankungen der Ionisation durch Druck- und Temperaturänderungen während der Messung, solche infolge von Kapazitätsänderungen, weiterhin persönliche Schwankungen bei den Messungen (Stoppzeiten, Abstandsungenauigkeiten) usw. Die Meßgenauigkeit der einzelnen Messung ist deshalb beschränkt. Da aber die Schwankungen statistischer und nicht systematischer Natur sind, führt eine Häufung von Messungen zu einer entsprechenden Verkleinerung der Fehlergrenzen. In der Reichsanstalt z. B. werden für eine normale technische Bestimmung des Radiumgehalts vier Meßreihen (von mehreren Ablesungen je Reihe) an vier verschiedenen Tagen ausgeführt, und zwar durch mindestens zwei Beobachter an mehreren Instrumenten; die garantierte Meßfehlergrenze beträgt dann 1%<sup>2)</sup>. Für eine Herabsetzung auf 0,5% reichen sechs bis acht solcher Meßreihen aus. Um eine weitergehende Verkleinerung der Meßfehlergrenze zu erreichen, bedarf es zunehmender Häufung der Messungen. Prinzipiell kann man jede gewünschte Genauigkeit erhalten, jedoch ist eine natürliche Grenze durch die immer mehr oder weniger vor-

<sup>1)</sup> Die Absorption in der Umhüllung hängt von der Meßanordnung ab und muß für diese experimentell bestimmt werden. Über die Bestimmung der Absorption im Salz selbst vgl. H. Fränz u. C. Weiss, Phys. ZS. 41, 345, 1940 bzw. 36, 486, 1935. — <sup>2)</sup> Bei Anstieg eines nicht im Gleichgewicht befindlichen Präparats und bei größeren Beträgen der Absorption in der Umhüllung ist die garantierte Fehlergrenze höher.

handenen systematischen Fehler gegeben, deren Betrag von der Meßapparatur abhängt und die bei genauen Messungen nach Möglichkeit ausgeschaltet werden müssen. Bei weiter unten beschriebenen Messungen wurde z. B. durch 190 Meßreihen (von allerdings je acht Einzelablesungen) die Fehlergrenze auf  $\pm 0,05\%$  heruntergedrückt, wobei es sichergestellt worden ist, daß diese Fehlerangabe nicht durch systematische Fehler verfälscht ist.

Kehrt man nun zu der weiter oben aufgeworfenen Frage zurück, ob die Definition der erwähnten älteren Standards ausreicht, so sieht man, daß man relativ leicht eine Meßgenauigkeit von  $0,5\%$  erreichen kann, die also die Genauigkeitsgrenze erreicht, innerhalb der die sekundären Standards definiert sind. Eine beliebig hochgetriebene Genauigkeit wird also bei Messungen der  $\gamma$ -Strahlung zwecklos bleiben. Soll z. B. ein RaC-Präparat auf Radiumgleichgewicht geeicht werden, mit Hilfe eines tertiären Standards, der sorgfältig innerhalb von  $\pm 0,2\%$  an einen sekundären angeschlossen worden ist, und ist diese RaC-Messung selbst auf  $\pm 0,5\%$  genau, dann erhält man nach einem Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die resultierende Genauigkeit des Präparats  $\pm \sqrt{0,5^2 + 0,2^2 + 0,5^2} \% = \pm 0,7\%$ . Eine wesentliche Verbesserung der Genauigkeit der RaC-Messung auf  $\pm 0,2\%$  ändert nur wenig an der gesamten Definition des Präparats, denn man erhält  $\pm \sqrt{0,5^2 + 0,2^2 + 0,2^2} \% = \pm 0,6\%$ . Es liegen also ähnlich unbefriedigende Verhältnisse vor, wie sie bis vor kurzem in der Photometrie bestanden, daß nämlich die Genauigkeit, mit der eine Relativmessung ausgeführt werden kann, diejenige übertrifft, mit der das Normal definiert ist. Das alte Normal der Photometrie, die Hefnerkerze, konnte allerdings nicht genau genug reproduziert werden, während im Gegensatz dazu die Definition der sekundären Radiumstandards durch Beschluß der Standardkommission festgesetzt worden ist, offenbar, weil seinerzeit keine größere Genauigkeit gefordert wurde. An diesem Zustand wäre natürlich eine Änderung denkbar und auch möglich gewesen, etwa durch eine neue Vergleichung der primären und sekundären Standards. Es entzieht sich unserer Kenntnis, ob eine solche Neueichung jemals ins Auge gefaßt worden ist. In den Pionierzeiten der Radioaktivität mag sicher die Definition der sekundären Normale ausgereicht haben. Diese *jetzt* noch nahzueichen, wäre aus einem ganz anderen Grunde unangebracht, weil nämlich die Lebensdauer der Standards begrenzt ist. Durch das unaufhörliche Bombardement der  $\alpha$ -Teilchen wird die Glaswandung allmählich zerstört, was im Verein mit dem ständig zunehmenden Überdruck durch Heliumbildung und durch aus der Glaswandung freiwerdende Gase früher oder später zu einer Explosion



und Zertrümmerung der alten Normale führen muß. Das gilt natürlich in gleicher Weise für die primären wie für die sekundären Standards.

*Herstellung neuer primärer Radiumstandards.* Die Gefährdung der Standards ließ es ratsam erscheinen, an eine Herstellung neuer Normale zu denken, als Ersatz für die alten primären und sekundären, wobei dann auch die Frage der Definition neu zu erheben wäre. Eine Gelegenheit hierzu ergab sich, als sich O. Hönigschmid im Jahre 1933 zu einer Neubestimmung des Atomgewichts des Radiums entschloß. Das ihm von der Union Minière Du Haut Katanga zur Verfügung gestellte reine Radiumchlorid wurde durch ihn einer großen Anzahl von Reinigungs- und Kristallisationsprozessen unterworfen und kann daher mit Sicherheit als das reinste Radiumsalz angesprochen werden, das jemals existiert hat. Sein Gehalt an Barium ergab sich gemäß einer von Gerlach ausgeführten spektroskopischen Untersuchung zu maximal 0,002 bis 0,003 At.-%. Es erwies sich fernerhin als völlig frei von anderen Metallen. Nach Ausführung der Atomgewichtsbestimmung stellte auf Anregung der Internationalen Standardkommission Hönigschmid aus diesem extrem reinen Radiumchlorid 20 neue primäre Standards her, die als Eigentum der Union Minière von dieser den interessierten offiziellen Radiuminstituten zur Verfügung gestellt wurden. Die von Hönigschmid selbst ausgeführten Wägungen erreichten das höchstmögliche Maß an Genauigkeit.

Da diese neuen primären Standards dazu bestimmt waren, die beiden alten primären Urnormale in Paris und Wien ebenso wie die alten sekundären abzulösen, erwarb die Physikalisch-Technische Reichsanstalt im Jahre 1935 einen solchen neuen primären Standard (bezeichnet mit Nr. 5426) von der Union Minière<sup>1)</sup>. Sein Gehalt betrug im Juni 1934 gemäß der Wägung von Hönigschmid  $19,19 \pm 0,01$  mg Radiumchlorid, was einem Gehalt von 14,61 mg Radiumelement entspricht<sup>2)</sup>. Bald nach seiner Erwerbung wurde in der Reichsanstalt die aktinometrische Vergleichung mit dem alten sekundären Normal begonnen. Einzelheiten der Meßanordnung, die für diese und weiter unten besprochene Messungen benutzt wurde, seien hier kurz mitgeteilt.

*Einzelheiten der Meßmethode der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.* Die Ionisationskammern der Reichsanstalt sind liegende Bleizylinder von 14 cm Innendurchmesser und 15 cm Länge, die auf einem

---

<sup>1)</sup> Der deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Erwerbung ermöglicht hat, ist die Reichsanstalt zu besonderem Dank verpflichtet. — <sup>2)</sup> Die Meßfehlergrenzen der Wägung wurden uns persönlich durch eine freundliche Mitteilung von Herrn Prof. Hönigschmid im Jahre 1935 übermittelt.



Hölggestell aufgebaut sind (Fig. 1). Ihre Wandstärke beträgt 2,2 cm, mit Ausnahme der Stirnwand, die dem  $\gamma$ -strahlenden Präparat zugewendet ist und eine Dicke von 0,5 cm aufweist. Die Präparate befinden sich in größerem Abstand von der Stirnwand, so daß diese von nahezu paralleler Strahlung durchsetzt wird. Kleine Abweichungen der Form der Präparate untereinander wirken sich nicht aus, solange die Abmessungen klein gegen die Kammerdimensionen bleiben. Durch die dicke Bleiwandung der Kammer wird der Einfluß der Streustrahlung aus der Umgebung stark herabgesetzt. Auf der Rückseite der Kammer befindet sich ein kleines Gehäuse, das ein Goldblattelektrometer enthält und noch zusätzlich durch Blei geschützt ist. Der Träger des Goldblattes ist isoliert und in direkter Verbindung

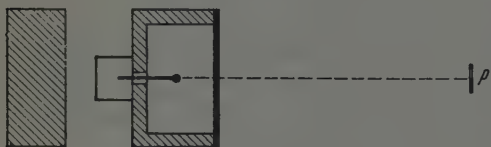


Fig. 1. Skizze der Meßanordnung.

mit der Innenelektrode der Kammer. Das Elektrometer wird mit einem Ablesefernrohr mit Okularskala betrachtet; verfahren wird nach der Entlademethode. Von diesem Typ werden drei

Meßinstrumente in etwas verschiedener Aufstellung und Ausführung — sie unterscheiden sich untereinander durch die Form der Innenelektrode (Kugel, Stift, Scheibe) und auch hinsichtlich des Isolatormaterials — gleichmäßig benutzt. Ein Sättigungsdefizit liegt bei den verwendeten Spannungen und bei den maximal zugelassenen Strömen von etwa  $10^{-12}$  A mit Sicherheit nicht vor. Die Instrumente erweisen sich dann besonders zuverlässig und frei von Störungen, wenn sie ununterbrochen in Betrieb sind, weswegen sie seit langen Jahren ständig aufgeladen werden, auch wenn keine Messungen stattfinden.

Die hier skizzierte Meßanordnung der Reichsanstalt hat den Vorzug, daß sie prinzipiell besonders einfach ist. Für genaueste Vergleichen ist die einfachste Anordnung die beste. Der Vorteil modernerer Methoden (z. B. solcher mit Gleichstromverstärkung), nämlich der Zeitgewinn, ist für die hier gestellte Aufgabe bedeutungslos.

*Aktinometrische Vergleichung des alten und des neuen Berliner Normals.* Bei der Vergleichung der Strahlung des neuen primären mit der des alten sekundären Standards lagen insofern besonders günstige Verhältnisse vor, als sich die Gehalte der beiden Präparate nur um 1,3% unterscheiden. Da fernerhin der alte sekundäre Standard nur 1,6 mg  $\text{BaCl}_2$  enthält, ist die innere Absorption im Salz für beide Normale praktisch gleich und kann

deshalb vernachlässigt werden. Da außerdem nahezu gleiche Abmessungen und Formen vorliegen und damit auch nahezu gleiche Glasmassen der Umhüllungen, ist auch kein Unterschied in der von diesen ausgehenden Sekundärstrahlung zu erwarten<sup>1)</sup>. Die Wägungsfehlergrenzen des primären Standards wurden, wie bereits erwähnt, zu  $\pm 0,01$  mg auf 19,19 mg  $\text{RaCl}_2$  veranschlagt. Somit schien der Gehalt des Normals auf 0,5 Promille definiert zu sein (s. w. u.). Um die gleiche Fehlergrenze bei den Strahlungsmessungen zu erreichen, war allerdings eine

erhebliche Anzahl von Messungen nötig. Sie mußten mehrfach aus äußeren Gründen auf längere Zeit unterbrochen werden und konnten erst im Jahre 1940 abgeschlossen werden. Von fünf Beobachtern wurden an drei Instrumenten schließlich insgesamt 190 Meßreihen durchgeführt, von denen jede je 8 Einzelmessungen des neuen und des alten Standards enthielt. Der zu erwartende

Sollwert des Strahlungsverhältnisses des primären zum sekundären Normal, d. h. das Gewicht (Ra-El.) des ersteren dividiert durch den Eichwert des letzteren (unter Berücksichtigung der Absorption in den Umhüllungen sowie des zeitlichen Abfalls des letzteren) betrug 0,9821<sup>2)</sup>.

Bereits die ersten Messungen zeigten, daß das gemessene Verhältnis der  $\gamma$ -Strahlung von diesem Sollwert beträchtlich abweicht. Als Mittelwert ergab sich 0,9850. Die Fig. 2 zeigt die Verteilung der gemessenen Werte. Aufgetragen ist als Abszisse das Verhältnis der Strahlungen, als Ordinate die Zahl der Meßserien, wobei alle innerhalb eines Intervalls von 0,001 fallenden Serien zusammengezählt sind und die Summe in die Mitte des Intervalls eingetragen ist. Die ausgezogene Kurve ist eine Fehlerfunktion;

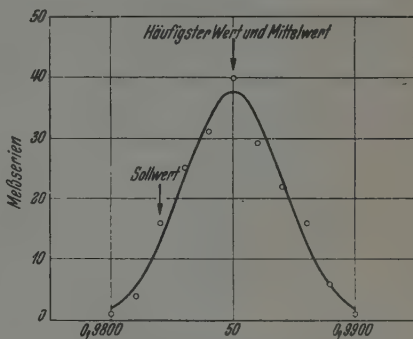


Fig. 2. Verteilung der gemessenen Werte bei der Vergleichung des alten und des neuen Berliner Normals.

<sup>1)</sup> Die Standards wurden noch von einer dünnen Schutzhülle aus Glas umgeben, in der sie durch ein wenig Glaswolle fixiert sind; daß diese zweite Hülle keine Störungen verursacht, wurde noch besonders nachgewiesen (s. w. u.).  
<sup>2)</sup> Gehalt des alten Normals im Oktober 1912: 19,73 mg  $\text{RaCl}_2$  = 15,018 mg Ra-El.; Radiumgehalt am 2. Juni 1934: 14,877 mg. Aus den Glashüllen austretende Strahlung (insgesamt 0,69 mm Glas = 0,483% Absorption) 14,805 mg. Gehalt des neuen Normals am 2. Juni 1934: 14,607 mg Ra-El.; austretende Strahlung (0,66 mm Glas = 0,462% Absorption) 14,540 mg. Sollwert des Verhältnisses  $14,540/14,805 = 0,9821$ .

sie wurde so gezeichnet, daß sie den Meßpunkten gut angepaßt ist. Der Mittelwert aller Strahlungsmessungen fällt in das häufigste Intervall. Die Streuung ist symmetrisch, die größte Abweichung vom Mittelwert beträgt 0,6%. Der mittlere Fehler beträgt 0,15 Promille, d. h. die Fehlergrenze rund 0,5 Promille.

Die Abweichung des Wertes des Strahlungsvergleichs vom Sollwert — 0,3% — erschien uns damals angesichts der ausgezeichneten Übereinstimmung der alten Pariser und Wiener Eichmessungen unerwartet hoch. Da zunächst außer Zweifel zu stehen schien, daß der neue primäre Standard mit seinem direkt durch Wägung ermittelten Gehalt als besser definiert anzusehen ist, wurde der Eichwert des sekundären Standards auf Grund des Strahlungsvergleichs neu festgesetzt. Dieses alte Normal ergibt sich damit um 0,3% kleiner als sein Sollwert. Dementsprechend wurde das gesamte Standardsystem der Reichsanstalt, dessen austretende Strahlung an das alte Normal angeschlossen ist, mit Wirkung vom 1. Januar 1941 um 0,3% herabgesetzt. Durch direkte Vergleichsmessungen eines dieser tertiären Standards (von rund 42 mg Ra-El. Gehalt) mit dem neuen primären Normal ergab sich übrigens genau die gleiche Abweichung, d. h. die austretende Strahlung dieses an das alte Normal angeschlossenen Standards erwies sich auch um 0,3% kleiner als ihr Sollwert. Diese innere Übereinstimmung der drei Messungen ( $P : S$ ,  $S : T$ ,  $P : T$ ) beweist das Fehlen von systematischen Fehlern; dabei ist zu beachten, daß der tertiäre Standard  $T$  fast dreimal soviel Radium enthält wie das neue primäre ( $P$ ) und das alte sekundäre ( $S$ ) Normal, was das Vorhandensein von Sättigungsdefiziten ausschließt.

*Aktinometrische Vergleichung des neuen Berliner und des alten Pariser Normals.* Die eben besprochene Abweichung des alten sekundären Normals um 0,3% vom Sollwert erschien, wie schon gesagt, beim ersten Anblick zu hoch angesichts der ausgezeichneten Übereinstimmung der Pariser und Wiener Messungen. Sie kann unter Umständen bei  $\gamma$ -Strahlungsmessungen durch die Verschiedenartigkeit der Meßmethoden hereingebracht werden. Da aber bei dem hier angewandten Verfahren keinerlei Berechtigung für eine methodische Korrektur besteht, und da andererseits auch keine sachliche Erklärung der beobachteten Diskrepanz möglich war, erschien es angezeigt, das neue Berliner primäre Normal direkt mit einem der alten Urnormale zu vergleichen. Durch das besondere Entgegenkommen von Frau Joliot-Curie, die alle Bedenken hinsichtlich des Transportes des sehr gefährdeten alten Pariser Urnormals zurückgestellt hat, war es im vorigen Jahr möglich, den Anschluß an dieses mit den Instrumenten der Reichsanstalt vorzu-

nehmen. Die gleichzeitig geplante Vergleichsmessung mit dem in Wien seinerzeit deponierten alten zweiten Urnormal mußte zunächst zurückgestellt werden, da es dort nicht mehr vorhanden und seine Existenz zeitweilig zweifelhaft war; es ist 1934 gegen einen neuen primären Standard eingetauscht worden.

Auch in diesem Fall lagen günstige Meßverhältnisse vor. Die Gehalte der beiden Standards unterscheiden sich nur um etwa 13% voneinander. Deshalb kann auch hier der Einfluß der inneren Absorption im Salz vernachlässigt werden. Das alte Pariser Normal weicht allerdings in seiner Form von der des neuen Berliner Standards ab, es ist kleiner sowohl seiner Länge als seinem Durchmesser nach (s. w. u.). Unter Berücksichtigung des Abfalls des alten Urnormals und unter Berücksichtigung der Absorption in den Umhüllungen erhält man aus den durch Wägung bestimmten Radiumgehalten für das Verhältnis der austretenden Strahlung des neuen Berliner zu der des alten internationalen primären Standards 0,8806 (Sollwert)<sup>1)</sup>. Als Mittelwert aller Messungen ergab sich dagegen 0,8784. Die Fig. 3 zeigt die Verteilung der gemessenen Werte, wobei hinsichtlich der Auftragung der Meßwerte genau wie bei Fig. 2 verfahren worden ist. Auch hier wurde eine symmetrische Streuung um den Mittelwert erhalten. Die Meßfehlergrenze beträgt ebenfalls 0,5 Promille.

Das neue Berliner Normal ergibt sich, bezogen auf das Pariser Normal, als zu klein<sup>2)</sup>. Drückt man das Verhältnis der Strahlungen so aus, daß man auf gleiche Radiumsalzmengen bezieht, dann erhält man für das Verhältnis des neuen Berliner zum alten internationalen Standard 0,9975. Es erhebt sich natürlich die Frage, ob dieses Resultat nicht noch einer methodischen Korrektur bedarf, die der Verschiedenheit der Form der beiden Präparate entspringt. Da die Abmessungen der Standards sehr klein gegen die Kammerdimensionen sind und außerdem der Meßabstand groß ist (90 bis 110 cm),

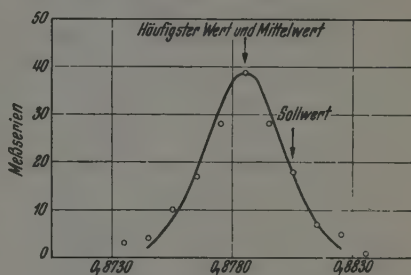


Fig. 3. Verteilung der gemessenen Werte bei der Vergleichung des neuen Berliner und des alten Pariser Normals.

<sup>1)</sup> Gehalt des Pariser Urnormals im August 1911: 21,99 mg  $\text{RaCl}_2$  = 16,739 mg Ra-El.; Radiumgehalt am 2. Juni 1934: 16,573 mg. Aus den Glashüllen austretende Strahlung (insgesamt 0,53 mm Glas = 0,371% Absorption) 16,512 mg. Sollwert des Verhältnisses  $14,540/16,512 = 0,8806$ . —

<sup>2)</sup> Erwartet wurde gerade das umgekehrte Verhalten!

ist in dieser Hinsicht keine Korrektion erforderlich. Hingegen ist aber noch folgendes zu bedenken: Das alte Urnormal ist infolge seines kleineren Durchmessers und seiner kleineren Länge von einer kleineren Glasmasse umgeben. Die von den Umhüllungen der beiden Präparate in die Richtung des Meßinstruments gestreute Strahlung (die an sich sicher nur sehr wenig zur direkten Strahlung zufügt) wird infolgedessen bei den beiden Standards verschieden groß ausfallen. Wenn indessen dieser Effekt von Einfluß wäre, dann müßte er gerade im umgekehrten Sinn wirken, d. h. die Strahlung des Urnormals müßte dadurch relativ zu klein ausfallen. Im übrigen ist diese gestreute Strahlung weicher als die primäre Strahlung, so daß also eine Änderung des Verhältnisses der Gesamtstrahlung eintreten müßte, wenn man diese zusätzlich filtert. Vergleichsmessungen, die mit 1 cm Bleizusatz — diesen natürlich direkt vor der Kammer — ausgeführt wurden, führten indessen genau zu dem gleichen Mittelwert 0,8784 des Strahlungsverhältnisses wie die Messungen ohne Bleizusatz.

*Diskussion der beiden Vergleichen.* Die Ergebnisse der bisher besprochenen Messungen sind in zweierlei Hinsicht bemerkenswert:

1. Mit Hilfe der beiden Vergleichen kann man das alte Berliner sekundäre Normal an das alte Pariser Urnormal neu anschließen (zu einer direkten Anschlußmessung reichte die Leihzeit des Urnormals nicht mehr aus). Da die Strahlung des alten Berliner Normals um 0,3 % kleiner ist als ihr Sollwert, bezogen auf das neue primäre Normal, und da dessen Strahlung wiederum um 0,25 % kleiner ist als ihr Sollwert, bezogen auf das Pariser Urnormal, so ergibt sich eine Abweichung von 0,55 % für den Eichwert des alten deutschen Normals gegenüber dem Wert der Standardkommission. Bei dieser Zahlenangabe ist die zweite Dezimale auf  $\pm 5 \cdot \sqrt{2} = \pm 7$  unsicher. Die Tatsache, daß die neue aktinometrische Gehaltsbestimmung des alten sekundären Standards zu einem um den angegebenen Betrag kleineren Eichwert führt als die Bestimmung der Standardkommission, ist nicht beunruhigend, denn der neue Eichwert liegt noch in dem Genauigkeitsbereich, der sich für die Definition der sekundären Normale (bezogen auf die Urnormale) auf Grund der Gesamtbetrachtung ihrer Eichwerte ergab (vgl. S. 654).

2. Es ist zweifellos überraschend, daß die Strahlung des neuen primären Berliner Normals um 0,25 % kleiner ist als ihr Sollwert, bezogen auf das Pariser Urnormal. Aber auch diese Tatsache brauchte nicht zu beunruhigen, sofern *alle* neuen primären Standards dieses Verhalten in gleicher Weise zeigen würden. Mit Sicherheit sind ja diese neuen Normale genauer ausgewogen und enthalten reineres Radiumchlorid als die beiden alten Ur-



normale. Aus dieser Erwägung heraus ist auch fürs erste das Standard-system der Reichsanstalt an den neuen Berliner Standard — wenn auch mit Vorbehalt — im vorigen Jahr angeschlossen worden. Leider hat es sich nun gezeigt, daß keineswegs die neuen primären Normale von 1934 ein gleichartiges Verhalten in bezug auf die alten Urnormale aufweisen.

*Weitere Vergleichenungen neuer primärer Standards.* Die 20 neuen primären Standards von 1934 sind nicht systematisch miteinander und mit den Urnormalen verglichen worden, sondern alsbald nach ihrer Herstellung von den Eigentümern, der Union Minière, den Interessenten zum Kauf angeboten worden. Solche Vergleichenungen sind außer der oben besprochenen des Berliner Normals lediglich erfolgt für die beiden von Washington erworbenen Normale (Nr. 5437 und 5440) und für die beiden als Ersatz der Urnormale gedachten Standards Nr. 5430 (Paris) und Nr. 5428 (Wien)<sup>1</sup>). Die folgende Tabelle 1 enthält die bis zur Mitte des Jahres 1941 in bezug auf das Pariser Urnormal gemessenen neuen Standards; von den in Wien ausgeführten Messungen sei zunächst abgesehen aus Gründen, die weiter unten erörtert werden. Die angegebenen Strahlungsverhältnisse sind umgerechnet auf gleiche Radiumsalzmengen.

Tabelle 1.

Gemessene Standards	Strahlungsverhältnisse	Gemessen in	Gemessene Standards	Strahlungsverhältnisse	Gemessen in
5430	1,0020	Paris	5440	0,9959	Paris
5437	0,9970	Paris	5426	0,9975	Berlin

Das Ergebnis dieser vier Vergleichenungen, die *direkt* mit dem Pariser Urnormal ausgeführt worden sind, widerspricht allen Erwartungen. Die Abweichungen der neuen primären Standards von ihrem Sollgehalt gehen nach beiden Seiten und umfassen einen Streubereich von 0,61 %. Wägungs-ungenauigkeiten dieser Größe sind undenkbar. Bei dieser Sachlage mußte vor jeder weiteren Diskussion zunächst versucht werden, möglichst viel von den fehlenden primären Standards zu vergleichen. Durch das Entgegenkommen der Union Minière wurden die noch in ihrem Besitz befindlichen Standards Nr. 5435, 5451 und 5442 der Reichsanstalt zur Vergleichenung überlassen. Die den Wägungen von Hönigschmid entsprechenden Radiumgehalte betragen 9,98 bzw. 20,67 und 102,71 mg Radiumelement. Fernerhin wurde uns das alte Wiener Urnormal zur Verfügung gestellt. Da sich das Pariser Urnormal zu diesem Zeitpunkt wieder in Paris befand, und es

<sup>1</sup>) Nach persönlicher freundlicher Mitteilung von Frau Joliot-Curie.



andererseits ratsam erschien, *alle* Vergleiche auf ein einziges Urnormal zu beziehen, wurden diese vier Standardpräparate mit dem neuen Berliner Normal (Nr. 5426) verglichen, das ja nun, wie weiter oben beschrieben, aufs sorgfältigste an das Pariser Urnormal angeschlossen worden ist; somit können sie durch eine Umrechnung auch auf das Pariser Urnormal bezogen werden.

Die Strahlungsvergleichungen der beiden Standards Nr. 5435 und 5431 wurden in der gleichen Weise wie die früheren durchgeführt. Da in diesen Fällen die Gehalte sich von dem des Berliner neuen Normals um 47 bzw. 29% unterscheiden, wurde um die innere Absorption im Salz korrigiert. Die angebrachte Gesamtkorrektion ist klein, da sowohl bei den Präparaten wie bei dem Vergleichsstandard korrigiert werden muß, und macht in beiden Fällen weniger als 1 Promille aus. Für die Verhältnisse der austretenden Strahlung des neuen Berliner Normals zu der der beiden Standards erhält man unter Berücksichtigung der Absorption in den Umhüllungen und in den Salzen aus den durch Wägung bestimmten Radiumgehalten 1,4688 bzw. 0,7064 (Sollwerte)<sup>1)</sup>. Als Mittelwert aller Messungen ergab sich dagegen 1,4695 bzw. 0,7100. Die Zahl der Messungen war kleiner als bei den vorhergehenden Vergleichen. Insgesamt wurden für beide Vergleichsmessungen je 112 Reihen zu je 8 Einzelmessungen des Prüf- und des Vergleichsstandards durchgeführt. Davon wurde ein Teil ohne Schutzrohre vorgenommen, so daß in diesem Fall jede Absorptionskorrektion wegfällt (außer der im Salz), weil *alle* Standards in ein Glasrohr von 0,27 mm Wandstärke eingeschlossen sind. Wie zu erwarten war, ergab eine Umrechnung der Messungen aufeinander, daß durch die Schutzrohre *kein* Fehler in das Strahlungsverhältnis hereingebracht wird. Die mit Hilfe der Fehlerrechnung bestimmten Meßfehlergrenzen betrugen für beide Vergleichen  $\pm 0,7$  Promille. Auch hier ergaben sich symmetrische Verteilungen der Streuungen um den Mittelwert wie bei den früheren Vergleichen. Aus den Messungen folgt für das Verhältnis der Strahlungen des neuen Berliner Normals zu der der beiden Standards, umgerechnet auf gleiche Radiumsalzmengen, 1,00048 bzw. 1,0051. Bezieht man schließlich die Strahlungen von Nr. 5435 und 5431 mit Hilfe der oben besprochenen Eichung des neuen Berliner Normals auf

<sup>1)</sup> Gehalte der beiden Normale am 2. Juni 1934: 9,934 bzw. 20,667 mg Ra-El. Aus den Glashüllen austretende Strahlung (0,59 bzw. 0,60 mm Glas = 0,413 bzw. 0,420% Absorption) 9,893 bzw. 20,580 mg. Sollwerte der Verhältnisse nach Korrektion um die Absorption im Salz

$$\frac{14,540 \cdot 0,9982}{9,893 \cdot 0,9989} = 1,4688 \text{ bzw. } \frac{14,540 \cdot 0,9982}{20,580 \cdot 0,9983} = 0,7064.$$

das Pariser Urnormal, so erhält man für das Verhältnis ihrer Strahlung zu der des Urnormals, wieder auf gleiche Radiumsalzmengen umgerechnet 0,9970 bzw. 0,9924. Dabei ist die letzte Dezimale wegen der Umrechnung auf  $\pm 9$  unsicher.

Die Vergleichung des Standards Nr. 5442 mit dem neuen Berliner Normal bot einige Schwierigkeiten, die von der verschiedenen Größenordnung der Radiumgehalte der beiden Präparate herrühren. Der aus meßtechnischen Gründen erforderliche Meßabstand dieses Standards von rund 103 mg Gehalt ist derartig groß, daß die Abfallgeschwindigkeit für das Bezugsnormal sehr klein wird; in diesem Fall gehen Schwankungen der „natürlichen Zerstreung“ in starkem Maß ein. Die Streuungen der einzelnen Messungen waren deshalb größer als normal, was die Meßfehlergrenze entsprechend heraufsetzt. Weiterhin ist bei solcher Verschiedenheit der zu vergleichenden Gehalte die Möglichkeit systematischer Fehler nicht von der Hand zu weisen (z. B. durch Isolatornachwirkungen und Streustrahlungen). Schließlich werden solche Messungen auch außerordentlich zeitraubend. Von solchen *direkten* Vergleichsmessungen wurden deshalb nur zweimal 28 Reihen zu je acht Einzelmessungen, mit und ohne Schutzrohr durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Messungen stimmen nach Umrechnung wieder sehr befriedigend, nämlich auf 0,6 Promille, überein. Weitere 56 Reihen wurden mit einem Zwischenstandard ausgeführt; ihr Mittelwert stimmt mit dem der vorhergehenden direkten Vergleichungen gut (auf 1,2 Promille) überein, aber die Streuungen waren auch in diesem Fall noch recht groß (größte Abweichung vom Mittelwert 1,1%). Deshalb wurden schließlich noch weitere 32 Meßreihen durchgeführt, bei denen Emanationspräparate als meßbar veränderliche Zwischenstandards benutzt wurden. Diese ließen wir nach der Herstellung zunächst soweit abklingen, daß sie möglichst gut mit dem Gehalt des großen Standards übereinstimmten. Nach erfolgter Vergleichung ließen wir weiter bis auf den Wert des neuen Berliner Normals abklingen, unter genauer Messung der Zeitdifferenz bis zur zweiten Vergleichung. Aus den beiden Vergleichungen, der Zeitdifferenz und der sehr genau bekannten Zerfallskonstanten der Radiumemanation ergibt sich das Verhältnis der Strahlungen der beiden zu vergleichenden Standards besonders genau, wobei die vorerwähnten Schwierigkeiten wegfallen. Die größte Abweichung vom Mittelwert beträgt nur 0,5%. Es ist sehr befriedigend, daß der Mittelwert dieser Vergleichung genau mit dem der vorhergehenden, unter Benutzung eines Zwischenstandards ausgeführten, zusammenfällt. Als gewogener Mittelwert aller Vergleichungen ergab sich für das Verhältnis der Strahlung des neuen Berliner Standards zu der des

Standards Nr. 5442 der Wert 0,1429 mit einer Fehlergrenze von 0,8 Promille. Es sei noch darauf hingewiesen, daß ein Teil der Messungen mit 1 cm Bleizusatz ausgeführt worden ist, ohne daß das Ergebnis dadurch beeinflußt wurde. Rechnet man aus den durch Wägung bestimmten Radiumgehalten das Verhältnis der austretenden Strahlung des neuen Berliner Normal zu der des Standards Nr. 5442 unter Berücksichtigung der Absorption in den Umhüllungen und in den Salzen aus, so erhält man 0,1437 (Sollwert)<sup>1)</sup>. In dieses Verhältnis kommt eine Unsicherheit herein, die durch die Korrektion für die innere Absorption verursacht wird. Der ihrer Berechnung zugrundeliegende Wert des Absorptionskoeffizienten  $\mu$  im Salz wird aus der Größe des Massenabsorptionskoeffizienten entnommen, der nur leidlich genau bekannt ist ( $\mu/\rho = 0,050 \text{ g}^{-1} \text{ cm}^2$ )<sup>2)</sup>. Die Schüttdichte  $\rho$  des Radiumsalzes kann auch nicht sehr genau bestimmt werden, so daß der Betrag der Absorptionskorrektion vermutlich nur auf  $\pm 10\%$  richtig ist. Da diese Korrektion bei dem eben besprochenen Strahlungsverhältnis rund 1,1% ausmacht, ist die durch sie hereingebrachte Unsicherheit auf  $\pm 1,1$  Promille zu veranschlagen. Rechnet man, mit Hilfe des Sollwertes aus den Wägungen, das gemessene Verhältnis der Strahlung des neuen Berliner Normal zu der des Standards Nr. 5442 auf gleiche Radiumsalzmengen um, so erhält man 0,9945. Bezieht man schließlich wieder Nr. 5442 mit Hilfe der Eichung des neuen Berliner Normal auf das Pariser Urnormal, so erhält man für das Verhältnis der Strahlung dieses Standards zu der des Urnormals, auf gleiche Salzmengen umgerechnet 1,0030. Dabei sind die beiden letzten Dezimalen auf  $\pm 15$  unsicher ( $\sqrt{0,8^2 + 1,1^2 + 0,5^2} \sim 1,50/_{00}$ ).

Tabelle 2.

Gemessene Standards	Strahlung bezogen auf die des Pariser Urnormals	Gemessen in
5430	1,0020	Paris
5437	0,9970	"
5440	0,9959	"
5426	$0,9975 \pm 0,0005$	Berlin
5435	$0,9970 \pm 0,0009$	"
5431	$0,9924 \pm 0,0009$	"
5542	$1,0030 \pm 0,0015$	"

<sup>1)</sup> Gehalt des Standards am 2. Juni 1934: 102,709 mg Ra-El. Aus den Glashüllen austretende Strahlung (0,60 mm Glas = 0,420% Absorption) 102,277 mg. Sollwert des Verhältnisses nach Korrektion um die Absorption im Salz  $\frac{14,540 \cdot 0,9983}{102,277 \cdot 0,9877} = 0,1437$ . — <sup>2)</sup> Vgl. H. Fränz u. C. Weiss, a. a. O.

In der Tabelle 2 sind die bisher durchgeführten Vergleichen zusammengestellt, die in bezug auf das Pariser Urnormal durchgeführt worden sind. Die angegebenen Meßfehlergrenzen sind bei den drei letzten Standards zusammengesetzte und daher größer als bei Nr. 5426. Man sieht, daß die Definition der neuen primären Standards stark überschätzt worden ist. Die Abweichungen von ihrem Sollgehalt gehen nach beiden Seiten und umfassen einen Streubereich von über 1%.

*Diskussion der Vergleichen der neuen primären Standards.* Die in der Tabelle 2 zum Ausdruck kommende Definition der neuen primären Standards konnte nicht erwartet werden. Die Abweichungen der Standards liegen weit über der von Hönigschmid gehandhabten Wägegenauigkeit. Wägefehler dieser Größenordnung sind also völlig ausgeschlossen. Man muß daher vermuten, daß irgendwelche unkontrollierbaren Verluste vorkommen können, z. B. bei der nicht einfachen Operation des Abschmelzens der Röhren. Es ist durchaus denkbar, daß durch den Sog der Flamme ein Stäubchen  $\text{RaCl}_2$  entfernt werden kann; nach dem Abschmelzen ist aber eine Gewichtskontrolle nicht mehr möglich.

Versucht man nun irgendwie eine Ordnung in die Dinge zu bringen und nach einem Gesichtspunkt zu suchen, der festzustellen erlaubt, welcher von den Standards eventuell als besser definiert anzusehen ist, so gibt es die folgenden Möglichkeiten:

a) Alle *systematischen* Fehler, die bei der Standardherstellung möglich oder denkbar sind, wirken in gleichem Sinn. Nachträglicher Substanzverlust *nach* der Wägung verkleinert beispielsweise ebenso die Strahlung gegenüber der gewogenen Substanzmenge wie Feuchtigkeitsspuren, die *vor* der Wägung aufgenommen worden sind. Nach diesem Gesichtspunkt sollte man diejenigen Standards als besser definiert ansehen, deren Strahlung (bezogen auf gleiche Substanzmengen) am größten ist.

b) Nimmt man an, daß die möglichen Fehler (systematische und statistische) in ihrem Absolutbetrag begrenzt sind, dann fallen sie um so weniger ins Gewicht, je größer die im Standard enthaltene Substanzmenge ist. Ein größtmöglicher absoluter Wägefehler von 0,01 mg oder ein Substanzverlust der gleichen Größe ist bedeutungslos bei einem Standard von 100 mg Radiumgehalt. Nach diesem Gesichtspunkt wären die Normale um so besser definiert, je größer ihr Gehalt ist. Leider werden dafür die Strahlungsvergleiche mit den sehr viel kleineren alten und neuen Normalen ungünstiger; systematische Fehler werden begünstigt und Korrekturen sind erforderlich (s. w. o.).

c) Die Strahlungswerte der neuen Standards, soweit sie bisher mit den alten verglichen worden sind, streuen um die Werte der letzteren, bezogen auf gleiche Substanzmengen. Man kümmere sich daher nicht um die Frage der möglichen systematischen und statistischen Fehler, betrachte weiterhin die alten Urnormale als maßgebend und korrigiere die ersteren gemäß ihren Abweichungen von den letzteren. Dieser Standpunkt wird in einer Veröffentlichung von St. Meyer vertreten<sup>1)</sup>. Dagegen lassen sich gewichtige Einwendungen vorbringen: Die Relationierung auf zwei Gebilde hypothetischen Charakters ist immer mißlich (das Wiener Urnormal existiert offiziell nicht mehr, und die Tage des Pariser Urnormals dürften sicher auch gezählt sein). Das würde in Übertragung auf ein anderes Fachgebiet der Physik etwa das gleiche bedeuten wie eine Relationierung aller photometrischen Messungen auf ein Helligkeitsnormal, das nicht mehr existiert und nicht mehr reproduziert werden kann. Weiterhin würde dieses Verfahren eine ungerechtfertigte Bevorzugung der beiden alten Urnormale bedeuten; es ist aber nicht einzusehen, warum deren Definition besser sein sollte als die der neuen Normale (vgl. w. u.).

d) Die bisher verglichenen Standards zerfallen in zwei deutlich getrennte Gruppen, deren Mittelwerte sich um etwa 0,65 % unterscheiden. Es wäre denkbar, daß nach beendeter Vergleichung aller neuen Normale die noch ausstehenden 13 Exemplare das Verhalten der größeren Gruppe mit dem Strahlungsdefizit aufweisen, so daß also einer großen Mehrzahl nur zwei oder drei gegenüberstehen, die einen Strahlungsüberschuß besitzen. Dann wäre anzunehmen, daß die Majorität besser definiert ist, und daß bei der Herstellung einiger Standards etwas passiert ist, was sich nachträglich nicht mehr klären läßt.

Zur Zeit ist es kaum möglich, eine dieser vier Möglichkeiten als vernünftigste oder wahrscheinlichste zu verteidigen. Zunächst erscheint es vielmehr erforderlich, möglichst viele der noch ausstehenden primären Standards zu vergleichen. Die Wiederholung der bisher durchgeführten Vergleichen durch andere Stellen steht in Aussicht.

*Vergleichung des Wiener Urnormals.* Wie sich nun gezeigt hat, erfüllen die neuen primären Standards nicht die in sie gesetzten Hoffnungen, obwohl der Aufwand an Sorgfalt bei der Herstellung den bei der Präparation der alten Urnormale sicher weit übertraf. Es muß die Frage gestellt werden,

---

<sup>1)</sup> St. Meyer, Wiener Anzeiger Nr. 3, S. 7—11, 1938. Es war für uns nicht zu ersehen, ob diese Veröffentlichung eine persönliche Stellungnahme bedeutet oder eine offizielle der Internationalen Standardkommission.



wie es kommt, daß die beiden Urnormale so gut übereinstimmen, wie in der erwähnten Mitteilung der Standardkommission von 1912 mitgeteilt worden ist<sup>1)</sup>. Dabei ist noch zu bedenken, daß diese beiden alten Standards unabhängig voneinander hergestellt worden sind. Wir waren nach den bisher geschilderten Ergebnissen der Auffassung, daß die gute Übereinstimmung als ein Zufall angesehen werden muß, hielten aber eine neu durchgeführte Vergleichung für notwendig.

Um den Anschluß des Wiener Urnormals an das Pariser vorzunehmen, wurde, wie in den vorhergehenden Fällen, die Strahlung des ersteren mit der des neuen Berliner Normals verglichen und auf das Pariser Urnormal umgerechnet. Die Vergleichung wurde in der gleichen Weise wie die früheren durchgeführt. Da sich die Gehalte der beiden Präparate etwa wie 2:3 verhalten, wurde auch hier um die Absorption im Salz korrigiert. Die Gesamtkorrektion ist indessen sehr klein (0,3 Promille), weil beide Standards etwas verschiedene Länge und damit trotz verschiedener Gehalte praktisch gleiche Substanzhöhe haben. Für das Verhältnis der austretenden Strahlung des neuen Berliner Normals zu der des Wiener Urnormals erhält man unter Berücksichtigung der Absorption in den Hüllen und in den Salzen und unter Berücksichtigung des Abfalls des letzteren Standards bis zum 2. Juni 1934 0,6217 (Sollwert)<sup>2)</sup>. Als Mittelwert aller Messungen ergab sich hingegen der stark abweichende Wert 0,6249. Die Zahl der Messungen betrug 112 Reihen zu je acht Einzelmessungen. Die Fig. 4 zeigt die Verteilung der Meßreihen um den Mittelwert, wobei hinsichtlich der Auftragung der Meßwerte genau wie bei den Fig. 2 und 3 verfahren worden ist. Auch hier ist die Streuung um den Mittelwert symmetrisch. Die Meßfehlergrenze beträgt  $\pm 0,7$  Promille. Rechnet man mit Hilfe des Sollwertes auf gleiche Radiumsalzmengen um, so ergibt sich für das Verhältnis der Strahlung des neuen Berliner Normals zu der des Urnormals 1,0050, d. h. die Strahlung des alten Wiener Normals ist um 0,5% zu klein relativ zum Berliner Normal. Durch Umrechnung erhält man schließlich mit Hilfe der Eichung des letzteren auf das Pariser Urnormal für das Strahlungsverhältnis des Wiener zum Pariser

<sup>1)</sup> O. Hahn, St. Meyer u. E. v. Schweidler, Bericht über die Versammlung der internationalen Radiumstandardkommission in Paris vom 25. bis 28. März 1912, Phys. ZS. 13, 524, 1912. — <sup>2)</sup> Gehalt des Wiener Urnormals im August 1911: 31,17 mg  $\text{RaCl}_2$ ; Gehalt am 2. Juni 1934: 30,86 mg  $\text{RaCl}_2$  = 23,491 mg Ra-El. Aus den Glashüllen austretende Strahlung (0,59 mm Glas = 0,413% Absorption) 23,394 mg. Sollwert des Verhältnisses nach Korrektion um die Absorption im Salz

$$\frac{14,540 \cdot 0,9982}{23,394 \cdot 0,9979} = 0,6217.$$



Urnormal, wieder auf gleiche Salzmenngen bezogen, 0,9925. Dabei ist die letzte Dezimale auf  $\pm 9$  unsicher.

Das Ergebnis dieser Vergleichung ist niederschmetternd. Während seinerzeit von der Standardkommission Übereinstimmung innerhalb von 0,2% gefunden wurde, ergibt sich hier eine Abweichung von 0,75%. Es besteht für uns nach sehr sorgfältiger Prüfung nicht der geringste Anlaß, an unserem Meßergebnis zu zweifeln. Wie ist diese Diskrepanz zu erklären? Zunächst einmal befürchten wir, daß die Standardkommission ihre Meßgenauigkeit überschätzt hat, schon im Hinblick auf die Dauer der Messungen. Die Eichung fand damals während einer Tagung von drei Tagen Dauer

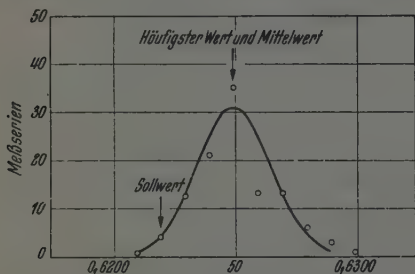


Fig. 4. Verteilung der gemessenen Werte bei der Vergleichung des neuen Berliner und des alten Wiener Normal.

statt, unsere Vergleichsmessung dagegen hat nahezu ein Jahr beansprucht. Eine gründliche Diskussion der Pariser Eichmessungen ist übrigens unmöglich, weil über diese Messungen der Kommission nichts veröffentlicht worden ist. In dem erwähnten kurzen Bericht wurde lediglich mitgeteilt, daß die Vergleichungen nach dem Kompensationsverfahren von Rutherford und

außerdem mit einem großen Plattenkondensator nach M. Curie durchgeführt worden sind<sup>1)</sup>. Das erstere Verfahren ist sehr elegant, erfordert aber die Anbringung von Korrekturen und Kenntnis des Absorptionskoeffizienten in Luft<sup>2)</sup>. Auch ist ein Störeinfluß durch die Sekundärstrahlung zu befürchten. Bei dem zweiten Verfahren spielt die Form der Präparate, besonders deren Durchmesser eine Rolle, weil in geringem Abstand von der Kammer gemessen wird. Von beiden Methoden gilt, daß sie für genaueste Messungen nicht „einfach“ genug sind. Von den beiden Verfahren wird ausdrücklich in der Literatur bemerkt, daß ihre eigentliche Domäne die Vergleichung nahezu identischer Präparate ist<sup>3)</sup>. Die Urnormale haben aber Gehalte, die sich etwa wie 2:3 verhalten.

<sup>1)</sup> O. Hahn, St. Meyer u. E. v. Schweidler, a. a. O. — <sup>2)</sup> E. Rutherford u. J. Chadwick, Proc. Phys. Soc. London 24, 141, 1912. — <sup>3)</sup> Das wird bezüglich des Kompensationsverfahrens ausdrücklich in der unter 2), oben, angeführten Originalarbeit mitgeteilt; hinsichtlich des großen Plattenkondensators vgl. darüber im Lehrbuch von St. Meyer u. E. v. Schweidler, 2. Auflage 1927, S. 200.

Es ist andererseits zuzugeben, daß bei der hier gefundenen Diskrepanz der beiden Urnormale die Übereinstimmung der Pariser und Wiener Anschlußwerte der sekundären Normale innerhalb von 0,5% kollektiver Genauigkeit (vgl. S. 654) nicht verständlich ist; allerdings liegt zwischen den zugehörigen Eichwerten unverkennbar eine kleinere aber systematische Differenz in dem von uns beobachteten Sinn.

Auf eine gewisse, wenn auch vage Möglichkeit zur Erklärung des gefundenen Unterschiedes soll noch hingewiesen werden. Es hat sich uns der Verdacht aufgedrängt, daß das Wiener Urnormal in seiner jetzt vorliegenden Definition eventuell irgendeine Veränderung gegenüber der von 1911 aufweist<sup>1)</sup>.

*Anschluß des neuen Wiener Normals an das Pariser Normal.* Der neue primäre Standard Nr. 5428, der dazu bestimmt worden ist, das alte Urnormal in Wien abzulösen, ist vor dem Umtausch des letzteren mit diesem im Wiener Radiuminstitut verglichen worden. Es ergab sich für das Verhältnis der Strahlung von Nr. 5428 zu der des Wiener Urnormals, bezogen auf gleiche Salzmengen, 1,0014<sup>2)</sup>. Rechnet man dieses Verhältnis auf das Pariser Urnormal um, so erhält man für das Verhältnis der Strahlung von Nr. 5428 zu der des Pariser Urnormals 0,9939. Infolge der Umrechnung über drei Vergleichen ist die Meßfehlergrenze sicher ziemlich hoch; die beiden letzten Dezimalen sind auf mindestens  $\pm 12$  unsicher. Dieses Normal wird übrigens noch einmal direkt angeschlossen werden. In der Tabelle 3, die

Tabelle 3.

Gemessene Standards	Verhältnis der Strahlung bezogen auf die des Pariser Urnormals	Gemessen in
Wiener Urnormal Nr. 5428	$0,9925 \pm 0,0009$ $0,9939 \pm 0,0012$	Berlin Wien

<sup>1)</sup> Dieser Standard wird bei Nichtbenutzung in einer Messinghülle aufbewahrt, auf der eingraviert ist „1911/1922“. Von der Union Minière wurde uns mitgeteilt, daß er in diesem Futteral bereits beim Umtausch vom Wiener Radiuminstitut eingeliefert worden ist. Fernerhin besitzt das Normal einen äußeren Durchmesser von 3,8 mm, während in dem beim Umtausch beigelegten und von St. Meyer und Rutherford unterschriebenen Zertifikat vom Jahre 1934 vermerkt ist: ... von äußerem Durchmesser 3,2 mm .... Der derzeitige Direktor des Wiener Radiuminstituts, Herr Prof. Ortner, hält andererseits laut freundlicher Mitteilung eine Veränderung oder Umfüllung für unwahrscheinlich und vermutet eine versehentliche Verwechslung von „lichter Weite“ mit „äußerem Durchmesser“ in dem genannten Zertifikat; auch sei die Messinghülle „1911/22“ dem Institut bestimmt unbekannt. Eine Aufklärung scheint im Augenblick nicht möglich. — <sup>2)</sup> St. Meyer, a. a. O.

als Ergänzung zur Tabelle 2 aufzufassen ist, sind die Anschlußwerte des alten und neuen Wiener Normals an das Pariser Urnormal noch einmal zusammengefaßt.

*Schlußdiskussion.* Aus den in dieser Arbeit mitgeteilten Vergleichsmessungen und aus den in Paris erfolgten ergibt sich, daß die Definition der alten und die der neuen primären Normale zweifelhaft und erheblich schlechter erscheint als der Wägungsgenauigkeit bei der Herstellung entspricht. Über die Ursachen, die dazu geführt haben, daß diese Normale sich nur auf etwa 1% definiert ergeben, läßt sich kaum etwas aussagen. Die alten sekundären Normale sind damit a fortiori auf höchstens  $\sqrt{1^2 + 0,5^2} \sim 1,1\%$  absolut definiert. Man tut gut, das hinsichtlich der Genauigkeit aller Konstanten zu bedenken, bei denen die Bestimmung eines Radiumgehalts oder Radiumgleichgewichtswertes eingeht.

Die hier mitgeteilten Vergleichen werden, wie schon erwähnt, in anderen Instituten und mit anderen Meßapparaturen wiederholt werden. Bis zur Erledigung dieser Vergleichen müssen alle weiter sich ergebenden Fragen zurückgestellt werden.

Der Verfasser ist Frau Prof. Dr. Joliot-Curie zu großem Dank verpflichtet für die zeitweilige Überlassung des Pariser Urnormals. Fernerhin sei bestens gedankt den Direktoren von der Union Minière, Herrn van Stappen und Herrn Lecoq, für ihre Unterstützung und dem Kriegsverwaltungsrat Herrn Dr. Kraft, der den Transport des Pariser Urnormals vermittelt und organisiert hat. Schließlich hat der Verfasser seinen Mitarbeitern herzlich zu danken für die sorgfältige Durchführung der langwierigen Messungen, nämlich den Herren Dr. Westmeyer, Otto Steiner, Görke, Wauschkun und Zacher.

## Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. II.

Von **W. Heisenberg** in Berlin,  
Max-Planck-Institut der Kaiser Wilhelm-Gesellschaft.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 30. Oktober 1942.)

Im Anschluß an eine frühere Arbeit werden die physikalischen Folgerungen einer Theorie untersucht, in der nicht eine Hamilton-Funktion, sondern die in Teil I erklärte  $\eta$ -Matrix vorgegeben ist. In dieser Theorie treten im Gegensatz zur üblichen Quantentheorie der Wellenfelder keine Divergenzschwierigkeiten auf und die gestellten Probleme können streng behandelt werden. Die Rechnung wird durchgeführt für die Streuung von Elementarteilchen bei zwei verschiedenen Wechselwirkungsansätzen. Eine  $\delta$ -funktionsartige Wechselwirkung gibt Resultate, die denen der bisherigen Theorie weitgehend entsprechen. Eine andere, nicht korrespondenzmäßig deutbare Wechselwirkung führt zu Wirkungsquerschnitten, die im Grenzfall großer Energien der stoßenden Teilchen einem endlichen Grenzwert zustreben. Ferner wird die Erzeugung neuer Teilchen an einem Wechselwirkungsansatz untersucht, der die Paarerzeugung enthält. Für kleine Energien der Stoßpartner ergeben sich wieder Resultate, die denen der bisherigen Theorien ähnlich sind, für große Energien treten unter bestimmten Bedingungen explosionsartige Vielfachprozesse auf. Diese Vielfachprozesse werden mathematisch bis in die Einzelheiten diskutiert. Da keine Divergenzschwierigkeiten auftreten, genügen die Ergebnisse auch in Strenge den Forderungen der Relativitätstheorie.

Der in einer früheren Arbeit unternommene Versuch, in der Quantentheorie der Wellenfelder die Größen auszusondern, die als „beobachtbar“ auch in der zukünftigen Theorie der Elementarteilchen eine Rolle spielen werden, hat zu folgendem Ergebnis geführt: Die Gesamtheit dessen, was an Streu-, Emissions- und Absorptionsvorgängen im Sinne der genannten Arbeit „beobachtbar“ ist, läßt sich zusammenfassen in eine unitäre Matrix  $S$ . Das Absolutquadrat des Matricelementes von  $S$ , das zum Übergang etwa vom Zustand  $A$  nach dem Zustand  $B$  gehört, gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß der Zustand  $B$  in der auslaufenden Welle angetroffen wird, wenn der Zustand  $A$  in der einlaufenden Welle realisiert ist. Die unitäre Matrix  $S$  hängt mit einer hermiteschen Matrix  $\eta$  zusammen durch die Gleichung

$$S = e^{i\eta}. \quad (1)$$

Die Eigenwerte von  $\eta$  sind die Phasendifferenzen zwischen ein- und auslaufenden Wellen. Die Matrix  $\eta$  ist eine relativistische Invariante. Die Folgerungen aus dieser Feststellung für die einzelnen Matricelemente von  $\eta$  sind im Teil I auseinandergesetzt worden. Wenn die Wechselwirkungsenergie

zwischen den Elementarteilchen als kleine Störung angesehen werden kann, so ist die Matrix  $\eta$  im wesentlichen mit der Teilmatrix aus der Wechselwirkungsenergie-Matrix identisch, die zu Übergängen zwischen Zuständen gleicher Gesamtenergie und gleichen Gesamtimpulses gehört. Wenn eine Hamilton-Funktion einfacher Form gegeben ist, die Wechselwirkungsenergie jedoch nicht als klein angesehen werden kann, so erhält die Matrix  $\eta$  im allgemeinen irgendeine schwer übersehbare komplizierte Gestalt, außerdem ergeben sich dabei in der Regel die bekannten Divergenzschwierigkeiten. Allerdings läßt sich die Existenz einer Hamilton-Funktion einfacher Gestalt kaum physikalisch begründen.

Die vorliegende Arbeit soll nun umgekehrt die physikalischen Folgerungen untersuchen, die sich ergeben, wenn die Matrix  $\eta$  eine einfache Gestalt hat. Diese veränderte Problemstellung hat gegenüber der bisher üblichen Annahme einer einfachen Hamilton-Funktion einige wichtige Vorzüge. Erstens lassen sich die Divergenzschwierigkeiten hier vollständig vermeiden. Dies liegt in erster Linie daran, daß die Matrix  $\eta$  nur Übergangselemente zwischen Zuständen gleicher Energie enthält, während die Divergenzen im allgemeinen durch Summationen über virtuelle Zwischenzustände beliebiger Energie entstanden. Zweitens wird dadurch erreicht, daß die Forderungen der Relativitätstheorie und der Quantentheorie von selbst befriedigt werden, während in der bisherigen Theorie wegen der „Abschneidevorschriften“ an dieser Stelle häufig Schwierigkeiten entstanden. Schließlich können in einer solchen Theorie mit gegebener  $\eta$ -Matrix wegen der strengen Konvergenz des Verfahrens auch sehr komplizierte Probleme gelöst werden, die bisher jeder genaueren Behandlung getrotzt haben, z. B. das Problem der explosionsartigen Vielfachprozesse.

Diesem ganzen Verfahren kann entgegengehalten werden, daß doch die Matrix  $\eta$  im allgemeinen nicht gegeben sei, während eine Hamilton-Funktion einfacher Gestalt korrespondenzmäßig begründet werden könne. Auf diesen Einwand kann man jedoch erwidern, daß bei Korrespondenzüberlegungen im allgemeinen vorausgesetzt werden muß, daß die Wechselwirkungsenergie als kleine Störung betrachtet werden kann; in diesem Sinne ist aber dann nicht nur die Wechselwirkungsenergie, sondern auch die (mit einer Teilmatrix aus ihr identische) Matrix  $\eta$  korrespondenzmäßig festgelegt. Man kann also mit Hilfe von korrespondenzmäßigen Überlegungen mit gleichem Recht für eine einfache Hamilton-Funktion wie für eine einfache  $\eta$ -Matrix (oder, wie wir sagen wollen, Wechselwirkungsmatrix) argumentieren. In der zukünftigen Theorie freilich dürfte es eine Hamilton-Funktion kaum geben und die Wechselwirkungsmatrix wird sich aus Be-



dingungen anderer Art bestimmen, braucht also selbst keine einfache Gestalt zu haben. Trotzdem kann man durch die Untersuchung einfacher  $\eta$ -Matrizen eine Übersicht gewinnen über die Möglichkeiten und die Art der Zusammenhänge in einer zukünftigen Theorie.

Im folgenden sollen drei verschiedene Anwendungen der in Teil I angestellten Überlegungen behandelt werden:

Zunächst wird eine gewöhnliche  $\delta$ -funktionsartige Wechselwirkung zwischen den Elementarteilchen angenommen, die nur zur Streuung, nicht zur Entstehung neuer Teilchen führt. Die Ergebnisse unterscheiden sich hier nur unwesentlich von den Ergebnissen der (auf ein Problem dieser Art angewendeten) bisherigen Theorien. Dann wird die  $\delta$ -funktionsartige Wechselwirkung durch eine andere Wechselwirkung ersetzt, die nicht einfach durch eine vom Abstand abhängige Kraft der Elementarteilchen beschrieben werden kann und die in einer Hamilton-Funktion nicht einfach ausgedrückt werden könnte. Diese Wechselwirkung genügt den Forderungen der Relativitätstheorie und gibt damit ein Beispiel für Kraftwirkungen zwischen Elementarteilchen, die sich grundsätzlich von denen unterscheiden, zu denen man durch die üblichen korrespondenzmäßigen Argumente gelangt. Schließlich wird eine Wechselwirkung zugrunde gelegt, die die Entstehung neuer Teilchen ermöglicht, und die Bedingungen werden untersucht, unter denen explosionsartige Vielfachprozesse auftreten.

Um alle unnötigen Komplikationen zu vermeiden, sollen sich die folgenden Rechnungen stets auf Elementarteilchen ohne Spin und ohne Ladung, die der Bose-Statistik genügen, beziehen. In der bisherigen Theorie würde man also von einer skalaren Wellenfunktion  $\varphi$  und einer Lagrange-Funktion der Form

$$L = \frac{1}{2} (\dot{\varphi}^2 - \text{grad}^2 \varphi - \kappa^2 \varphi^2) \quad (2)$$

auszugehen haben ( $\hbar$  und  $c$  werden wie im Teil I als Einheiten gewählt;  $\kappa$  ist die Ruhmasse der Elementarteilchen in  $\text{cm}^{-1}$ ). In der üblichen Weise ergibt sich dann

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}; \quad H = \frac{1}{2} (\pi^2 + \text{grad}^2 \varphi + \kappa^2 \varphi^2). \quad (3)$$

Begrenzt man den Wellenvorgang auf ein Normierungsvolumen  $V$  und geht zum Impulsraum über, so ergibt sich ( $k^{02} = k^2 + \kappa^2$ ):

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_{\mathbf{k}} (2k^0 V)^{-1/2} (a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - k^0 t)} + a_{-\mathbf{k}}^* e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + k^0 t)}), \\ \pi &= \sum_{\mathbf{k}} (2k^0 V)^{-1/2} i k^0 (-a_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - k^0 t)} + a_{-\mathbf{k}}^* e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} + k^0 t)}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$



Für die Amplituden  $a_t$  erhält man die Darstellung

$$a_t^* a_t = N_t; \quad a_t N_t = (N_t + 1) a_t; \quad a_t^* N_t = (N_t - 1) a_t^*. \quad (5)$$

Geht man zum Limes eines unendlichen Normierungsvolumens über, so geht die Summe über  $\mathbf{t}$  in ein Integral über nach der Gleichung

$$\sum_{\mathbf{t}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{t}. \quad (6)$$

Beim Übergang von diskreter zu kontinuierlicher Normierung ist also ein Matrixelement, das zum Übergang von einer Gesamtteilchenzahl  $N'$  zu einem Wert  $N''$  gehört, mit  $\left[ \frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{\frac{N' + N''}{2}}$  zu multiplizieren.

Die Amplituden  $a_t$  sollen im folgenden stets als Operatoren, unabhängig von der Variablen  $t$ , betrachtet werden; bei Integrationen über  $t$  sind sie konstant zu halten. Die Variable  $t$  spielt in den folgenden Rechnungen mehr die Rolle eines formalen Parameters als die der Zeit.

## 1.

a) *Streuung von Teilchen bei  $\delta$ -funktionsartiger Wechselwirkung.* Der einfachste Ansatz, der für eine Wechselwirkung gemacht werden kann, die zur Streuung von Elementarteilchen führt, lautet etwa

$$\eta = \varepsilon \int d\mathbf{r} dt \varphi^4. \quad (7)$$

Dieser Ansatz entspricht einer gewöhnlichen Wechselwirkung vom Typus einer  $\delta$ -Funktion des Abstandes zwischen je zwei Teilchen. Eine niedrigere Potenz von  $\varphi$  als die vierte in der Gleichung für  $\eta$  würde nicht zu Wechselwirkungen irgendwelcher Art führen, da Prozesse, bei denen im Anfangs- oder Endzustand nur ein Teilchen vorhanden ist, mit dem Energie- und Impulssatz nicht verträglich wären. Aus Gleichung (4) folgt vielmehr einfach z. B.

$$\int d\mathbf{r} dt \varphi^3 = 0. \quad (8)$$

Die Konstante  $\varepsilon$  in Gleichung (7) ist dimensionsmäßig eine reine Zahl, da  $\varphi$  eine reziproke Länge ist. Die Wechselwirkung (7) ist also insofern mit den elektromagnetischen Wechselwirkungen verwandt, als deren Größe ja auch durch die dimensionslose Zahl  $e/\sqrt{\hbar c}$ , d. h. die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante, bestimmt wird.

Drückt man den Ansatz (7) im Impulsraum durch die Operatoren  $a_t$  aus, so wird die Reihenfolge der  $a_t$  und  $a_t^*$  durch die Rechnung vorgeschrieben. Die Glieder, in denen die gesterntten Größen nicht alle links von den ungesterntten stehen, könnten zu Divergenzen führen. Wir werden daher den

Ansatz (7) [im Sinne der Theorie von Jordan und Klein<sup>1)</sup>] derart abändern, daß wir verabreden, es sollen die  $\alpha_i^*$  grundsätzlich in allen Gliedern links von den  $\alpha_i$  stehen. Durch diese Veränderung wird weder die korrespondenzmäßige Deutung der Wechselwirkung (7) noch die relativistische Invarianz angetastet. Geht man noch zum Limes eines unendlichen Normierungsvolumens über, so erhält man schließlich für die Matrixelemente von  $\eta$ :

$$\begin{aligned} & (\xi_1' \xi_2' | \eta | \xi_1'' \xi_2'') \\ &= \frac{3\varepsilon}{2} \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{k_1^{0'} k_2^{0'} k_1^{0''} k_2^{0''}}} \delta(\xi_1' + \xi_2' - \xi_1'' - \xi_2'') \delta(k_1^{0'} + k_2^{0'} - k_1^{0''} - k_2^{0''}). \quad (9) \end{aligned}$$

Relativistisch hat das Matrixelement das in Teil I, Abs. II d geforderte Verhalten.

Zur Bestimmung der Eigenwerte von  $\eta$  führt man zweckmäßig neue Variable ein durch die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R} &= \xi_1 + \xi_2; & \zeta &= \frac{\xi_{2z}}{k_2}; \\ K^0 &= k_1^0 + k_2^0; & \alpha &= \arctg \frac{\xi_{2y}}{\xi_{2x}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Für das Volumendifferential folgt durch Umrechnung mit der Funktionaldeterminante ( $v = \xi/k^0$ ):

$$d\mathfrak{R} dK^0 d\zeta d\alpha \rightarrow d\xi_1 d\xi_2 \frac{(v_1 - v_2, \xi_2)}{k_2^3} \quad (11)$$

Daraus ergibt sich, unter Weglassung der Einheitsmatrix:

$$(\zeta' \alpha' | \eta | \zeta'' \alpha'') = \frac{3\varepsilon}{2} \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{k_1^{0'} k_2^{0'} k_1^{0''} k_2^{0''}}} \sqrt{\frac{k_2^{0'3} k_2^{0''3}}{(v_1' - v_2', \xi_2') (v_1'' - v_2'', \xi_2'')}}. \quad (12)$$

Setzt man speziell  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R}'' = 0$ , d. h. legt man das Schwerpunktsystem zugrunde, so vereinfacht sich (12) zu der Formel

$$(\zeta' \alpha' | \eta | \zeta'' \alpha'') = \frac{3\varepsilon v'}{16\pi^3} = \frac{3\varepsilon v''}{16\pi^3} = \frac{3\varepsilon v}{16\pi^3}. \quad (13)$$

(Für die Größen, die im Anfangs- und Endzustand den gleichen Wert haben, werden wir im folgenden die Striche weglassen.)

Die Eigenfunktionen, die diese Matrix auf Diagonalform bringen, sind — wie immer bei reinen Streuproblemen (vgl. Teil I, Abs. III a) — die Kugelfunktionen. In der Tat wird die Gleichung

$$\int d\zeta' d\alpha' P_n^m(\zeta') e^{im\alpha'} (\zeta' \alpha' | \eta | \zeta'' \alpha'') = \eta_{n,m} P_n^m(\zeta'') e^{im\alpha''} \quad (14)$$

erfüllt durch

$$\left. \begin{aligned} \eta_{0,0} &= \frac{3\varepsilon v}{4\pi}, \\ \eta_{n,m} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

für alle anderen  $n$  und  $m$ .

<sup>1)</sup> P. Jordan u. O. Klein, ZS. f. Phys. 45, 751, 1927.

Die Streuung ist also im Schwerpunktssystem exakt kugelsymmetrisch. Die Phase  $\delta_n$  der zur  $n$ -ten Kugelfunktion gehörigen Welle ist, wenn man diese Welle in der üblichen Theorie als  $\frac{\sin(kr + \delta)}{r}$  ansetzt, die Hälfte des Eigenwertes  $\eta_{n,0}$ . Aus der bekannten Formel für den Wirkungsquerschnitt

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sum_n (2n+1) \sin^2 \delta_n \quad (16)$$

folgt also in unserem Falle nach (15)

$$Q = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \frac{3\varepsilon v}{8\pi} \quad (17)$$

In den Grenzfällen  $v \ll 1$  und  $1-v \ll 1$  wird daher

$$Q = \begin{cases} \frac{9\varepsilon^2}{16\pi\kappa^2} & \text{für } v \ll 1, \\ \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \frac{3\varepsilon}{8\pi} & \text{für } 1-v \ll 1. \end{cases} \quad (18)$$

Der Wirkungsquerschnitt nimmt mit wachsendem Impuls schließlich wie  $1/k^2$  ab, übersteigt also nie das Quadrat der Wellenlänge. Für bestimmte numerische Werte von  $\varepsilon$ , z. B. für  $\varepsilon = 8\pi^2/3$ , nimmt er mit wachsendem Impuls noch rascher ab. In dieser Weise sind daher bestimmte Werte von  $\varepsilon$  vor anderen ausgezeichnet, doch sind ohne neue zusätzliche Bedingungen alle Werte von  $\varepsilon$  möglich und ergeben sinnvolle Aussagen für die Streuung.

Die Ergebnisse in Gleichung (17) und (18) stimmen mit den Resultaten der üblichen Theorie weitgehend überein; sie unterscheiden sich von ihnen höchstens insofern, als sie für beliebige Werte von  $\varepsilon$  und  $k$  streng gelten.

b) *Streuung von Teilchen bei allgemeinerem Wechselwirkungsansatz.* Das Ergebnis (17) legt die Vermutung nahe, daß ein Wirkungsquerschnitt für Streuung im relativistischen Grenzfall grundsätzlich nicht größer sein könnte als das Quadrat der Wellenlänge. Daß diese Vermutung unrichtig ist, erkennt man aber, wenn man an Stelle der Gleichung (9) für die Matrix  $\eta$  den folgenden allgemeineren Ansatz macht (unter Weglassung der  $\delta$ -Funktionen):

$$\begin{aligned} & (\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 | \eta | \mathbf{r}''_1 \mathbf{r}''_2) \\ &= \frac{3\varepsilon}{2} \frac{(2\pi)^{-2}}{\sqrt{k_1' k_2' k_1'' k_2''}} \frac{\kappa^2 (k_1' k_2' - \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 + k_1'' k_2'' - \mathbf{r}''_1 \mathbf{r}''_2)}{(k_1' k_1'' - \mathbf{r}'_1 \mathbf{r}''_1) (k_2' k_2'' - \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}''_2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Auch dieser Ansatz genügt den Forderungen der Relativitätstheorie (vgl. Teil I, Abs. II d); es ist aber wohl kaum möglich, eine Kraft als Funktion des Abstandes zweier Teilchen anzugeben, die diesem Ansatz entspricht. Jedenfalls würde es sich dabei wohl um eine recht komplizierte Kraft auf

endliche Abstände handeln, die in einer bestimmten Weise retardiert wirkt, so daß den Forderungen der Relativitätstheorie Genüge geschieht. Im Schwerpunktsystem wird aus (19)

$$\begin{aligned} (\zeta' \alpha' | \eta | \zeta'' \alpha'') &= \frac{3 \varepsilon v \kappa^2}{4 \pi^2 k^3} \frac{1 + \frac{\kappa^2}{2k^2}}{\left[1 + \frac{\kappa^2}{k^2} - \cos(\mathfrak{t}'_1 \mathfrak{t}''_1)\right]^2} \\ &= \frac{3 \varepsilon v}{4 \pi^2} \frac{\gamma \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)}{(1 + \gamma - z)^2}, \end{aligned} \quad (20)$$

wobei  $\gamma = \kappa^2/k^2$ ,  $z = \cos(\mathfrak{t}'_1 \mathfrak{t}''_1) = \zeta' \zeta'' + \sqrt{1 - \zeta'^2} \sqrt{1 - \zeta''^2} \cos(\alpha' - \alpha'')$  gesetzt ist und wieder die Striche bei  $k$  und  $v$  weggelassen sind, da diese Größen im Anfangs- und Endzustand den gleichen Wert haben.

Für die weitere Behandlung entwickelt man zweckmäßig nach gewöhnlichen Kugelfunktionen

$$\frac{1}{(1 + \gamma - z)^2} = \sum b_n P_n(z), \quad b_n = (n + \tfrac{1}{2}) \int_{-1}^{+1} dz \frac{P_n(z)}{(1 + \gamma - z)^2}. \quad (21)$$

Die Koeffizienten  $b_n$  kann man als Entwicklungskoeffizienten mit Hilfe der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + x^2}} = \sum x^n P_n(z) \quad (22)$$

bestimmen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{(1 + \gamma - z)^2 \sqrt{1 - 2xz + x^2}} \\ &= \frac{x}{a^2} \left[ \lg \frac{1 - x + \gamma - a}{1 - x + \gamma + a} + \frac{2a}{x\beta} (1 - x - \gamma x) \right], \end{aligned} \quad (23)$$

wobei  $\beta = 2\gamma + \gamma^2$  und  $a = \sqrt{(1 - x)^2 - 2\gamma x}$  gesetzt ist.

$$b_n = \frac{n + \frac{1}{2}}{2\pi i} \oint \frac{dx}{x^{n+1}} I. \quad (24)$$

Für  $\gamma > 1$  folgt ohne weiteres schon aus (21):

$$b_0 \approx \frac{1}{\gamma^2}, \quad b_n = 0 \quad \text{für } n > 0. \quad (25)$$

Für  $\gamma < 1$  unterscheiden wir die Fälle  $n < 1/\sqrt{\gamma}$  und  $n > 1/\sqrt{\gamma}$ . Für  $\gamma < 1$  wird nämlich nach (23)

$$I \approx \frac{1}{\gamma(1-x)} + \frac{x}{(1-x)^2} \lg \gamma + \dots \quad (26)$$

und für kleine  $n$  folgt daraus

$$b_n \approx (n + \frac{1}{2}) \left[ \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2} n(n+1) \lg \gamma + \dots \right]. \quad (27)$$

Für große  $n$  ist jedoch die Entwicklung (26) nicht mehr brauchbar. In diesem Fall kann man etwa so vorgehen: Man ersetzt die Variable  $x$  in (24) durch eine neue Variable  $y$  nach der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} 1 - x + \gamma + a &= \sqrt{\beta} \cdot e^y, \\ 1 - x + \gamma - a &= \sqrt{\beta} \cdot e^{-y} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

und integriert in der komplexen  $y$ -Ebene auf dem in Fig. 1 angegebenen Wege. Dem singulären Punkt  $x = 0$  entspricht die Stelle  $y = \frac{1}{2} \lg \frac{2+\gamma}{\gamma}$ .

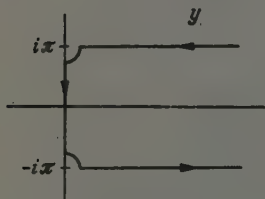


Fig. 1.

Der Hauptbeitrag zum Integral kommt dann für große  $n$  von der unmittelbaren Umgebung der Stellen  $y = \pm i\pi$  her. Durch Entwicklung in der Umgebung dieser Stellen erhält man schließlich

$$\left. \begin{aligned} b_n &= \frac{(n + \frac{1}{2}) \sqrt{2\pi n}}{(1 + \gamma + \sqrt{\beta})^{n+1/2} \cdot \beta^{3/4}} \\ \text{für } n &> \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ und } \gamma < 1. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Die Entwicklungskoeffizienten  $b_n$  steigen also zunächst mit  $n$  an, nehmen jedoch für hinreichend große  $n$  ( $n \gg 1/\sqrt{\gamma}$ ) wieder exponentiell ab.

Für die Berechnung der Eigenwerte von  $\eta$  benutzt man schließlich die bekannte Beziehung

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(\zeta') P_n(\zeta'') + \\ &+ \sum_r \frac{(n-r)!}{(n+r)!} P_n^r(\zeta') P_n^r(\zeta'') (e^{ir(\alpha' - \alpha'')} + e^{-ir(\alpha' - \alpha'')}). \end{aligned} \quad (30)$$

Aus ihr ergibt sich

$$\int P_n^m(\zeta') e^{im\alpha'} d\zeta' d\alpha' \sum b_l P_l(z) = 2\pi \frac{b_n}{n + \frac{1}{2}} P_n^m(\zeta'') e^{im\alpha''}. \quad (31)$$

Der Vergleich der Formeln (14), (21), (25), (27), (29) und (31) lehrt endlich:

$$\eta_{n,m} = \frac{3\varepsilon v}{2\pi} \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 + \frac{\gamma}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \gamma \lg \gamma + \dots && \text{für } \gamma < 1, n < \frac{1}{\sqrt{\gamma}}; \\ &\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \beta^{1/4}}{2(1 + \gamma + \sqrt{\beta})^{n+1/2}} && \text{„ } \gamma < 1, n > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}; \\ &1 && \text{„ } \gamma > 1, n = 0; \\ &0 && \text{„ } \gamma > 1, n \neq 0. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Die Eigenwerte von  $\eta$ , d. h. die Phasendifferenzen zwischen ein- und auslaufender Welle haben daher im relativistischen Grenzfall  $k^2 \gg \kappa^2$ ,  $\gamma \ll 1$  für alle  $n$  bis zur Grenze  $n \sim 1/\sqrt{\gamma}$ , d. h. für alle niederen Kugelfunktionen den gleichen Wert, erst oberhalb  $n \sim 1/\sqrt{\gamma}$  nehmen die Phasendifferenzen ab. Dies hat zur Folge, daß der gesamte Wirkungsquerschnitt für Streuung erheblich größer wird als  $4\pi/k^2$ , er strebt im Gegenteil für  $k \rightarrow \infty$  einem endlichen Wert zu. Auch ist die Streuung keineswegs mehr kugelsymmetrisch, die kleinen Abweichungen sind erheblich häufiger als die großen. Man kann den Gesamtquerschnitt näherungsweise nach (16) auswerten, indem man bei konstanter Phase über alle  $n$  bis zu Werten der Ordnung  $1/\sqrt{\gamma}$  summiert. Dabei bleibt allerdings wegen der Unsicherheit der oberen Grenze ein Zahlenfaktor der Ordnung 1 unbestimmt, den man jedoch dadurch angenähert festlegen kann, daß man zum Grenzfall  $\varepsilon \ll 1$  übergeht. Im letzteren Grenzfall kann man nämlich die Summe (16) streng ausführen oder auch den Gesamtquerschnitt direkt aus  $\eta$  durch Integration über  $z$  gewinnen. So erhält man schließlich

$$Q = \begin{cases} \frac{9\varepsilon^2}{4\pi\kappa^2} & \text{für } k^2 \ll \kappa^2, \\ \sim \frac{8\pi}{3\kappa^2} \sin^2 \frac{3\varepsilon}{4\pi} & \text{„ } k^2 \gg \kappa^2. \end{cases} \quad (33)$$

Die Streuung ist für eine Wechselwirkung vom Typus (19) nur bei kleinen Geschwindigkeiten kugelsymmetrisch, bei großen hauptsächlich nach vorn gerichtet; wenn  $\varepsilon$  von der Größenordnung 1 ist, hat der Gesamtwirkungsquerschnitt stets die Größenordnung  $1/\kappa^2$ , man könnte daher hier  $1/\kappa$  als eine Art Teilchenradius ansehen.

Man erkennt aus dem eben behandelten Beispiel der Wechselwirkung (19), daß eine Theorie von der hier besprochenen Art, in der die Matrix  $\eta$  gegeben wird, auch die Möglichkeit bietet, den Begriff Teilchenradius in einer relativistisch einwandfreien Weise einzuführen. Dies ist wichtig im Hinblick auf die Erfahrung, daß in der kosmischen Strahlung die Wirkungsquerschnitte für die Erzeugung neuer Teilchen im Grenzfall großer Energien einem konstanten Wert zuzustreben scheinen.

## [2. Die Entstehung neuer Teilchen.

Der einfachste Ansatz, der zur Entstehung neuer Teilchen führt, lautet

$$\eta = \lambda \int dr dt \varphi^5. \quad (34)$$

Eine Wechselwirkung dieser Art vermittelt Prozesse, bei denen zunächst beim Zusammenstoß zweier Teilchen ein neues erzeugt wird; in höheren



Näherungen können dann aus zwei Teilchen so viele neue entstehen, wie die Erhaltungssätze zulassen. Die mathematische Durchführung erweist sich allerdings beim Ansatz (34) als recht schwierig. Erheblich einfacher ist sie bei dem Ansatz

$$\eta = \lambda^2 \int dr dt \varphi^6, \quad (35)$$

der deshalb den folgenden Rechnungen zugrunde gelegt werden soll. Die Wechselwirkung (35) enthält als Primärprozeß die Entstehung eines Teilchenpaares beim Zusammenstoß zweier Teilchen. Durch Iteration dieses Prozesses können auch hier so viele Paare entstehen, wie die Erhaltungssätze zulassen. Ebenso wie in Abschn. 1a soll auch hier die Wechselwirkung (35) so abgeändert werden, daß die Operatoren  $a_i^*$  stets links von den Operatoren  $a_i$  stehen. Wir setzen also für den Operator  $\eta$  nach (4) bis (6)

$$\eta = \frac{\lambda^2}{V^3} \sum_{i_1 \dots i_6} \int dr dt \frac{\frac{15}{8} (--- + + + +) + \frac{20}{8} (--- + + +) + \frac{15}{8} (----- + +)}{\sqrt{k_1^0 k_2^0 \dots k_6^0}}. \quad (36)$$

Hierbei ist das Zeichen  $(--- + + + +)$  eine Abkürzung für

$$(- - + + + +)$$

$$= a_{i_1}^* a_{i_2}^* a_{i_3} a_{i_4} a_{i_5} a_{i_6} \times e^{i(-i_1 - i_2 + i_3 + \dots + i_6) \tau - i(-k_1^0 - k_2^0 + k_3^0 + \dots + k_6^0) t}. \quad (37)$$

Die Glieder in (36), die nur ein +- oder nur ein --Zeichen enthalten, fallen wegen der Erhaltungssätze weg. Die Faktoren  $15/8$  und  $20/8$  sind durch die Binomialkoeffizienten in  $\varphi^6$  bestimmt; sie können abgeändert werden, ohne daß das relativistisch korrekte Verhalten von (36) gestört wird; allerdings ist dann die einfache korrespondenzmäßige Deutung als  $\varphi^6$  nicht mehr möglich.

Im Ansatz (36) hängt die rechte Seite von den Winkeln zwischen den Richtungen der Teilchen nicht ab. Daraus folgt, daß sich beim Zusammenstoß zweier Teilchen ebenso wie in den Gleichungen (14) und (15) nur die kugelsymmetrische Welle (der „s-Zustand“) an der Streuung bzw. der Paarerzeugung beteiligt. Es genügt also, die Eigenwerte von  $\eta$  für diese kugelsymmetrischen Lösungen aufzusuchen.

Für die folgenden Rechnungen werden häufig Impulsraumintegrale der Form

$$I_n = \int \frac{d\mathbf{i}_1}{k_1^0} \frac{d\mathbf{i}_2}{k_2^0} \dots \frac{d\mathbf{i}_n}{k_n^0} \delta(\mathbf{K} - \sum \mathbf{i}_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0) \quad (38)$$

gebraucht. Eine einfache analytische Form scheinen diese Integrale nur für  $n = 2$  zu besitzen. Für unsere Zwecke genügt es aber, den Wert der

Integrale für zwei Grenzfälle zu kennen; nämlich erstens dann, wenn die zur Verfügung stehende Gesamtenergie sehr groß ist verglichen mit der Ruhenergie der Teilchen, und zweitens dann, wenn sie die gesamte Ruhenergie der Teilchen nur sehr wenig übersteigt. Die Ableitung der Integrale verschieben wir auf den Anhang I und führen hier nur das Ergebnis an [Gleichungen (120) und (122)], wobei der Einfachheit halber stets  $\mathfrak{R} = 0$  gesetzt wird (Schwerpunktsystem):

$$I_n = \begin{cases} \frac{2\pi^{n-1} K^{0\ 2n-4}}{(n-1)! (n-2)!} & \text{für } \kappa \ll K^0; \mathfrak{R} = 0; \\ \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}(n-1)} \kappa^{\frac{n-3}{2}} (K^0 - n\kappa)^{\frac{3n-5}{2}}}{n^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3n-5}{2}\right)!} & \text{„ } K^0 - n\kappa \ll \kappa, \mathfrak{R} = 0; \end{cases} \quad (39)$$

$$I_2 = 2\pi \sqrt{1 - \left(\frac{2\kappa}{K^0}\right)^2}. \quad (40)$$

Auch die folgenden Rechnungen sollen getrennt für zwei Grenzfälle durchgeführt werden: a) Die Energie der stoßenden Teilchen genügt eben, um ein Paar zu erzeugen ( $K^0 \approx 4\kappa$ ). b) Die zur Verfügung stehende Energie ist sehr groß verglichen mit der Ruhenergie.

a) *Erzeugung eines Teilchenpaares.* Für die Rechnungen dieses Abschnitts a) soll, um zunächst ein möglichst einfaches Problem zu behandeln, das mittlere Glied (— — — + +) in Gleichung (36) weggelassen werden; wir untersuchen also die physikalischen Folgerungen eines Ansatzes, der nur die Glieder (— — + + +) und (— — — — + +) enthält.

Die Eigenwerte des Operators  $\eta$  in (36) kann man bestimmen, indem man eine Schrödinger-Gleichung in den Variablen löst, auf die der Operator  $\eta$  wirkt. Diese Variablen sind hier zunächst die Anzahlen  $N_i$  der Teilchen vom Impuls  $\mathfrak{k}_i$ . Man wird also eine Schrödinger-Funktion  $\psi(N_1 N_2 \dots)$  der Anzahlen  $N_1, N_2 \dots$  einführen.  $\psi(N_1 N_2 \dots)$  gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an,  $N_1$  Teilchen vom Impuls  $\mathfrak{k}_1, N_2$  vom Impuls  $\mathfrak{k}_2$  usw. anzutreffen. Wir werden zeigen, daß in dem speziellen hier behandelten Falle die entstehende Schrödinger-Gleichung gelöst werden kann durch einen Ansatz der Form

$$\psi(N_1 N_2 \dots) = \sqrt{\frac{n!}{N_1! N_2! \dots}} \frac{a'_n}{\sqrt{k_1^0 k_2^0 \dots k_n^0}}. \quad (41)$$

Dabei ist  $n = N_1 + N_2 + \dots$  die gesamte Teilchenzahl,  $a'_n$  soll nicht mehr von den Impulsen der Teilchen abhängen.

Wenn, wie wir hier annehmen,  $K^0$  nur wenig größer ist als  $4\pi$  (dabei wird stets  $\mathfrak{R} = 0$  gesetzt), sind nur  $a'_2$  und  $a'_4$  von Null verschieden. Die Schrödinger-Gleichung erhält nach (36) jetzt die Form

$$\left. \begin{aligned} a'_2 \eta &= \frac{15}{8} \lambda^2 2 \sqrt{4 \cdot 3} \sum_{t_3 \dots t_6} \frac{a'_4 (2\pi)^4 \delta(\mathfrak{R} - \sum t_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0)}{k_3^0 \dots k_6^0 \cdot V^3} \\ &= \frac{15}{8} \lambda^2 2 \sqrt{4 \cdot 3} \frac{V}{(2\pi)^3} I_4 a'_4, \\ a'_4 \eta &= \frac{15}{8} \lambda^2 \frac{24}{\sqrt{4 \cdot 3}} \sum_{t_5 t_6} \frac{a'_2 (2\pi)^4 \delta(\mathfrak{R} - \sum t_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0)}{k_5^0 k_6^0 \cdot V^3} \\ &= \frac{15}{8} \lambda^2 \frac{24}{\sqrt{4 \cdot 3}} \frac{1}{V (2\pi)^3} I_2 a'_2. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen kommen tatsächlich die Impulse der einzelnen Teilchen nicht mehr vor, der Ansatz (41) eignet sich also zur Lösung der Schrödinger-Gleichung. Die Gleichungen (42) sind einfach zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung der beiden Unbekannten  $a'_2$  und  $a'_4$ . Für die Eigenwerte erhält man sofort

$$\left. \begin{aligned} \eta^2 &= \left( \frac{15}{8} \lambda^2 \right)^2 \frac{2 \cdot 24}{(2\pi)^{10}} I_2 I_4, \\ \eta &= \pm \frac{15 \sqrt{3}}{2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^5} \sqrt{I_2 I_4}; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$a'_4 = \pm \frac{(2\pi)^3}{V} a'_2 \sqrt{\frac{I_2}{I_4}}. \quad (44)$$

Die relative Wahrscheinlichkeit, 2 bzw. 4 Teilchen anzutreffen, wird

$$\left. \begin{aligned} \sum_{t_1 t_2} \frac{|a'_2|^2}{k_1^0 k_2^0} \delta(\mathfrak{R} - \sum t_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0) &= |a'_2|^2 I_2 \frac{V^2}{(2\pi)^6}, \\ \sum_{t_1 \dots t_4} \frac{|a'_4|^2}{k_1^0 \dots k_4^0} \delta(\mathfrak{R} - \sum t_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0) &= |a'_4|^2 I_4 \frac{V^4}{(2\pi)^{12}}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Man führt daher zweckmäßig ein:

$$a_n = a'_n \left[ \frac{V}{(2\pi)^3} \right]^{n/2} \sqrt{I_n}. \quad (46)$$

$|a_n|^2$  ist dann die Wahrscheinlichkeit, gerade  $n$  Teilchen zu finden. Aus (44) und (46) folgt

$$\frac{|a_4|^2}{|a_2|^2} = 1, \quad \text{d. h. } a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a_4 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (47)$$

In jedem der beiden Eigenzustände ist es also gleich wahrscheinlich, 2 oder 4 Teilchen anzutreffen. Die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung eines

Teilchenpaares erhält man jetzt durch die Matricelemente der Matrix  $S = e^{i\eta}$ . Man findet aus (43) und (47) sofort ( $S_{nm} = \sum_{\eta} a_{n\eta}^* e^{i\eta} a_{m\eta}$ ):

$$S_{2,2} = \cos\left(\frac{15\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^5} \sqrt{I_2 I_4}\right); \quad S_{2,4} = i \sin\left(\frac{15\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^5} \sqrt{I_2 I_4}\right). \quad (48)$$

Der Wirkungsquerschnitt für Paarerzeugung wird daher

$$Q_{\text{Paar erz.}} = \frac{\pi}{k'^2} \sin^2\left(\frac{15\sqrt{3}}{2} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^5} \sqrt{I_2 I_4}\right). \quad (49)$$

Wenn sich  $K^0$  dem Wert  $4\kappa$  nähert, so verschwindet dieser Wirkungsquerschnitt, und zwar nach Gleichung (39) wie  $(K^0 - 4\kappa)^{7/2}$ . Der Wirkungsquerschnitt kann aber auch, je nach den Werten der Konstante  $\lambda$ , für höhere Energien der stoßenden Teilchen noch an mehreren Stellen verschwinden.

Der Wirkungsquerschnitt für Streuung wird

$$Q_{\text{Str}} = \frac{4\pi}{k'^2} \sin^4\left(\frac{15\sqrt{3}}{4} \frac{\lambda^2}{(2\pi)^5} \sqrt{I_2 I_4}\right). \quad (50)$$

Auch  $Q_{\text{Str}}$  verschwindet mit  $I_4$ , da die Streuung bei den hier zugrunde gelegten Annahmen nur auf dem Umweg über eine virtuelle Paarbildung zustande kommt.

Wenn man das Glied der Form  $(- - - + + +)$  in Gleichung (36) mitberücksichtigen wollte, so ergäben sich gleich erheblich kompliziertere Verhältnisse. Der Ansatz (41) würde die Schrödinger-Gleichung nicht mehr lösen, da für  $n = 4$  auf der rechten Seite von (42) Glieder auftreten, die von den Impulsen der Teilchen abhängen.

*b) Die Erzeugung vieler Teilchen.* Für die folgenden Rechnungen soll — im Gegensatz zum Abschnitt 2 a) — vorausgesetzt werden, daß die Ruhmasse der Teilchen sehr klein gegen ihre Gesamtenergie ist, daß also die zur Verfügung stehende Gesamtenergie dazu ausreicht, sehr viele Teilchen in einem Akt zu erzeugen. Als Wechselwirkung setzen wir zunächst die volle Wechselwirkung (36) an.

*a) Mehrfachprozesse bei Wechselwirkung (36).* Die exakte Lösung der Schrödinger-Gleichung ist hier, selbst wenn man in erster Näherung einfach  $\kappa = 0$  setzt, wohl kaum mehr durchzuführen. Man kann die Lösung aber im Sinne des Ritzschen Verfahrens durch einen Ansatz der Form (41) approximieren. Man läßt dann nur Wellenfunktionen der Form (41) zur Konkurrenz zu und sucht diejenigen Werte der Koeffizienten  $a'_n$  aus, die den Erwartungswert des Operators zum Extremum machen.

Wie in (41) und (46) soll also gesetzt werden

$$\begin{aligned}\psi(N_1 N_2 \dots) &= \sqrt{\frac{n!}{N_1! N_2! \dots}} \frac{a_n'}{\sqrt{k_1^0 \dots k_n^0}} \\ &= a_n \left( \frac{n! (2\pi)^{3n}}{N_1! N_2! \dots k_1^0 \dots k_n^0 V^n \cdot I_n} \right)^{1/2}. \quad (51)\end{aligned}$$

Für den Erwartungswert des Operators  $\eta$  ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\sum \eta a_n^* a_n &= \sum_n \left[ \frac{15}{8} \frac{\lambda^3}{(2\pi)^5} \frac{\sqrt{n! (n+2)!}}{(n-2)!} \frac{a_n^* a_{n+2}}{\sqrt{I_n \cdot I_{n+2}}} \times \right. \\ &\quad \times \int \frac{d\mathfrak{f}_1}{k_1^0} \dots \frac{d\mathfrak{f}_{n-2}}{k_{n-2}^0} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-1}'}{k_{n-1}^{0'}} \frac{d\mathfrak{f}_n'}{k_n^{0'}} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-1}''}{k_{n-1}^{0''}} \dots \frac{d\mathfrak{f}_{n+2}''}{k_{n+2}^{0''}} [\delta], \\ &\quad + \frac{20}{8} \frac{\lambda^3}{(2\pi)^5} \frac{n!}{(n-3)!} \frac{a_n^* a_n}{I_n} \times \\ &\quad \times \int \frac{d\mathfrak{f}_1}{k_1^0} \dots \frac{d\mathfrak{f}_{n-3}}{k_{n-3}^0} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-2}'}{k_{n-2}^{0'}} \dots \frac{d\mathfrak{f}_n'}{k_n^{0'}} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-2}''}{k_{n-2}^{0''}} \dots \frac{d\mathfrak{f}_n''}{k_n^{0''}} [\delta], \\ &\quad + \frac{15}{8} \frac{\lambda^3}{(2\pi)^5} \frac{\sqrt{(n-2)! n!}}{(n-4)!} \frac{a_n^* a_{n-2}}{\sqrt{I_n \cdot I_{n-2}}} \times \\ &\quad \times \left. \int \frac{d\mathfrak{f}_1}{k_1^0} \dots \frac{d\mathfrak{f}_{n-4}}{k_{n-4}^0} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-3}'}{k_{n-3}^{0'}} \dots \frac{d\mathfrak{f}_n'}{k_n^{0'}} \int \frac{d\mathfrak{f}_{n-3}''}{k_{n-3}^{0''}} \frac{d\mathfrak{f}_{n-2}''}{k_{n-2}^{0''}} [\delta] \right]. \quad (52)\end{aligned}$$

Das Zeichen  $[\delta]$  auf der rechten Seite ist eine Abkürzung für den Ausdruck

$$\begin{aligned}[\delta] &= \delta(\sum \mathfrak{f} + \sum \mathfrak{f}') \delta(K^0 - \sum k^0 - \sum k^{0'}) \times \\ &\quad \times \delta(\sum \mathfrak{f}' - \sum \mathfrak{f}'') \delta(\sum k^{0'} - \sum k^{0''}). \quad (53)\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich durch Ausrechnen der Integrale nach (39)

$$\begin{aligned}\sum \eta a_n^* a_n &= \frac{15}{16} \frac{\lambda^3}{(2\pi)^5} K^{02} \sum_n \left[ \sqrt{(n+2)(n-1)} a_n^* a_{n+2} + \right. \\ &\quad \left. + 4(n-2) a_n^* a_n + \sqrt{n(n-3)} a_n^* a_{n-2} \right]. \quad (54)\end{aligned}$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\zeta = \eta \frac{16}{15} \frac{(2\pi)^3}{\lambda^3 K^{02}}, \quad (55)$$

so lautet die aus der Extremalforderung entspringende Schrödinger-Gleichung

$$\zeta a_n = \sqrt{(n+2)(n-1)} a_{n+2} + 4(n-2) a_n + \sqrt{n(n-3)} a_{n-2}.$$

Durch den Ansatz

$$a_n = \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)! 2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n! (n-1)!}} b_n \quad (56)$$

wird sie vereinfacht zu der Beziehung

$$\zeta b_n = (n-1) b_{n+2} + 4(n-2) b_n + n b_{n-2}. \quad (57)$$

Diese Gleichung kann streng gelöst werden, indem man  $b_n$  in der Form darstellt

$$b_n = \oint \frac{dt}{t^{n+1}} f(t). \quad (58)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (57) und partielle Integration erhält man dann für  $f(t)$  die Differentialgleichung

$$f'(t)(1 + 4t^2 + t^4) = f[3 + (\zeta + 8)t^2 - 2t^4] \quad (59)$$

mit der Lösung

$$f(t) = t^3(t^2 + 2 + \sqrt{3})^{-\frac{5}{4} - \frac{\zeta+6}{4\sqrt{3}}} \cdot (t^2 + 2 - \sqrt{3})^{-\frac{5}{4} + \frac{\zeta+6}{4\sqrt{3}}}. \quad (60)$$

Wenn man den Integrationsweg in Gleichung (58) in der in Fig. 2 angegebenen Weise festsetzt, so erreicht man dadurch, daß für große  $n$  die Werte  $b_n$  mit wachsendem  $n$  wie  $(2 + \sqrt{3})^{-n/2}$  abnehmen.

Dies muß physikalisch als Randbedingung der Schrödinger-Gleichung (57) gefordert werden, da die andere Lösung, bei der  $b_n$  mit  $n$  exponentiell zunimmt, nicht normiert werden könnte (d. h. für alle endlichen  $n$  würde sich  $b_n = 0$  ergeben). Ferner zerfällt die Lösung

von (57) offenbar in zwei unabhängige Lösungsgruppen, nämlich Lösungen, bei denen nur gerade  $n$  und solche, bei denen nur ungerade  $n$  vorkommen. Da wir den Stoß zweier Teilchen untersuchen wollen, interessieren wir uns nur für die erste Gruppe und setzen

$$\left. \begin{aligned} b_n &= 0 && \text{für } n \text{ ungerade,} \\ b_n &= \int \frac{dt}{t^{n+1}} f(t) && \text{„ } n \text{ gerade.} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Die Lösung der Gleichung (57) muß — genau wie alle üblichen Schrödinger-Funktionen der Quantenmechanik — nicht nur eine Randbedingung im Unendlichen, sondern auch eine bei  $n = 0$  befriedigen. Es muß nämlich  $b_0 = 0$  sein, sonst wird Gleichung (57) für  $n = 2$  nicht richtig erfüllt — das Vorhandensein von 0 Teilchen wird ja durch die Erhaltungssätze ausgeschlossen. Die Gleichung  $b_0 = 0$  bestimmt — bei Festsetzung des Integrationsweges durch Fig. 2 — die Eigenwerte  $\zeta$  (und damit  $\eta$ ) der Gleichung (57).

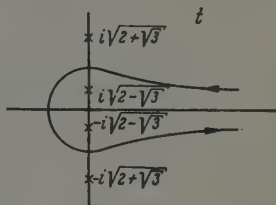


Fig. 2.



Zunächst kann man Gleichung (58) noch etwas vereinfachen, wenn man statt  $t$  eine neue Integrationsvariable  $s$  einführt durch die Gleichung

$$s = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{\alpha}}}, \quad (62)$$

wobei

$$2 - \sqrt{3} = \alpha, \quad 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{\alpha}$$

gesetzt ist. Dann schließt man aus (58) und (60)

$$b_n = \oint ds s^{\xi-1} \left[ 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right]^{\frac{\xi-3}{2}} \left[ \alpha \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right) \right]^{\frac{n}{2}} \quad (63)$$

mit

$$\xi = \frac{1}{2} + \frac{\xi - 6}{2\sqrt{3}}.$$

Der Integrationsweg ist in Fig. 3 dargestellt. Als Randbedingung zur Bestimmung der Eigenwerte von  $\xi$  erhält man also

$$b_0 = \oint ds s^{\xi-1} \left[ 1 - \alpha^2 + \frac{\alpha^2}{s^2} \right]^{\frac{\xi-3}{2}} = 0. \quad (64)$$

Da  $\alpha = 0,268$ ,  $\alpha^2 = 0,0718$  ist, kann man nach Potenzen von  $\alpha^2$  entwickeln und hoffen, daß man schon durch die ersten Entwicklungsglieder eine für qualitative Schlüsse ausreichende Genauigkeit erreicht. Man findet dann für die Eigenwerte von  $\xi$

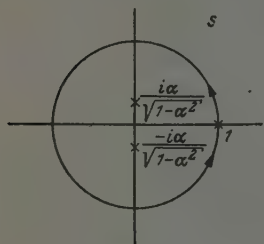


Fig. 3

$$\xi = l \left( 1 - \alpha^l \frac{\left( \frac{l-3}{2} \right)!}{\left( \frac{l}{2} \right)! \left( -\frac{3}{2} \right)!} \right), \quad (65)$$

wobei  $l$  irgendeine positive gerade Zahl ist ( $l = 2, 4, 6, \dots$ ). Die Eigenwerte sind daher

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2,072; \quad 4,008; \quad 6,000; \quad 8,000 \text{ usw.} \\ \zeta &= -0,55; \quad 6,12; \quad 13,05; \quad 20,0 \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Da  $\eta$  nach der Ausgangsgleichung (35) positiv definit sein sollte, scheint es zunächst ein Widerspruch, daß der tiefste Eigenwert von  $\eta$  nach (66) negativ wird. Dies liegt aber offenbar daran, daß nicht genau der Ansatz (35) zugrunde gelegt wurde, sondern eine Wechselwirkung, die aus (35) durch Vertauschung von Operatoren hervorging, die also nur für hohe Quantenzahlen dem Ansatz (35) korrespondenzmäßig entspricht.

Wir haben nun noch die Normierung der Lösung (63) vorzunehmen. Da wir

$$\sum_n |a_n|^2 = \sum_n \frac{\left[ \left( \frac{n-1}{2} \right)! \right]^2 2^{n-1}}{n! (n-1)!} |b_n|^2 \quad (67)$$

zu bilden haben, benutzen wir die Beziehung

$$\sum_{n=2,4,6,\dots} \frac{\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2 2^{n-1}}{n! (n-1)!} z^n = -\frac{\pi}{2} \sqrt{1-z^2} \quad \text{für } |z| < 1. \quad (68)$$

Aus nur und Gleichung (68) folgt (es ist stets nur über geradzahlige  $n$  zu summieren):

$$\sum_n |a_n|^2 = -\frac{\pi}{2} \int ds s^2 \int dt t^2 \sqrt{1-\alpha^2 \frac{(1-s^2)(1-t^2)}{s^2 t^2}} \times \\ \times \{[\alpha^2 + (1-\alpha^2)s^2][\alpha^2 + (1-\alpha^2)t^2]\}^{\frac{\xi-3}{2}}. \quad (69)$$

Dabei ist das Integral über  $t$  im entgegengesetztem Umlaufssinn zu nehmen wie das über  $s$ , da das einzelne Glied der Summe in (67)  $b_n^* \cdot b_n$  lautet. Setzt man

$$\alpha^2 + (1-\alpha^2)s^2 = u, \quad \alpha^2 + (1-\alpha^2)t^2 = v, \quad (70)$$

so folgt durch eine einfache Umrechnung

$$\sum_n |a_n|^2 = -\frac{\pi}{2(1-\alpha^2)^3} \int du \int dv (uv)^{\frac{\xi-3}{2}} \sqrt{uv-\alpha^2}. \quad (71)$$

In der Näherung, in der  $\xi$  einfach gleich einer positiven geraden Zahl gesetzt werden kann, folgt daher

$$\sum |a_n|^2 \approx -\frac{2\pi^3}{(1-\alpha^2)^3} \left(\frac{1}{\xi/2}\right) (-\alpha^2)^{\xi/2}. \quad (72)$$

Nur für den tiefsten Eigenwert ist diese Näherungsformel um einige Prozent unrichtig.

Mit dem gleichen Grad der Annäherung erhält man schließlich für die Koeffizienten  $a_n$  nach (68)

$$a_n = \left\{ \begin{array}{ll} (1-\alpha^2)^{3/2} & \text{für } n = \xi. \\ \left(\frac{n}{2}\right) (-1)^{\frac{n-\xi}{2}} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\xi-1}{2}\right)!} \sqrt{\frac{\xi! (\xi-1)}{n! (n-1)!}} 2^{\frac{n-\xi}{2}} \alpha^{\frac{n-\xi}{2}} (1-\alpha^2)^{3/2} & \text{für } n \geq \xi, \\ \left(\frac{\xi-3}{2}\right) \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{\xi-1}{2}\right)!} \sqrt{\frac{\xi! (\xi-1)}{n! (n-1)!}} 2^{\frac{n-\xi}{2}} \alpha^{\frac{\xi-n}{2}} (1-\alpha^2)^{3/2} & \text{„ } n \leq \xi \end{array} \right\} \quad (73)$$

( $\xi$  und  $n$  stets positiv und gerade).

Die Koeffizienten  $a_n$  haben also ein Maximum an der Stelle  $n = \xi$ , rechts und links vom Maximum fallen sie mit wachsenden Potenzen von  $\alpha$  ab.

Die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung von  $n$  Teilchen beim Streuvorgang erhält man wieder aus den Matrixelementen von  $S$ .

$$S_{2,n} = \sum_{\xi} a_{2,\xi}^* e^{i\eta} a_{n,\xi}. \quad (74)$$

Da nach (55) und (63)

$$\eta = \frac{15}{16} \frac{\lambda^3 K^0{}^2}{(2\pi)^3} [-6 + 2\sqrt{3}(\xi - \frac{1}{2})],$$

so wird

$$S_{2,n} = e^{-\frac{15}{16} \frac{\lambda^3 K^0{}^2}{(2\pi)^3} (6 + \sqrt{3})\xi} \sum_{\xi} a_{2,\xi}^* e^{iA\xi} a_{n,\xi}, \quad (75)$$

wobei

$$A = \frac{15\sqrt{3}}{8} \frac{\lambda^3 K^0{}^2}{(2\pi)^3} \quad (76)$$

gesetzt ist. Durch Einsetzen von (73) in (75) ergibt sich bis auf höhere Glieder in  $(\alpha^2)$

$$\begin{aligned} & \sum a_{2,\xi}^* e^{iA\xi} a_{n,\xi} \\ &= (1 - \alpha^2)^3 \cdot \alpha^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \left(\frac{n-1}{2}\right)! (-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi \sqrt{2} (n-1) \cdot n!} \sum_{\xi} \xi^{\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{\xi}{\frac{n}{2}}\right) (-e^{2iA})^{\frac{\xi}{2}}, \\ &= (1 - \alpha^2)^3 \cdot \alpha^{\frac{n-2}{2}} \frac{2^{\frac{n}{2}+1} \left(\frac{n-1}{2}\right)! (-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi \sqrt{2} (n-1) \cdot n!} \cdot \frac{n}{2} (1 - e^{2iA})^{\frac{n}{2}-1}. \end{aligned} \quad (77)$$

Schließlich erhält man für die Wahrscheinlichkeit  $w_n = |S_{2,n}^2|$  für die Entstehung von  $n$  Teilchen in der gleichen Näherung

$$w_n = \frac{2n^3}{\pi} \left(\frac{1}{2}\right) \left(-1\right)^{\frac{n}{2}+1} (2\alpha \sin A)^{n-2} (1 - \alpha^2)^6. \quad (78)$$

Diese Endformel zeigt, daß bei der hier zugrunde gelegten Wechselwirkung (36) explosionsartige Vielfachprozesse *nicht* auftreten; und zwar gilt dies unabhängig von der Größe der Konstante  $\lambda$  oder der zur Verfügung stehenden Energie  $K^0$ . Zunächst erkennt man ja aus (78), daß für kleine Werte von  $\lambda$ , d. h. für kleine Werte von  $A$ , die Wahrscheinlichkeiten  $w_4, w_6 \dots$  klein werden von der Ordnung  $A^2, A^4$  usw. Nur  $w_2$  nähert sich dabei dem Werte 1. [Dies trifft bei Formel (78) nicht zu, da (78) nur eine erste Näherung darstellt; für  $n = 2$  liefert (78) unabhängig von  $A$  den Wert  $w_2 = 0,82$ ; man erkennt aus dieser Abweichung von 1 den Genauigkeitsgrad der Gleichung (78), der durch die Summation von Fehlern bei den

Rechnungen (74) bis (77) schon erheblich geringer ist als der der Formeln (65), (72) und (73).] Aber selbst für den größtmöglichen Wert von  $\sin A$ , nämlich  $\sin A = 1$ , verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten ungefähr wie

$$w_2 = 0,82; \quad w_4 = 0,23; \quad w_6 = 0,084 \text{ usw.}, \quad (79)$$

d. h. die  $w_n$  nehmen mit wachsendem  $n$  rasch ab. Die mittlere Teilchenzahl liegt bei 3.

Dieses Ergebnis entspricht insofern nicht der Erwartung, als man nach dem Typus der Wechselwirkung (36) (die Konstante  $\lambda$  hat die Dimension einer Länge) bei hinreichend hoher Energie der stoßenden Teilchen echte Vielfachprozesse vermutet hätte. Man erkennt aber gleichzeitig aus Gleichung (78) auch, daß die Art der Abnahme von  $w_n$  mit wachsendem  $n$  von dem numerischen Wert der Konstanten  $\alpha$ , also offenbar von den speziellen Zahlenkoeffizienten in der Schrödinger-Gleichung (57) abhängt. Man muß also mit der Möglichkeit rechnen, daß bei anderer Wahl dieser Zahlenkoeffizienten auch Prozesse ganz anderer Art auftreten können. Die Zahlenkoeffizienten waren ja nur durch die korrespondenzmäßige Analogie zum Ansatz  $\int dr dt \varphi^6$  nahegelegt worden, während aus den Forderungen der Relativitätstheorie und Quantentheorie allein nichts über die Werte der Koeffizienten folgt. Wir werden daher im folgenden die Abänderungen untersuchen, die sich ergeben, wenn der Koeffizient des mittleren Gliedes auf der rechten Seite von (57) verändert wird.

*β) Vielfachprozesse bei veränderter Wechselwirkung.* Wir ersetzen den Koeffizienten des 2. Gliedes auf der rechten Seite von (57), der den Wert 4 hat, durch den unbestimmten Wert  $2a$  und fragen nach dem Verhalten von  $b_n$  für sehr große Werte von  $n$ . Setzt man

$$b_n = g(n) \cdot x^n, \quad (80)$$

wobei  $g(n)$  im Limes großer  $n$  langsam veränderlich sein soll, so folgt unter Weglassung aller Glieder von kleinerer Ordnung aus (57) die charakteristische Gleichung

$$1 + 2a x^2 + x^4 = 0 \quad (81)$$

mit der Lösung

$$x^2 = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}. \quad (82)$$

Die rechte Seite kann nun entweder reell sein wie im bisher diskutierten Fall  $a = 2$ , dann ist die eine Lösung größer als 1, die andere kleiner als 1,  $b_n$  nimmt dann mit wachsendem  $n$  entweder exponentiell zu oder ab. Oder aber die rechte Seite von (82) ist komplex — das tritt ein, wenn  $|a| < 1$  ist —, dann haben beide Lösungen den Absolutbetrag 1, d. h.  $|x| = 1$ . Die beiden

Lösungen von (57) verhalten sich dann im Unendlichen hinsichtlich der Konvergenzfrage gleich, eine Randbedingung im Unendlichen ist nicht zu stellen; das Eigenwertspektrum wird daher kontinuierlich, die eine Randbedingung  $b_0 = 0$  macht nur die zu dem betreffenden Wert von  $\zeta$  gehörige Lösung von (57) bestimmt. Die beiden Fälle  $|a| > 1$  und  $|a| < 1$  verhalten sich daher offenbar zueinander wie z. B. das diskrete und das kontinuierliche Eigenwertspektrum im Wasserstoffatom. Man wird so unmittelbar zu der Vermutung geführt, daß im Falle eines kontinuierlichen Spektrums, d. h. für  $|a| \leq 1$ , die Lösungen (57) echte explosionsartige Vielfachprozesse darstellen, während im Falle eines diskreten Spektrums ( $|a| > 1$ ) die Verhältnisse qualitativ so sind, wie sie im vorhergehenden Abschnitt besprochen wurden. Wir wollen im folgenden den Grenzfall  $a = 1$  untersuchen, der nach (82) bereits ein kontinuierliches Spektrum zur Folge hat. Wir gehen also jetzt aus von der Wechselwirkung

$$\eta = \frac{\lambda^2}{V^3} \sum_{i_1, \dots, i_n} \int dr dt \frac{\frac{15}{8} (---++++ + \frac{10}{8} (----++ + \frac{15}{8} (-----++)}{\sqrt{k_1^2 \dots k_n^2}}. \quad (83)$$

Die Lösung erfolgt ganz wie im vorausgehenden Abschnitt. Die Schrödinger-Gleichung lautet jetzt

$$\zeta b_n = (n-1) b_{n+2} + 2(n-2) b_n + n b_{n-2}, \quad (84)$$

der Ansatz (58) führt zu

$$f' t (1 + 2 t^2 + t^4) = f [3 + (4 + \zeta) t^2 - 2 t^4] \quad (85)$$

mit der Lösung

$$f = t^3 (1 + t^2)^{-\frac{5}{2}} e^{-\frac{\zeta + 3}{2(1+t^2)}}. \quad (86)$$

Durch Einführung der neuen Variablen

$$s = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad (87)$$

ergibt sich schließlich

$$b_n = \int ds s^2 \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\zeta + 3}{2} (s^2 - 1)}. \quad (88)$$

Der Integrationsweg muß so gewählt werden, daß bei der partiellen Integration die Randglieder verschwinden; sonst sind die Grenzen willkürlich. Für  $\frac{\zeta + 3}{2} > 0$  lautet etwa die allgemeinste Lösung von (57) (bis auf den trivialen konstanten Faktor):

$$b_n = \left( \int_{-1}^{+1} + \gamma \int_{-i\infty}^{+i\infty} \right) ds s^2 \left( \frac{1}{s^2} - 1 \right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{\zeta + 3}{2} (s^2 - 1)}. \quad (89)$$

Die Konstante  $\gamma$  ist nun so zu bestimmen, daß  $b_0$  verschwindet; damit ist die Lösung dann bis auf den Normierungsfaktor festgelegt. Wir setzen zur Abkürzung

$$\xi = \frac{\zeta + 3}{2}; \quad (90)$$

für  $n = 0$  wird dann

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} ds s^2 e^{\xi(s^2-1)} = -\frac{i}{2} \sqrt{\pi} \xi^{-\frac{3}{2}} e^{-\xi}, \quad (91)$$

also

$$\gamma = -i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi^{3/2} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2}. \quad (92)$$

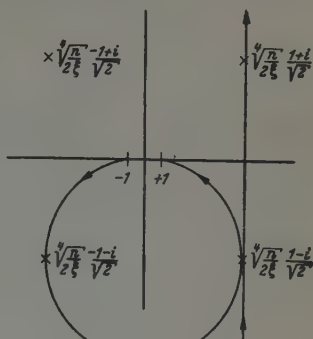


Fig. 4.

Nach (89) folgen daraus für die niedersten Koeffizienten  $b_n$  einfache Werte:  $b_2 = 2$ ,  $b_4 = 4\xi - 6$  usw.  $b_n$  ist ein Polynom vom  $\frac{n-2}{2}$ -ten Grade in  $\xi$  (vgl. Anhang II).

Für die weitere Untersuchung braucht man in erster Linie das Verhalten von  $b_n$  für große Werte von  $n$ . Dieses läßt sich am einfachsten aus Gleichung (89) nach der Sattelpunktmethode gewinnen. Die Sattelpunkte liegen an den vier Stellen

$$s_0 \approx \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{n}{2\xi}}, \quad (93)$$

der Integrand von (89) verhält sich dort wie

$$\pm i \sqrt{\frac{n}{2\xi}} (-1)^{\frac{n}{2}} e^{\pm i \sqrt{2n\xi} - \frac{\xi}{2} + 4\xi(s-s_0)^2 + \dots} \quad (94)$$

Die Integrale (81) sind auf den in Fig. 4 bezeichneten Wegen auszuführen. So ergibt sich für große  $n$ :

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^{+1} &\approx (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \cos \sqrt{2n\xi} e^{-\frac{\xi}{2}}, \\ \int_{-i\infty}^{+i\infty} &\approx -i (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{n\pi}{2}} \sin \sqrt{2n\xi} e^{-\frac{\xi}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$



Endlich folgt aus (89), (92) und (95)

$$b_n \approx (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{n\pi}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} \left( \cos \sqrt{2n\xi} - \xi^{3/2} \sin \sqrt{2n\xi} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2} \right) \quad (96)$$

$n \rightarrow \infty.$

Führt man eine entsprechende Rechnung für negative Werte von  $\xi$  durch, so tritt an die Stelle der periodischen Funktion  $e^{\pm i\sqrt{2n\xi}}$  die Exponentialfunktion  $e^{\pm \sqrt{-2n\xi}}$ .  $b_n$  nimmt dann für große  $n$  zu wie  $e + \sqrt{-2n\xi}$ , was mit den Randbedingungen nicht verträglich ist; und zwar gilt dies für beliebige negative Werte von  $\xi$ . Für negative  $\xi$  hat also die Schrödinger-Gleichung (84) keine Lösung, die mit den Randbedingungen verträglich wäre, das kontinuierliche Eigenwertspektrum erstreckt sich nur auf alle positiven Werte von  $\xi$ .

Aus (56) und (96) erhält man durch Anwendung der Stirlingschen Formel

$$a_n \approx (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\xi} \sqrt{\frac{4\pi^3}{8n}} e^{-\frac{\xi}{2}} \left( \cos \sqrt{2n\xi} - \xi^{3/2} \sin \sqrt{2n\xi} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2} \right) \quad (97)$$

$n \rightarrow \infty.$

Die Summe  $\sum_n |a_n|^2$  divergiert also für große  $n$ . Dies war bei Vorhandensein eines kontinuierlichen Spektrums zu erwarten, denn auch die Schrödinger-Funktion etwa im kontinuierlichen Spektrum des Wasserstoffatoms läßt sich nicht in der gewöhnlichen Weise normieren. Man kann die Normierung im kontinuierlichen Spektrum durchführen, indem man entweder endliche Intervalle  $\xi$  betrachtet, oder durch willkürliche Einführung eines Normierungsvolumens das Spektrum diskret macht. Dem Normierungsvolumen würde hier entsprechen, daß man eine maximale Teilchenzahl  $N$  vorgibt. Diese Annahme erhält auch dadurch einen physikalischen Sinn, daß das Verhältnis  $K^0/\kappa$ , das die maximale Teilchenzahl nach dem Energiesatz festlegt, zwar als sehr groß, aber nicht notwendig als unendlich groß angenommen wurde. Wir nehmen also im folgenden eine maximale, sehr große Teilchenzahl  $N$  an; dann wird das Eigenwertspektrum von  $\xi$  diskret, die Eigenwerte sind nach (97) durch

$$\sqrt{2N\xi} = \pi l + \delta(\xi) \quad (l \text{ ganze Zahl}) \quad (98)$$

festgelegt, wobei die konstante Phase noch langsam mit  $\xi$  veränderlich ist. Da  $N$  sehr groß ist, kann man näherungsweise setzen

$$\sum_l \rightarrow \frac{\sqrt{2N}}{2\pi} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}}. \quad (99)$$

Zur Normierung ergibt sich aus (97)

$$\sum_n^N |a_n|^2 = \frac{1}{2\xi^2} \sqrt{\frac{\pi^3 N}{8}} e^{-\xi} \left[ 1 + \left( \xi^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2} \right)^2 \right]. \quad (100)$$

Für die normierte Lösung folgt daraus schließlich

$$a_n = \frac{(-1)^{n/2} \sqrt{2}}{\sqrt{n N}} \cos(\sqrt{2 n \xi} + \delta), \quad (101)$$

$$n \rightarrow \infty,$$

wobei

$$\delta = \operatorname{arctg} \left( \xi^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2} \right). \quad (102)$$

In der gleichen Weise schließt man aus (56), (89) und (100) für den normierten Wert von  $a_2$ :

$$a_2 = \xi \sqrt{\frac{32}{\pi N}} e^{\xi/2} \cdot \cos \delta. \quad (103)$$

$a_2$  nimmt mit wachsendem  $\xi$  wie  $e^{-\xi/2}$  ab.

Nachdem so eine vollständige Übersicht über die Lösungen der Schrödinger-Gleichung gewonnen ist, kann man zur Berechnung der Matrixelemente von  $S$  und damit zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung bestimmter Teilchenmengen übergehen. Für die Phase  $\eta$  gilt nach (55)

$$\eta = \frac{15}{16} \frac{\lambda^2 K^{02}}{(2\pi)^3} (2\xi - 3) = B \left( \xi - \frac{3}{2} \right), \quad (104)$$

$$B = \frac{15}{8} \frac{\lambda^2 K^{02}}{(2\pi)^3}. \quad (105)$$

Dann folgt für das Matrixelement von  $S$  für große  $n$

$$S_{2,n} = \frac{\sqrt{2N}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} a_{2,\xi}^* e^{i\eta} a_{n,\xi}$$

$$= \frac{\sqrt{2N}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} \xi \sqrt{\frac{32}{\pi N}} e^{\xi/2} \cos \delta \frac{(-1)^{n/2} \sqrt{2}}{\sqrt{n N}} \cos(\sqrt{2 n \xi} + \delta) e^{iB\left(\xi - \frac{3}{2}\right)}. \quad (106)$$

Auch dieses Matrixelement wird für große Werte von  $B$  und  $n$  zweckmäßig näherungsweise nach der Sattelpunktmethode ausgewertet, da die zu integrierende Funktion das Produkt aus einem langsam veränderlichen und einem schnell veränderlichen Faktor ist. Der Sattelpunkt liegt bei

$\xi_0 = n/2B^2$ , der diesem Wert  $\xi_0$  entsprechende Wert der Phase  $\delta$  heiße  $\delta_0$ . So ergibt sich schließlich

$$w_n = |S_{2,n}|^2 = \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{1/2} \frac{e^{\xi_0}}{2B^2} \cos^2 \delta_0 \quad \text{für } n > 1, \quad \frac{K^0}{n} > 2B^2 > 1. \quad (107)$$

Der Verlauf dieser Größe als Funktion von  $n$  ist in Fig. 5 dargestellt.

Hier steigt also die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung von  $n$  Teilchen zunächst mit wachsendem  $n$  an bis zu einem Maximum, das bei einer Teilchenzahl von ungefähr  $2B^2$  liegt. Für größere Teilchenzahlen fällt die Wahrscheinlichkeit wieder exponentiell ab. Die mittlere Teilchenzahl ist  $3B^2$  [vgl. Anhang II, Gleichung (126)], sie ist sehr groß, wenn  $B$  groß ist, was

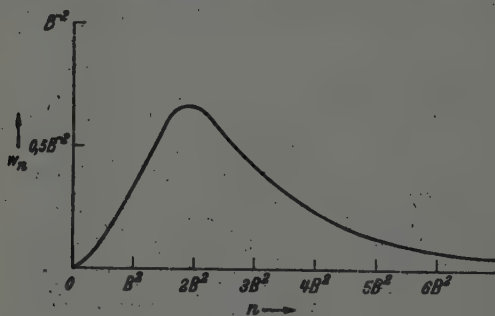


Fig. 5.

für die Gültigkeit von (107) vorausgesetzt wird. Wenn die Konstante  $\lambda$  von der Größenordnung  $1/\kappa$  ist, so wird  $B$  immer sehr groß, sofern nur  $K^0 > \kappa$  ist. Allerdings wird dann die Bedingung  $K^0/\kappa > 2B^2$  im allgemeinen nicht erfüllt und diese Bedingung muß für die Gültigkeit von (107) gestellt werden, weil ja die mittlere Teilchenzahl nicht größer sein kann als die maximal mögliche Teilchenzahl. Wenn  $B$  groß, aber die Bedingung  $K^0/\kappa > 2B^2$  nicht erfüllt ist, so wird die Primärenergie im allgemeinen aufgeteilt in viele Beträge der Größenordnung  $\kappa$ , die zu erwartende Teilchenzahl liegt in der Größenordnung  $K^0/\kappa$ ; dieser Fall soll aber nicht genauer untersucht werden.

Aus Gleichung (107) kann man auch die Energieverteilung der entstehenden Teilchen berechnen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß  $n$  Teilchen entstehen und daß irgendeines der  $n$  Teilchen im Impulsgebiet  $d\mathbf{f}$  liegt, ist nach (41) und (89) gegeben durch

$$dw = n w_n \frac{d\mathbf{f}}{k^0} \int \frac{d\mathbf{f}_2}{k_2^0} \dots \frac{d\mathbf{f}_n}{k_n^0} \frac{1}{I_n} \quad (108)$$

Für  $x \cong 0$  wird dies nach (99)

$$dw = w_n \frac{d\xi}{k} n(n-1)(n-2) \frac{(K^0{}^2 - 2K^0 k)^{n-3}}{K^0{}^{2n-4} \cdot \pi}. \quad (109)$$

Durch Summation über  $n$  kann man die spektrale Verteilung erhalten. Wenn große Werte von  $n$  wahrscheinlich sind, d. h. wenn die Bedingungen für die Gültigkeit von (107) zutreffen, so liegt der bei weitem überwiegende Teil der spektralen Intensität bei kleinen Werten von  $k$  der Größenordnung  $K^0/4B^2$ . In diesem Fall kann man die Summe über  $n$  durch ein Integral über  $\xi_0$  ersetzen, ferner statt  $(1 - 2k/K^0)$  den Ausdruck  $e^{-2k/K^0}$  schreiben. Schließlich wird nach (107), (109) und (102) die Anzahl  $dz$  der Teilchen zwischen der Energie  $k$  und  $k + dk$

$$dz = \frac{32 B^6}{K^0{}^3} dk k \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\xi e^{-\frac{4k B^2}{K^0} \xi} \cdot \xi^4 \frac{d}{d\xi} \arctg \left( \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\xi}} ds s^2 e^{s^2} \right). \quad (110)$$

In zwei Grenzfällen kann man einen einfachen Ausdruck für  $dz$  aus (110) gewinnen:

$$dz = \frac{32 B^6}{K^0{}^3} dk k \left[ \frac{79}{8} - \frac{641}{16} \left( \frac{4k B^2}{K^0} \right) + \dots \right] \quad \text{für} \quad \frac{4k B^2}{K^0} \ll 1, \quad (111)$$

$$dz = \frac{4180 B^6}{\pi K^0{}^3} \left( \frac{4k B^2}{K^0} \right)^{-\frac{11}{2}} k dk \quad \text{,,} \quad \frac{4k B^2}{K^0} \gg 1. \quad (112)$$

Für Werte der Größe  $(4k B^2/K^0)$  von der Ordnung 1 kann man das Integral (110) numerisch auswerten. So erhält man das in Fig. 6 dargestellte Spektrum. Die Intensität, d. h. die Energie pro Intervall  $dk$  ergibt sich durch Multiplikation mit  $k$ :

Der Wechselwirkungsansatz (88) führt also zum Auftreten explosionsartiger Vielfachprozesse, zur Erzeugung vieler Teilchen in einem einzigen Akt. Der Vergleich der eben gewonnenen Ergebnisse mit denen von Abschn. 2 b,  $\alpha$  zeigt deutlich, wie die Veränderung des Zahlkoeffizienten im mittleren Glied der Wechselwirkung den ganzen Lösungstypus verändert hat. Damit wird auch eine Frage beantwortet, die in Teil I aufgeworfen wurde: Ob nämlich die Matrix  $\eta$ , die in allen Streuproblemen diskrete Eigenwerte besitzt, etwa grundsätzlich nur diskrete Eigenwerte haben könne, oder ob unter bestimmten Bedingungen auch ein kontinuierliches Spektrum vorkommt. Die Ergebnisse der eben durchgeführten Rechnung zeigen, daß ein kontinuierliches Eigenwertspektrum dann auftreten kann (aber nicht auftreten muß), wenn die Gesamtenergie zur Erzeugung unendlich vieler Teilchen ausreicht, d. h. wenn es sich um Teilchen der Ruhmasse Null

handelt. Wenn die Wechselwirkung eine Form hat, die zu einem kontinuierlichen Eigenwertspektrum führt, so kann es echte Vielfachprozesse, d. h. die Erzeugung sehr vieler Teilchen in einem Akt geben. Wenn die Teilchen eine endliche Ruhmasse besitzen, aber die Gesamtenergie doch zur Erzeugung sehr vieler Teilchen ausreicht, so ist zwar das Spektrum von  $\eta$  stets diskret, es besteht aber dann aus sehr vielen, dicht beieinanderliegenden Eigenwerten.

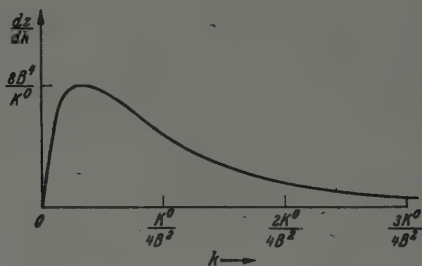


Fig. 6.

Echte Vielfachprozesse kann es auch dann geben, nur ist dabei die Teilchenzahl natürlich nach oben durch den Energiesatz beschränkt. Etwas ungenau kann man sagen, daß das Auftreten explosionsartiger Vielfachprozesse direkt an die Existenz eines kontinuierlichen (oder fast kontinuierlichen) Eigenwertspektrums von  $\eta$  geknüpft sei.

### 3. Übersicht über die gewonnenen Resultate.

Die Ergebnisse der zum Teil komplizierten Rechnungen der vorausgehenden Abschnitte lassen sich in folgender Weise zusammenfassen: Wenn an der Stelle der Wechselwirkungsenergie in der Hamilton-Funktion ein Ausdruck ähnlicher Art als  $\eta$ -Matrix vorgegeben wird, so lassen sich alle Fragen nach der Streuung und der Emission und Absorption von Elementarteilchen streng behandeln. Für die reinen Streuvorgänge ist die Bestimmung der Eigenwerte der  $\eta$ -Matrix äquivalent dem üblichen Verfahren: Entwicklung der einfallenden Welle nach Kugelfunktionen und Bestimmung der Phasenkonstanten in den einzelnen Kugelwellen. Für die Emissions- und Absorptionsprozesse hat das Eigenwertproblem der Wechselwirkungsmatrix kein so einfaches Analogon in den bisherigen Methoden. Trotzdem ergeben sich für den Fall kleiner Wechselwirkung praktisch die gleichen Resultate wie in der bisherigen Theorie, weil die beiden Theorien im Falle sehr kleiner Wechselwirkung ineinander übergehen.

Die  $\eta$ -Matrix stellt aber einen weiteren Rahmen für die zukünftige Theorie als die Hamilton-Funktion insofern dar, als sie gestattet, Wechsel-

wirkungen einzuführen, die kein einfaches korrespondenzmäßiges Analogon von Kräften der klassischen Theorien sind. Solche erweiterten Wechselwirkungsansätze können z. B. zu Wirkungsquerschnitten für Streuung führen, die im Grenzfall beliebig großer Energien der stoßenden Teilchen einem konstanten Wert zustreben und insofern dem Begriff Teilchenradius einen klaren physikalischen Sinn geben.

Schließlich können in dieser Theorie, in der die  $\eta$ -Matrix gegeben wird, Stoßprobleme behandelt werden, bei denen Teilchen sehr hoher Energie mit einem Schlage viele Teilchen erzeugen. Diese Prozesse, die in der bisherigen Theorie wegen der Divergenzschwierigkeiten grundsätzlich nicht behandelt werden konnten und von denen auch experimentell bisher wenig bekannt ist, können mit Hilfe der Wechselwirkungsmatrix bis in alle Einzelheiten beschrieben werden — wobei es aber einstweilen unentschieden ist, ob die Beschreibung mit einer einfachen  $\eta$ -Matrix den experimentellen Tatsachen gerecht werden kann.

Im ganzen besteht der Vorteil der Behandlung physikalischer Probleme auf Grund der  $\eta$ -Matrix gegenüber der bisherigen Behandlung in der Hauptsache in der vollständigen Vermeidung aller Divergenzen, die zur Folge hat, daß die so erhaltenen Antworten auf physikalische Fragen von vornherein den Forderungen der Quantentheorie und der Relativitätstheorie in Strenge genügen.

Unbeantwortet bleibt einstweilen die Frage nach der Gestalt der  $\eta$ -Matrix selbst, und schon in Teil I wurde auseinandergesetzt, daß es kaum Gründe für eine besonders einfache Gestalt der Wechselwirkungsmatrix gibt; daß man im Gegenteil annehmen muß, daß diese Matrix erst aus Bedingungen ganz anderer Art konstruiert werden muß.

Eine andere Frage, deren Beantwortung bisher noch nicht versucht worden ist, betrifft den anschaulichen Inhalt einer solchen Theorie. Da nämlich die  $\eta$ -Matrix keine Aussage enthält über das Verhalten der Wellenfunktionen in den Gebieten des Konfigurationsraumes, in denen die Teilchen einander nahekomen, bleibt zunächst unklar, inwieweit eine raumzeitliche Lokalisierung von Vorgängen in dieser Theorie überhaupt möglich ist. Während für die Eigenwertprobleme nur die Teilmatrix von  $\eta$  wesentlich ist, die zu einem bestimmten Wert von Gesamtenergie und -impuls gehört, spielen für die Frage der Lokalisierung gerade die Beziehungen zwischen den Teilmatrizen zu verschiedenen Energie-Impulswerten eine Rolle. Die Untersuchung dieser Zusammenhänge muß jedoch späterer Arbeit vorbehalten bleiben.



# Mathematischer Anhang.

## I. Die Impulsraumintegrale.

$$I_n = \int \frac{d\mathbf{r}_1}{k_1^0} \dots \frac{d\mathbf{r}_n}{k_n^0} \delta(\mathbf{R} - \sum \mathbf{r}_i) \delta(K^0 - \sum k_i^0). \quad (113)$$

Für  $n = 2$  kann das Integral elementar ausgewertet werden. Für  $\mathbf{R} = 0$  wird

$$I_2 = \int \frac{d\mathbf{r}_2}{k_2^{02}} \delta(K^0 - 2k_2^0) = 2\pi \sqrt{1 - \left(\frac{2\kappa}{K^0}\right)^2}; \quad (114)$$

für  $\mathbf{R} \neq 0$  folgt dann durch Lorentz-Transformation ( $I_n$  ist relativistisch invariant):

$$I_2 = 2\pi \sqrt{1 - \frac{4\kappa^2}{K^{02} - \mathbf{R}^2}}. \quad (115)$$

Die höheren Integrale  $I_n$  sollen getrennt für  $\kappa = 0$  und für  $K^0 - n\kappa \ll \kappa$  bestimmt werden.

a) Für  $\kappa = 0$  folgt aus Dimensionsgründen (bei  $\mathbf{R} = 0$ )

$$I_n = c_n K^{02n-4} \quad (116)$$

also für  $\mathbf{R} \neq 0$

$$I_n = c_n (K^{02} - \mathbf{R}^2)^{n-2}. \quad (117)$$

Aus (113) und (117) schließt man für  $\mathbf{R} = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} I_{n+1} &= \int \frac{d\mathbf{r}}{k} c_n [(K^0 - k)^2 - k^2]^{n-2}, \\ &= \frac{\pi}{n(n-1)} c_n K^{02n-2}, \\ &= c_{n+1} K^{02n-2}; \end{aligned} \right\} \quad (118)$$

d. h.

$$c_{n+1} = \frac{\pi}{n(n-1)} c_n. \quad (119)$$

Aus (115) und (119) folgt durch vollständige Induktion

$$I_n = \frac{2\pi^{n-1}}{(n-1)!(n-2)!} K^{02n-4}. \quad (120)$$

b) Für  $K^0 - n\kappa \ll \kappa$  kann man entwickeln:  $k^0 = \kappa + \frac{k^2}{2\kappa} + \dots$  und in erster Näherung setzen (für  $\mathbf{R} = 0$ ):

$$I_n = \kappa^{-n} (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{t} \int d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_n e^{i\left[-\sum \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r} - \left(K^0 - n\kappa - \sum \frac{k_i^2}{2\kappa}\right)t\right]}. \quad (121)$$

Das Integral über  $t$  ist von  $-\infty$  bis  $+\infty$  oberhalb der reellen Achse auszuführen, damit das Integral über  $\mathbf{r}_i$  konvergiert. Dann folgt

$$\left. \begin{aligned} I_n &= \kappa^{-n} (2\pi)^{-4} \int d\mathbf{r} \int dt \left( \frac{2\pi\kappa}{-it} \right)^{\frac{3n}{2}} e^{i \left[ -\frac{\kappa n}{2t} r^2 - (K^0 - n\kappa)t \right]}, \\ &= \kappa^{-n} (2\pi)^{-4} \int dt \left( \frac{2\pi\kappa}{-it} \right)^{\frac{3n}{2}} \left( \frac{2\pi t}{i\kappa n} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-i(K^0 - n\kappa)t}, \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} (n-1)! \kappa^{\frac{n-3}{2}} (K^0 - n\kappa)^{\frac{3n-5}{2}}}{n^{3/2} \left( \frac{3n-5}{2} \right)!}. \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

## II. Die zu Gleichung (84) gehörigen Polynome.

Die spezielle Lösung (89) der Differenzengleichung (84) führt zu dem Resultat, daß der Koeffizient  $b_n$  ein Polynom vom  $(n/2 - 1)$ -ten Grade in  $\xi$  ist. Da  $b_2 = 2$  ist, kann man die ersten Polynome leicht aus der Differenzengleichung

$$(n-1)b_{n+2} + 2(n-\xi-\tfrac{1}{2})b_n + nb_{n-2} = 0$$

berechnen. Es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= 2, \\ b_4 &= 4\xi - 6, \\ b_6 &= \frac{1}{3}(8\xi^2 - 40\xi + 34), \\ b_8 &= \frac{1}{3 \cdot 5}(16\xi^3 - 168\xi^2 + 496\xi - 266), \\ b_{10} &= \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7}(32\xi^4 - 576\xi^3 + 3072\xi^2 - 5472\xi + 2630) \end{aligned} \right\} \quad (123)$$

usw.

Diese Polynome haben eine interessante Ähnlichkeit mit den bekannten Polynomsystemen, den Kugelfunktionen, den Laguerreschen, Hermite-schen und Tschebyscheffschen Polynomen. Ähnlich wie jene Polynome haben sie nämlich die Eigenschaft, daß sie durch Multiplikation mit einer geeigneten Normierungsfunktion orthogonal werden. Bei den bekannten Polynomsystemen ist diese Normierungsfunktion eine einfache Funktion, z. B. bei den Laguerreschen Polynomen  $e^{-x}$ , bei den Hermite-schen  $e^{-x^2}$  bei den Tschebyscheffschen  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . Hier jedoch hat der Normierungs-faktor eine recht komplizierte Gestalt und ist durch Gleichung (100) gegeben.

Die normierten Koeffizienten  $a_n$  müssen ja nach allgemeinen Gesetzen der Transformationstheorie der Orthogonalitätsrelation genügen:

$$\frac{\sqrt{2N}}{2\pi} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi}} a_n^* a_m = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m, \\ 0 & \text{,, } n \neq m. \end{cases} \quad (124)$$

Der Faktor, der das Produkt  $b_n b_m$  orthogonal macht, lautet also hier nach Gleichung (100) (bis auf unwesentliche Zahlfaktoren):

$$\begin{aligned} d\xi \xi^{3/2} e^{\xi} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[ 1 + \left( \xi^{3/2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{+1} ds s^2 e^{\xi s^2} \right)^2 \right]^{-1} \\ = d\xi \xi \frac{d}{d\xi} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\xi}} ds s^2 e^{s^2} \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Dieser Faktor verhält sich für große  $\xi$  wie  $\sqrt{\xi} e^{-\xi}$ , für kleine  $\xi$  wie  $\xi^{3/2}$ . Setzt man die normierten Werte von  $a_n$  nach den Gleichungen (56) und (100) in die Beziehung (124) ein; so erhält man einfache ganzzahlige Werte für die folgenden bestimmten Integrale ( $n$  soll eine positive ganze Zahl sein):

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\xi (2\xi)^n \frac{d}{d\xi} \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\xi}} ds s^2 e^{s^2} \right). \quad (126)$$

Für die niedersten  $n$ -Werte ergibt sich

$$p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 13, p_4 = 79, p_5 = 641, p_6 = 6579 \text{ usw.}$$

# Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten\*).

Von U. Stille in Braunschweig.

(Eingegangen am 1. Dezember 1942.)

Für eine spätere Diskussion der Zahlenwerte für die Atomkonstanten  $e$ ,  $e/m_0$ ,  $h$  werden die wesentlichen Gesichtspunkte besprochen und zusammengestellt. Einmal haben neue experimentelle Ergebnisse frühere Unstimmigkeiten beseitigt. Zum anderen wird auf die Notwendigkeit hingewiesen, experimentelle Ergebnisse zunächst eindeutig so anzugeben, wie sie gemessen wurden, und nicht durch die verschiedensten Umrechnungen auf andere Größen in anderen Maßsystemen abzuändern; die hierdurch sich für den Vergleich verschiedener Meßresultate ergebenden Schwierigkeiten können erst durch nachträgliche Zurückführung auf die ursprünglich gemessenen Größen beseitigt werden. Weiter erscheint eine Angabe auch der Zahlenwerte für die Atomkonstanten in internationalen elektrischen Einheiten erwünscht, soweit elektrische Größen in diese eingehen. Schließlich wird eingehend der Fragenkomplex Fehlergrenze ÷ wahrscheinlicher Fehler mit besonderer Berücksichtigung der hierdurch für das Atomkonstantenproblem auftretenden und aufgetretenen Schwierigkeiten behandelt. Dabei werden diese beiden verschiedenen Auffassungen und die für ihre Anwendung vorgebrachten Argumente gegenübergestellt. Ferner werden die in dem Glauben an den wahrscheinlichen Fehler als ein „objektives“ Fehlerkriterium aus rein formal-mathematischen Rechenoperationen abgeleiteten „besten“ Werte für die Atomkonstanten herausgestellt und allgemeine Schlußfolgerungen auf die Gültigkeit grundsätzlicher Gesetzmäßigkeiten diskutiert. Vom Standpunkt der experimentellen Messung, durch die näherer Aufschluß über die Atomkonstanten erwartet werden darf, erscheint die Benutzung der Fehlergrenze angebracht.

Über die Kenntnis der Zahlenwerte für die atomaren Konstanten  $e$ ,  $e/m_0$  und  $h$  und die wechselseitigen Beziehungen zwischen ihnen sind im Laufe der Jahre eine ganze Reihe von eingehenden Untersuchungen<sup>1)</sup>

\*) Gleichzeitig gehen zwei weitere Veröffentlichungen unter den Titeln „Die Umrechnungsfaktoren von internationalen auf absolute elektrische Einheiten“ bzw. „Die atomaren Konstanten  $e$ ,  $e/m_0$  und  $h$ “ in Druck, die in den folgenden Heften dieser Zeitschrift (ZS. f. Phys. **121**, H. 1/2, 1943 bzw. ebenda **121**, H. 3/4, 1943) erscheinen werden.

<sup>1)</sup> Siehe z. B.: R. Ladenburg, Ann. Phys. (V) **28**, 458, 1937; S. v. Friesen, Proc. Roy. Soc. London (A) **160**, 424, 1937; R. A. Millikan, Ann. Phys. (V) **32**, 34, 1938; F. Kirchner, Erg. exakt. Naturwiss. **18**, 26, 1939; — W. N. Bond, Phil. Mag. (VII) **10**, 994, 1930; **12**, 632, 1931; **22**, 624, 1936; Proc. Phys. Soc. **49**, 202, 1937; R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. **1**, 1, 1929; Phys. Rev. **40**, 228, 318, 1932; Science **79**, 438, 1934; Nature **137**, 187, 1936; Phys. Rev. **52**, 241, 1937; **58**, 658, 1940; H. Shiba, Scient. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo **19**, 97, 1932; **21**, 128, 1933; **34**, 1308, 1938; J. W. M. Du Mond, Phys. Rev. **52**, 1251, 1937; **56**, 153, 1939; F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. **11**, 65, 1939.

erschienen. Eine erneute Diskussion dieses Themas erscheint heute aus Gründen erforderlich, die in dieser Veröffentlichung zunächst herausgestellt werden und dabei gleichzeitig die Gesichtspunkte ergeben, nach denen in einer anschließenden Untersuchung <sup>1)</sup> das Problem zahlenmäßig behandelt wird.

### 1. Neue experimentelle Ergebnisse.

Einmal sind in letzter Zeit eine Reihe neuer Präzisionsbestimmungen <sup>2)</sup> veröffentlicht worden. Ihre Ergebnisse verschieben insofern das bisherige Bild, als speziell durch die neuen wesentlich höher liegenden  $h/e$ -Werte die Diskrepanzen beseitigt scheinen, die noch zwischen den einzelnen unabhängig voneinander gemessenen Zahlenwerten für die verschiedenen Atomkonstanten auftraten, wenn man diese bezüglich ihrer gegenseitigen Konsistenz durch Einsetzen in eine zwischen den Atomkonstanten bestehende Beziehung, z. B. die Rydberg-Formel, prüfte.

### 2. Gemessene Größen und angegebene Werte für die Atomkonstanten.

Weiterhin ergibt sich aus der Durchsicht der vorliegenden Veröffentlichungen, daß es auch im Falle der Atomkonstantenbestimmung angebracht erscheint, die experimentell gefundenen Ergebnisse so anzugeben, wie sie durch die betreffende Versuchsanordnung gewonnen wurden. Statt dessen werden fast regelmäßig die erhaltenen Zahlenwerte durch Multiplikation mit den verschiedensten Umrechnungsfaktoren und Konstanten erst so abgewandelt, bis sie in die Schreibweise von Gleichungen hineinpassen, denen eine andere Auffassung bzw. ein anderes Maßsystem zugrunde liegt, als es bei den experimentellen Messungen benutzt wurde. Dies gilt besonders für die Umrechnungen, die vorgenommen wurden, um die meßtechnisch benutzten internationalen elektrischen Einheiten auf die entsprechenden absoluten des CGS-Systems zurückzuführen und um elektrisch gemessene Größen mit mechanisch gemessenen in Beziehung oder Vergleich bringen zu können.

<sup>1)</sup> U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943. — <sup>2)</sup> P. Ohlin, Nature 145, 223, 1940; Ark. Math., Astron. och Fys. 27B, Nr. 10, 1940; Dissertation Uppsala, Almqvist & Wiksells, 1941; J. W. M. Du Mond, H. H. Bailey, W. K. H. Panofsky u. A. E. S. Green, Phys. Rev. 59, 219, 1941; J. W. M. Du Mond, W. K. H. Panofsky u. A. E. S. Green, Phys. Rev. 60, 163, 1941; J. A. Bearden u. G. Schwarz, Phys. Rev. 59, 934, 1941; — J. A. Bearden, Journ. appl. Phys. 12, 395, 1941; T. H. Laby u. V. D. Hopper, Nature 143, 157, 1939; 145, 932, 1940; Proc. Roy. Soc. London (A) 178, 243, 1941; — J. W. Drinkwater, Sir Owen Richardson u. W. E. Williams, ebenda 174, 164, 1940; 175, 345, 1940.

Das Beispiel der  $e/m_0$ -Bestimmungen möge den Sachverhalt beleuchten. Mit den verschiedenen benutzten experimentellen Methoden sind auch eine ganze Reihe verschiedener Größen gemessen worden:

$$\begin{aligned} \text{z. B.: } 1) \quad \frac{e}{m_0} \text{ in } \frac{(\text{m/sec})^2}{\text{Volt}} &= \frac{\text{m}^2}{\text{Volt} \cdot \text{sec}^2} && (\text{Perry-Chaffee, Kirchner}), \\ \mu_0 \cdot \frac{e}{m_0} \text{ in } \frac{\text{sec}^{-1}}{\text{Amp/m}} &= \frac{\text{m}}{\text{Amp} \cdot \text{sec}} && (\text{Dunnington}), \\ \frac{\mu_0}{c_0} \cdot \frac{e}{m_0} \text{ in } \frac{\text{m}^{-1}}{\text{Amp/m}} &= \text{Amp}^{-1} && (\text{Zeeman-Effekt}), \\ \mu_0^2 \cdot \frac{e}{m_0} \text{ in } \frac{\text{Volt}}{(\text{Amp/m})^2 \cdot \text{m}^2} &= \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}^2} && (\text{Goedicke, Shaw}), \\ \mu_0 \cdot F \cdot \frac{e}{m_0} \text{ in } \frac{1}{\text{m}^2 \cdot \text{Kilomol/m}^3} &= \frac{\text{m}}{\text{Kilomol}} && (\text{Bearden}) \end{aligned}$$

oder das Molekulargewicht des Elektrons, bezogen auf die physikalische Atomgewichtsskala:

$$(M_e) = F \cdot m_0/e$$

als Proportionalitätsfaktor zwischen der individuellen Masseneinheit Kilomol für das Elektron und der üblichen physikalischen Masseneinheit kg

(Feinstruktur).

Alle diese verschiedenen Meßresultate findet man aber in den einzelnen Arbeiten — nachträglich auf CGS-Einheiten umgerechnet — als  $e/m_0$ -Werte in absoluten elektromagnetischen Einheiten angegeben. Dabei wechseln die Zahlenwerte der einzelnen hierzu benutzten Umrechnungsfaktoren von Autor zu Autor und sind teilweise sogar nicht eindeutig oder überhaupt nicht angegeben. Weiter sind bei der Fehlerbestimmung vielfach die durch diese Umrechnungsfaktoren hineinkommenden Unsicherheiten im Endresultat vernachlässigt worden; ein solches Verfahren ist aber durchaus nicht immer zulässig, wie die zahlenmäßige Angabe für die Fehlergrenzen der verschiedenen Faktoren zeigen wird.

Will man also die für  $e/m_0$  in den verschiedenen Arbeiten angegebenen Werte vergleichen, so müssen diese jetzt erst nachträglich auf die ursprüng-

1) Dabei bedeuten:  $\mu_0$  die absolute Permeabilität des Vakuums in  $\frac{\text{Volt} \cdot \text{sec}}{\text{Amp} \cdot \text{m}}$ ,  $c_0$  die Vakuumlichtgeschwindigkeit in m/sec, und  $F$  die spezifische Ionenladung („Faradaysche Konstante“) in  $\text{Amp} \cdot \text{sec}/\text{Kiloäquivalent}$  (bei den „einwertigen“ Elektronen auch in  $\text{Amp} \cdot \text{sec}/\text{Kilomoll}$ ). Die einzelnen Meßergebnisse der verschiedenen Meßverfahren werden in der folgenden Diskussion über die Atomkonstanten (U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943) im einzelnen besprochen.



lich gemessenen Größen zurückgeführt werden — soweit das bei den oft unvollständigen Angaben in einzelnen Veröffentlichungen noch eindeutig möglich ist! Erst dann kann ein gegenseitiger Vergleich der nach verschiedenen Methoden gewonnenen Meßresultate dadurch vorgenommen werden, daß man diese durch Multiplikation mit den *gleichen* Zahlenwerten für die einzelnen Umrechnungsfaktoren und Konstanten auf eine *einheitliche* Größe  $e/m_0$  — z. B. gemessen in  $\text{Amp} \cdot \text{sec}/\text{kg}$  oder  $\text{m}^2/\text{Volt} \cdot \text{sec}^2$  — zurückführt. Dabei müssen selbstverständlich bei der Fehlerbestimmung die Fehlergrenzen der einzelnen Faktoren berücksichtigt werden. Dieser Weg scheint jedenfalls den durchgeführten Experimenten am besten gerecht zu werden.

### 3. Angabe der Atomkonstanten in internationalen elektrischen Einheiten.

Die konsequente Durchführung dieser Überlegungen führt noch zu einer weiteren Folgerung. Alle elektrischen Messungen werden überall mit in internationalen elektrischen Einheiten geeichten Instrumenten durchgeführt oder an diese Einheiten angeschlossen. Man sollte also, wie es bei physikalischen Messungen üblich ist, auch auf dem Gebiete der Atomkonstanten die experimentell gewonnenen Meßresultate grundsätzlich in internationalen elektrischen Einheiten angeben, soweit in ihnen elektrische Größen vorkommen — und das ist meist der Fall!

Es würden dann von vornherein eine ganze Reihe von möglichen Mißverständnissen und Schwierigkeiten ausgeschlossen sein. Die Benutzung der jeweils als richtig erachteten Zahlenwerte für die notwendigen Umrechnungsfaktoren auf andere Maßsysteme gestattet jederzeit, eine Umrechnung auf das Maßsystem *einheitlich* vorzunehmen, welches aus irgendwelchen Gründen dem einzelnen Physiker angenehm erscheint.

### 4. Die Fehlerangaben für die Atomkonstanten.

Ein weiterer Punkt, der einer etwas eingehenderen Diskussion bedarf, ist die Art der Fehlerbestimmung und Fehlerangabe, die entsprechende Art der Mittelwertbildung für die Zahlenwerte der Atomkonstanten und die Berechnung sogenannter „besten“ Werte für diese, wie sie in neuerer Zeit — besonders von amerikanischen Autoren — vorgenommen wird<sup>1)</sup>.

a) *Die Fehlergrenze.* In der Reihe der eingangs zitierten zusammenfassenden Arbeiten über die atomaren Konstanten wird bei den ersten

<sup>1)</sup> Siehe hierzu auch die Einleitung zu dem Artikel über die atomaren Konstanten von Kirchner (Erg. exakt. Naturwiss. 18, 26, 1939).

vier im allgemeinen der Standpunkt des Experimentators vertreten, der die verschiedenen beobachteten Meßresultate wertet, wie sie mit den als möglich erachteten Fehlergrenzen vom einzelnen messenden Autor angegeben sind. Dabei ist unter der jeweiligen „Fehlergrenze“ folgendes zu verstehen: Der einzelne Autor untersucht vor, während oder nach der Durchführung seiner Experimente kritisch seine Meßanordnungen, um sich ein Urteil darüber bilden zu können, welche Spannen an Unsicherheit er bei seinen Versuchen für den gemessenen Wert jeder einzelnen Meßgröße, die in sein gesamtes Meßresultat eingeht, zugestehen muß. Dabei sind als solche Unsicherheiten z. B. folgende in Betracht zu ziehen: Einmal prinzipielle Unsicherheiten in der Meßmethode bzw. der eindeutigen Zuordnung zwischen dem Meßverfahren und den zur Auswertung benutzten Beziehungen; weiter Ungenauigkeiten in der Ablesung oder Festlegung eines Meßwertes infolge apparativer, nicht vermeidbarer Unzulänglichkeiten; ferner Unsicherheiten, die hineingebracht werden durch den notwendigen Anschluß an Einheits- oder sonstige Normale für die zu messenden Größen; sodann systematische oder zufällige Abweichungen und Streuungen der für ein und dieselbe Größe verschiedene Male gemessenen Werte. Werden zur Angabe eines Gesamtergebnisses noch Hilfsgrößen, Konstanten oder Umrechnungsfaktoren benutzt, so gehen natürlich auch noch deren Unsicherheiten ein, die entweder bestimmt oder aus anderweitigen Messungen bekannt sein müssen.

Es setzen sich also die Fehler im allgemeinen aus konstanten, systematischen und zufälligen Anteilen zusammen. Die endgültig mit dem Zahlenwert des Endresultates angegebene Fehlergrenze enthält dann alle vom Experimentator beachteten und kritisch untersuchten Fehlermöglichkeiten seines gesamten Verfahrens. Sie entsteht im allgemeinen, in  $\%$  oder  $\text{‰}$  des Zahlenwertes für das Endresultat ausgedrückt, als die Summe der einzelnen  $\text{‰}$ - oder  $\text{‰‰}$ -Fehler, die bei der Fehlerdiskussion in Betracht gezogen wurden. Bei der Bildung dieser Summe müssen die einzelnen Fehler in einer Vielfachheit entsprechend den Potenzen, mit denen die zugehörigen Meßgrößen in die Auswertbeziehung für das Endresultat eingehen, berücksichtigt werden.

Die übliche Schreibweise ist dabei folgende: Sei der aus den Messungen folgende Zahlenwert der gemessenen Größe mit  $A$  bezeichnet und seine auf Grund der Fehlerdiskussion zugestandene mögliche Abweichung nach einer Seite mit  $a$ , so wird das Endresultat im allgemeinen in der Form  $A \pm a$  geschrieben, so daß  $2a$  die zugestandene Spanne der Unsicherheit bedeutet.

Mit der Angabe dieser Fehlergrenze  $a$  ist dann aber durchaus nicht gesagt, daß der „wahre“ Wert der gemessenen Größe unter allen Umständen innerhalb jener Spanne  $2a$  liegen muß<sup>1)</sup>. Vielmehr weist der einzelne Experimentator nur darauf hin, daß nach einer von ihm vorgenommenen kritischen Fehlerdiskussion eine mögliche Abweichung des wahren Zahlenwertes einer physikalischen Größe, die er in seinen Experimenten zu erfassen versuchte, von dem von ihm angegebenen um den Betrag der Fehlergrenze  $a$  nach oben oder unten zugestanden werden muß.

Die so gemachten und zu verstehenden Zahlenangaben für den gemessenen Wert einer Größe und dessen Fehlergrenze können dann mit entsprechenden Zahlenwerten anderer Autoren für dieselbe oder irgendeine andere mit dieser in einem Zusammenhang stehenden Größe verglichen werden. Es kann im einzelnen untersucht werden, ob die verschiedenen Zahlenwerte innerhalb ihrer Fehlergrenzen zusammenstimmen oder nicht. Hierbei ergibt sich, wieweit noch auf Grund der jeweils erreichten und vom einzelnen Experimentator selbst verantwortlich untersuchten Meßgenauigkeit Diskrepanzen auftreten. Hieran schließt sich dann die weitere Frage, welche Ursachen für das eventuelle Auftreten solcher Diskrepanzen gesucht und gefunden werden können; dabei werden im allgemeinen zunächst konstante oder systematische Fehlerquellen, die dem Meßverfahren als ganzem anhaften können und vielleicht noch nicht aufgedeckt sind, im Vordergrund der Diskussion stehen.

Sollte sich dann später bei Kontrollversuchen oder anderen Messungen herausstellen, daß seinerzeit von dem Experimentator diese oder jene konstante oder systematische Fehlerquelle nicht erkannt wurde oder damals auch nicht erkannt werden konnte, so ist es durchaus möglich und auch oft der Fall, daß der neue gemessene Wert für die betreffende Größe außerhalb der alten Fehlergrenzen liegt. Hieraus läßt sich dann aber kein Einwand gegen das soeben geschilderte Verfahren für die Abschätzung der Fehlergrenzen oder gar gegen die Benutzung und Bestimmung der Fehlergrenzen überhaupt ableiten. Vielmehr entspricht eine kritische Fehlerdiskussion, die zur Angabe der Fehlergrenze führt, der Selbstkritik des Experimentators an seinen Untersuchungen.

b) *Der wahrscheinliche Fehler und der wahrscheinliche Mittelwert.* Diese an sich selbstverständlichen Gedanken und Prinzipien sind hier nur deshalb

<sup>1)</sup> Wenn gelegentlich eine solche Formulierung, die natürlich zu Mißverständnissen führen kann, gewählt wurde [siehe z. B.: S. v. Friesen, Proc. Roy. Soc. London (A) 160, 424, 1937], so ist auch dort sinngemäß, wie weitere Diskussionen in der Arbeit zeigen, die hier vorgetragene Auffassung gemeint gewesen.

noch einmal wiederholt worden, da offensichtlich eine Reihe von Autoren, im wesentlichen in Amerika, die unter anderem auch das Problem der Atomkonstanten behandelt haben, diese einfachen Überlegungen und Gepflogenheiten mißverstanden oder mißachtet haben.

In den Arbeiten dieser Autoren wird eine ganz andersartige Methode der Fehlerbildung und Zahlenwertbestimmung für gemessene Größen angewandt. In der Erwartung, zu genaueren Zahlenwerten für eine physikalische Größe zu gelangen, als es irgendeine direkte Messung dieser Größe gestatten würde <sup>1)</sup>, bedient man sich der Ausgleichsrechnung und benutzt im allgemeinen die Methoden der kleinsten Quadrate, die auf der Gaußschen Fehlertheorie beruhen. Es wird also z. B. für jede Einzelmessung der „wahrscheinliche Fehler“ festgelegt; dann werden die Einzelmessungen entsprechend ihren wahrscheinlichen Fehlern mit Gewichten versehen. Weiter wird durch eine gewichtete Mittelwertbildung der „wahrscheinliche Mittelwert“ bestimmt und dessen „wahrscheinlicher Fehler“ — d. h. also der „wahrscheinliche Fehler des wahrscheinlichen Mittelwertes“ — berechnet.

Das Gesamtergebnis wird dann wieder ganz analog geschrieben, z. B.  $R \pm r$ , wo mit  $R$  der wahrscheinliche Mittelwert und mit  $r$  sein wahrscheinlicher Fehler bezeichnet ist.

c) *Wahrscheinlicher Fehler gegenüber Fehlergrenze.* Für die Überlegenheit der Fehlerabschätzung auf Grund der Bildung von „wahrscheinlichen Fehlern“ mit der Methode der kleinsten Quadrate gegenüber der Bestimmung von „Fehlergrenzen“ werden unter anderen folgende Argumente angeführt <sup>2)</sup>.

Einmal bestehe zwischen beiden Verfahren nur ein „quantitativer“ Unterschied; dafür ermögliche die Einführung der wahrscheinlichen Fehler in einfacher Weise die Verwendung der Methoden der Ausgleichsrechnung. Zum anderen führe dieses rechnerische Verfahren zu einem „objektiven“ Fehlerkriterium. Und schließlich gelange man durch solch eine mathematische Behandlung zu genaueren Zahlenangaben, den sogenannten „besten Werten“ für eine physikalische Größe — in diesem Falle der Atomkonstanten —, als es die Experimente direkt gestatteten.

Zur weiteren Klärung der für die Vorzüge der Zahlenwert- und Fehlerbestimmungen mit den Methoden der kleinsten Quadrate angeführten

<sup>1)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, Phys. Rev. **40**, 228, 1932. — <sup>2)</sup> R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. **1**, 1, 1929; Phys. Rev. **52**, 241, 1937.



Gründe und ihrer Beziehungen zu den experimentellen Gegebenheiten muß etwas weiter ausgeholt werden.

Zunächst ist festzustellen, daß bei diesen Rechenverfahren, die auf der Gaußschen Fehlertheorie beruhen und somit von Haus aus zunächst auf die Behandlung zufälliger Fehler beschränkt sind, außer den zufälligen hier *bewußt* die *konstanten und systematischen* Fehler mit eingeschlossen werden. Die Berechtigung dieses Vorgehens soll sich später dann daraus ergeben, ob der Quotient aus dem „äußeren“ und „inneren“ wahrscheinlichen Fehler<sup>1)</sup> innerhalb gewisser, aus der Anzahl der benutzten Einzelmessungen sich ergebender Grenzen — im wesentlichen innerhalb der Grenzen der zu erwartenden *statistischen* Schwankungen — den Zahlenwert 1 hat oder nicht.

Dieses Quotientenkriterium kann günstigenfalls Auskunft lediglich darüber geben, ob die Gesamtfehler — zusammengesetzt aus zufälligen, konstanten und systematischen — eine Gaußsche Fehlerverteilungskurve befolgen, sagt dagegen wenig oder gar nichts darüber aus, wie im einzelnen gegebenenfalls eine solche Verteilung zustande gekommen ist. So kann bei Anwendung der Ausgleichsrechnung auf verschiedene Meßgruppen — z. B. nach verschiedenen Methoden bestimmte Werte für eine gesuchte Größe („Punkte“ bei Birge) — eine Gaußsche Fehlerverteilung für die Fehler und Residuen der einzelnen Gruppen resultieren, die zur Erfüllung des Quotientenkriteriums führt. Hieraus darf dann aber nicht ohne weiteres auf die Abwesenheit störender konstanter oder systematischer Fehler geschlossen und dem Endresultat ein besonders hoher Grad von Sicherheit zugeordnet werden, da die einzelnen Meßgruppen mit den gleichen oder ähnlichen konstanten oder systematischen Fehlern behaftet sein können, die dann nach der Ausgleichsrechnung auch nicht mehr in Erscheinung

<sup>1)</sup> Diese und ähnliche Begriffe sind von Birge (Phys. Rev. 40, 207, 1932) erläutert und zusammengestellt worden mit den für die praktische Anwendung der Methoden der kleinsten Quadrate auf diesem Gebiete erforderlichen Formeln. In einer späteren Veröffentlichung haben Deming u. Birge (Rev. Mod. Phys. 6, 119, 1934) ausführlich statistische Fehlerprüfverfahren behandelt. Die von Birge als „innerer“ und „äußerer“ wahrscheinlicher Fehler bezeichneten Fehlerbildungen werden sonst im allgemeinen Fehler „vor“ und „nach“ der Ausgleichung bei der Anwendung der Ausgleichsrechnung auf die Verbindung mehrerer Meßgruppen („Punkte“ bei Birge) genannt. Die Bildung des Quotienten zweier Fehlerarten (analog dem Quotienten  $R_e/R_i$  bei Birge) zur Prüfung für das Vorliegen einer Gaußschen Fehlerverteilung ist in ihrem wesentlichen Gedankengang, wenn auch mit etwas anderen mathematischen Mitteln schon von Abbe (Über die Gesetzmäßigkeit in der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen, Fr. Frommann, Jena 1863) angegeben und eingehend diskutiert worden.

treten<sup>1)</sup>. Aus der Tatsache, daß nach einer Ausgleichsrechnung an verschiedenen Meßgruppen das Quotientenkriterium erfüllt ist und scheinbar eine ungestörte Gaußsche Fehlerverteilung vorliegt, kann man also nicht ohne weiteres allgemeine Schlüsse ziehen, die über den Rahmen der Gaußschen Fehlertheorie hinausgehen und eventuell grundsätzliche Zusammenhänge zwischen Experiment und Theorie berühren.

Führt das Quotientenkriterium zu einem innerhalb der jeweils zu erwartenden statistischen Schwankungen mit der Zahl 1 verträglichen Wert, so wird dem Zahlenwert der gemessenen Größe von den einzelnen Autoren der „innere“ oder „äußere“ wahrscheinliche Fehler als Fehlerangabe zugeordnet. Durch diese Angabe wird den beiden Möglichkeiten, daß der „wahre“ Wert der gesuchten Größe innerhalb oder außerhalb der Spanne  $2r$  um den angegebenen Zahlenwert  $R$  liegt, gleiche Wahrscheinlichkeit zuerkannt.

d) Der „quantitative“ Unterschied zwischen wahrscheinlichem Fehler und Fehlergrenze. Birge<sup>2)</sup> schreibt hierzu, daß man bei Angabe von Fehlergrenzen auch nicht „sicher sein könne, daß der Wert einer physikalischen Konstanten innerhalb bestimmter Grenzen — nämlich  $2a$  — liege“, daß man vielmehr auch bei Angabe der Fehlergrenze eine Chance von vielleicht 1 : 100 oder auch 1 : 1000 habe, daß der wahre Wert aus der Fehlergrenze herausfalle. Folglich solle man gleich den wahrscheinlichen Fehler benutzen, der der Chance 1 : 1 dafür entspräche, daß der Wert der betreffenden Größe innerhalb oder außerhalb der durch den wahrscheinlichen Fehler angegebenen Spanne  $2r$  liege. Birge stellt also den Unterschied zwischen wahrscheinlichem Fehler und Fehlergrenze als einen rein zahlenmäßig quantitativen hin — genau wie den zwischen den Zahlen 0,5 und  $10^{-2}$  bzw.  $10^{-3}$  für eine mathematische Wahrscheinlichkeit.

Hier scheint aber nach dem oben Gesagten ein Mißverständnis vorzuliegen. Denn mit der Angabe von Fehlergrenzen ist zunächst lediglich ein kritisches Urteil über die experimentellen Möglichkeiten der verwandten Untersuchungsmethode gesprochen worden; dagegen enthält die Fehlergrenze keine zahlenmäßige Aussage über irgendeine mathematische Wahr-

<sup>1)</sup> Ein Beispiel hierfür sind die verschiedenen  $h/e$ -Bestimmungen. Erst die neueren Untersuchungen haben hier systematische Fehlerquellen aufgedeckt, mit denen offenbar die früheren, miteinander sehr gut zusammenstimmenden Ergebnisse behaftet waren; heute ist dementsprechend an Stelle des früher als „äußerst wahrscheinlich“ erachteten „tiefen“ ein „hoher“  $h/e$ -Wert als experimentelles Ergebnis anzusehen. Siehe hierzu im einzelnen bei U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943. — <sup>2)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, Phys. Rev. 52, 241. 1937.



scheinlichkeit, mit der der gemessene Zahlenwert mit dem „wahren“ Wert der gesuchten Größe übereinstimmt.

Es besteht demnach ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Auffassungen. Die Fehlergrenze gibt Auskunft über eine Abschätzung von möglichen Unsicherheiten im gesamten Meßverfahren, die vom Experimentator selbst vorgenommen wurde, soweit ihm die verschiedenen Fehlerquellen bekannt und zugänglich waren. Mit Angabe des wahrscheinlichen Fehlers und seiner weiteren Verwendung bei Ausgleichsrechnungen wird die mathematische Aussage gemacht, daß der „wahre“ Wert einer gemessenen Größe mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit — nämlich 0,5 — innerhalb bestimmter Grenzen — nämlich  $2r$  — um einen angegebenen Zahlenwert  $R$  liege.

Aus dieser Feststellung ergeben sich gewisse Schwierigkeiten für den praktischen Vergleich der Meßergebnisse verschiedener Autoren, da in einigen Arbeiten Fehlergrenzen und in anderen wahrscheinliche Fehler benutzt worden sind. Wenn sich die beiden Arten der Fehlerangaben unterschieden wie zwei verschiedene mathematische Wahrscheinlichkeitsangaben — etwa die von Birge genannten Wahrscheinlichkeiten 0,5 und  $10^{-2}$  bis  $10^{-3}$  —, brauchte man den Wert des wahrscheinlichen Fehlers entsprechend der Gaußschen Fehlerfunktion nur mit einem Faktor 3 bis 5 zu multiplizieren, um aus ihm die entsprechende Fehlergrenze zu erhalten. Aus dem oben Gesagten folgt aber, daß die Dinge nicht so einfach liegen; vielmehr muß zur Festlegung der Fehlergrenze zu einem angegebenen wahrscheinlichen Fehler eine eingehende Fehlerdiskussion vorliegen, aus der hervorgeht, von welchen Genauigkeitsabschätzungen für die einzelnen gemessenen Größen die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers für das Endergebnis ihren Ausgang genommen hat. Dieses ist aber leider nicht in allen Veröffentlichungen der Fall, in denen wahrscheinliche Fehler benutzt wurden. Teilweise ist die Fehlerbestimmung auf die zufälligen Fehler beschränkt bzw. gar nicht gesagt worden, ob eine Fehlerangabe als wahrscheinlicher Fehler oder als Fehlergrenze zu verstehen ist. Um nun aber überhaupt zu einer Diskussionsbasis für die atomaren Konstanten zu gelangen, sollen die angegebenen wahrscheinlichen Fehler, falls in den Originalarbeiten die notwendigen Daten nicht mitgeteilt sind, im allgemeinen mit dem Faktor 4 multipliziert und dann mit den sonst benutzten Fehlergrenzen in Beziehung gesetzt werden<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Siehe hierzu auch F. Kirchner, Erg. exakt. Naturwiss. 18, 28, 50, 1939. Falls statt des wahrscheinlichen Fehlers ein mittlerer Fehler (etwa das 1,48fache

e) *Wahrscheinlicher Fehler als „objektives“ Fehlerkriterium.* Es soll nun auf die Bemerkung <sup>1)</sup> eingegangen werden, daß die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate mit der Berechnung von wahrscheinlichen Fehlern ein „objektives“ Fehlerkriterium liefere. Dabei ist zwar das Wort „objektiv“ nicht besonders definiert worden; jedenfalls muß es aber innerhalb des ganzen Zusammenhanges den Eindruck erwecken, als ob andere Methoden der Fehlerbestimmung — wie z. B. die Angabe von Fehlergrenzen — zu unzuverlässigen, „subjektiven“ Genauigkeitsangaben führten, während der wahrscheinliche Fehler eine eindeutig verlässliche, vom Experimentator unabhängige, „objektive“ Aussage sei.

Eine solche Feststellung entspräche allerdings nicht den Tatsachen. *Objektiv* ist der wahrscheinliche Fehler, der für das Endresultat einer experimentellen Untersuchung angegeben wird, auch nur soweit, wie zu seiner zahlenmäßigen Festlegung die *mathematischen* Rechenoperationen der Methode der kleinsten Quadrate angewandt wurden.

Dagegen sind die Ausgangswerte für dieses Rechenverfahren, nämlich die wahrscheinlichen Fehler der Einzelmessungen, genau so viel oder wenig objektiv wie die auf die erste, oben skizzierte Art bestimmten Fehlergrenzen. In den wahrscheinlichen Fehler für einen einzelnen Meßwert gehen außer der zufälligen Streuung alle bei der betreffenden Messung auftretenden *systematischen* oder *konstanten* Unsicherheiten genau so ein, wie sie schon bei der Besprechung der Fehlergrenzen behandelt wurden. Und dabei müssen diese einzelnen Unsicherheiten genau so vom einzelnen Experimentator selbst bestimmt oder abgeschätzt werden, wie es bei einer Fehlerdiskussion zur Angabe der Fehlergrenze erforderlich ist.

Es zeigt sich also, daß auch die Angabe eines wahrscheinlichen Fehlers für das Endresultat einer experimentellen Untersuchung von der kritischen Prüfung der Meßmethodik durch den einzelnen Experimentator abhängig ist, da das rein formale „objektive“ Rechenverfahren von dem in diesem Zusammenhang als „subjektiv“ zu bezeichnenden wahrscheinlichen Fehler der Einzelmessung seinen Ausgang nimmt. Lediglich bei Messungen, die nur zufällige Streuungen zeigen — und für solche war ja auch ursprünglich die Gaußsche Fehlertheorie aufgestellt worden — bzw. bei denen der Autor seine Fehlerdiskussion ausdrücklich auf die statistischen Schwankungen beschränkt, kann die Angabe eines wahrscheinlichen Fehlers ihres in dem

---

des wahrscheinlichen Fehlers!) angegeben worden ist, wird an Stelle des Faktors 4 der Faktor 2,5 zur Abschätzung der entsprechenden Fehlergrenze benutzt werden.

<sup>1)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, *Rev. Mod. Phys.* 1, 4, 1929.

gerade umrissenen Sinne subjektiven Charakters entkleidet werden. Derartige Einschränkungen in der Fehlerdiskussion werden aber den experimentellen Tatsachen nicht gerecht.

f) „Beste Werte“ und allgemeine Schlußfolgerungen auf Grund einer Fehlerrechnung nach der Gaußschen Fehlertheorie. Man mag aus rein mathematischen oder ästhetischen Gründen ein Verfahren der Mittelwerts- und Fehlerbestimmung mit den Methoden der kleinsten Quadrate und der Ausgleichsrechnung bevorzugen; zu einer genaueren Aussage als durch das Experiment selbst, d. h. zu den sogenannten „besten“ Werten für eine Naturkonstante kommt man wohl nach dem bisher Gesagten nicht. Schließlich können die Zahlenwerte für eine experimentell bestimmte Größe und ihre gleichfalls durch die Versuchsanordnung bedingten Genauigkeitsgrenzen nicht durch rein mathematische Rechenoperationen verändert oder gar verbessert werden. Diese Feststellung scheint immer wieder erforderlich zu sein, da der gegenteilige Standpunkt schon zu ergebnislosen Debatten geführt hat und gegenüber der vorsichtigeren Auffassung des Experimentators mit den verschiedensten, bereits besprochenen Argumenten vertreten wird <sup>1)</sup>.

Der Hinweis auf diese Sachlage ist aber aus folgendem Grunde besonders notwendig. Gerade auf dem Gebiet der Atomkonstanten hat die Behandlung von auftretenden Problemen mit mathematischen Methoden der Ausgleichsrechnung teilweise große Blüten getrieben. Es wurden unter Berechnung der wahrscheinlichen Fehler und entsprechenden Mittelwertbildungen die verschiedenen Meßergebnisse mit Lösungsverfahren nach den Methoden der kleinsten Quadrate auf „beste Werte“ und hohe Genauigkeit gezüchtet. Man hat dann diese Werte in wechselseitige Beziehung gesetzt unter Einbeziehung der zwischen den Atomkonstanten bestehenden, bzw. der den einzelnen Meßverfahren zugrunde liegenden allgemeinen Gesetzmäßigkeiten — wie z. B. Rydberg-Formel, lichtelektrische Gleichung, Gitterbeugungsformel, Braggsches Reflexionsgesetz usw. Stellten sich hierbei Unstimmigkeiten zwischen den verschiedenen, vorher mathematisch behandelten Zahlenwerten für die Atomkonstanten außerhalb der gleichfalls rechnerisch festgelegten wahrscheinlichen Fehler heraus, so glaubte man sich berechtigt, unter Zurückstellung der experimentell bedingten Gegebenheiten allgemeine Schlüsse auf die Gültigkeitsbereiche der genannten Gesetzmäßigkeiten bzw. ihre Ungültigkeit ziehen zu dürfen. Für ein solches Vorgehen ist nach dem

<sup>1)</sup> Siehe hierzu z. B. die Diskussion zwischen R. T. Birge (Phys. Rev. 52, 241, 886, 1937) und S. v. Friesen (Proc. Roy. Soc. London (A) 160, 424, 1937 und Phys. Rev. 52, 886, 1937).

bisher Gesagten äußerste Vorsicht geboten, wenn man nicht Gefahr laufen will, zu voreiligen oder gar falschen Schlüssen zu kommen, nachdem man das Experiment einem formal-mathematischen Zwang unterworfen hat.

g) *Anwendungen auf das Problem der Atomkonstanten.* Die Literatur über die Atomkonstanten enthält eine große Zahl solcher Beispiele, von denen hier nur einige zur Illustration des vorigen Abschnitts erwähnt werden sollen.

Es handelt sich bei den mathematischen Diskussionsverfahren darum, mit graphischen, rechnerischen oder kombinierten Methoden experimentell bestimmte Kombinationen  $e^{\alpha} h^{\beta} m_0^{\gamma}$  der drei Größen  $e$ ,  $h$  und  $m_0$  unter Heranziehung der zwischen ihnen bestehenden Relationen so auszuwerten, daß ein Vergleich der nach verschiedenen experimentellen Methoden gefundenen Zahlenwerte für die einzelnen Größen möglich werden soll. Dabei sind aber, wie nochmals betont sei, die ursprünglichen Meßergebnisse inzwischen einem rein mathematischen Rechenverfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate über wahrscheinliche Fehler unterworfen worden.

Zunächst hat Bond<sup>1)</sup> ein solches Lösungsverfahren aufgestellt. Dieses wurde von Birge<sup>2)</sup> weiter entwickelt, verbessert und weitgehendst angewandt. Mit Benutzung der Rydberg-Formel werden die drei in den vorliegenden Gleichungssystemen enthaltenen Unbekannten  $e$ ,  $h$  und  $m_0$  auf zwei, nämlich  $e$  und  $h$ , zurückgeführt und durch Einführung neuer Parameter die Gleichungen zwischen den Unbekannten linearisiert. Es werden so Lösungen gewonnen, die sich graphisch darstellen lassen (sogenannte Birge-Bond-Diagramme). Dabei ergab sich, daß die aus den verschiedenen experimentell bestimmten Kombinationen  $e^{\alpha} h^{\beta} m_0^{\gamma}$  folgenden Werte für die drei Atomkonstanten nicht in Übereinstimmung mit der Rydberg-Formel waren. Bond<sup>3)</sup> machte auf Grund einer Theorie von Eddington<sup>4)</sup> die Annahme, daß der experimentell bestimmte Wert für  $e/m_0$  der 136/137. Teil der „wahren“ spezifischen Ladung des Elektrons sei. Mit diesem Vorschlag, durch den Bond die zwischen den experimentell gemessenen Werten bestehenden Unstimmigkeiten beseitigen zu können glaubte, hat sich dann auch Birge<sup>5)</sup> beschäftigt. Weiter stellte aber Birge<sup>6)</sup> auch die Hypothese zur Diskussion, daß die Rydberg-Formel selbst nicht genau stimme und mit einem Faktor von der Größenordnung 136/137 zu multiplizieren sei.

<sup>1)</sup> W. N. Bond, Phil. Mag. (VII) 10, 994, 1930; 12, 632, 1931; 22, 624, 1936; Proc. Phys. Soc. 49, 202, 1937. — <sup>2)</sup> R. T. Birge, Phys. Rev. 40, 228, 318, 1932. — <sup>3)</sup> W. N. Bond, Nature 133, 327, 1934; 135, 825, 1935. — <sup>4)</sup> A. Eddington, siehe z. B. Proc. Roy. Soc. London (A) 143, 327, 1933; Nature 133, 907, 1934. — <sup>5)</sup> R. T. Birge, Nature 133, 648, 1934; Phys. Rev. 49, 204, 1936. — <sup>6)</sup> R. T. Birge, Nature 137, 187, 1936; Phys. Rev. 49, 204, 1936.



Vorher hatte Birge<sup>1)</sup> schon darauf hingewiesen, daß zwischen den aus der Millikanschen Öltröpfchenmethode und dem aus der Absolutmessung von Röntgenwellenlängen folgenden  $e$ -Wert das Verhältnis 136/137 bestünde und auch diesen Gesichtspunkt zur Behebung der Unstimmigkeiten zwischen den Zahlenwerten der Atomkonstanten herausgestellt. Bond<sup>2)</sup> hat diesen Vorschlag aufgegriffen und gleichfalls auf Grund der Eddingtonschen Theorie die Hypothese aufgestellt, durch den aus der Ausmessung der Kristallgitter mit Röntgenstrahlen sich ergebenden  $e$ -Wert werde  $(137/136) \cdot e$  gemessen.

Man glaubte aber nicht nur, zwischen zwei verschiedenen  $e$ -Werten unterscheiden zu können, sondern behauptete auch die Existenz von zwei verschiedenen  $e/m_0$ -Werten, nämlich den „Ablenkungswert“ für freie und den „spektroskopischen Wert“ für im Atom gebundene Elektronen<sup>3)</sup>.

Shiba<sup>4)</sup> hat andere Lösungen mit der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Er benutzte gleichfalls die Rydberg-Formel bei seinem Rechenverfahren, führte aber das Problem auf die beiden Unbekannten  $e$  und  $e/m_0$  zurück. Dabei ging er von der Hypothese aus, daß die  $h/e$ -Bestimmungen keine zuverlässigen Zahlenwerte für diese Größe geliefert hätten; diese Hypothese, die allerdings seinerzeit wenig begründet erscheinen mußte, hat erst durch die neuesten Präzisionsmessungen für  $h/e$  nachträglich eine gewisse Berechtigung erfahren.

Weiter hat Beth<sup>5)</sup> eine mathematische Analyse nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt, für die Atomkonstanten durchgeführt und Nomogramme zur Darstellung der Ergebnisse vorgeschlagen. Ferner liegt eine sehr ausführliche Veröffentlichung von Dunnington<sup>6)</sup> vor; in dieser wird das Problem der Atomkonstanten sowohl mit Birge-Bond-Diagrammen behandelt, wie auch mit einem anderen Verfahren der Ausgleichsrechnung, das gleichfalls die Methode der kleinsten Quadrate benutzt. Dabei schließt Dunnington aus den Ergebnissen seiner Birge-Bond-Diagramme, daß entweder die Rydberg-Formel nicht stimmt, oder die lichtelektrische Gleichung falsch ist bzw. nicht auf den inversen Photoeffekt — d. h. die  $h/e$ -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums, aus Ionisations- und Anregungspotentialen — an-

<sup>1)</sup> R. T. Birge, Nature 133, 648, 1934. — <sup>2)</sup> W. N. Bond, ebenda 135, 825, 1935. — <sup>3)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, Rev. Mod. Phys. 1, 1, 1929; Phys. Rev. 40, 228, 1932; 54, 972, 1938; J. A. Bearden, Phys. Rev. 55, 584, 1939. — <sup>4)</sup> H. Shiba, Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. Tokyo 19, 97, 1932; 21, 128, 1933; 34, 1308, 1938. — <sup>5)</sup> A. Beth, Phys. Rev. 54, 865, 1938; 56, 208, 1939. — <sup>6)</sup> F. G. Dunnington, Rev. Mod. Phys. 11, 65, 1939.

gewandt werden dürfe. Unter jeweiliger Benutzung einer dieser beiden Hypothesen führt Dunnington dann zwei Analysen mit der Methode der kleinsten Quadrate durch. Auf Grund dieser rechnerischen Exkurse glaubt er zwischen den beiden aus den Birge-Bond-Diagrammen gefolgerten Alternativen eine Entscheidung treffen zu können; er schließt, daß der inverse Photoeffekt für die Diskrepanzen zwischen den Zahlenwerten der atomaren Konstanten verantwortlich sei.

Bei all diesen Arbeiten ist offensichtlich der Schwerpunkt viel zu sehr auf das rein mathematisch-formale Rechenverfahren gelegt worden. Es geschah dies in dem Glauben an die Möglichkeit, aus einer mathematischen und als „objektiv“ angesehenen Behandlung des Problems weitgehendere Aufschlüsse über die Zusammenhänge zu gewinnen als durch experimentelle Untersuchungen. Diese Vorstellung hat wohl die Überzeugung aufkommen lassen, man könne unter Zugrundelegung der wahrscheinlichen Fehler mit rein mathematischen Methoden über die experimentellen Ergebnisse hinausgehende „beste“ Werte für die Atomkonstanten berechnen und über die Richtigkeit grundlegender Gesetzmäßigkeiten entscheiden. Die experimentelle Seite des Problems wurde fast vollkommen in den Hintergrund geschoben. Man glaubte sich auf Grund der *berechneten*, zahlenmäßig so kleinen wahrscheinlichen Fehler für die Endresultate seiner Sache sicher und wies<sup>1)</sup> zunächst die Möglichkeit als unwahrscheinlich zurück, daß eine übersehene konstante oder systematische Fehlerquelle im Experiment — die allerdings die angestellten mühsamen Berechnungen umwerfen müßte — die Gesamtsituation wesentlich verschieben könne.

Auch Du Mond<sup>2)</sup> hatte einmal kurz den Vorschlag gemacht, die Rydberg-Formel durch Hinzufügen eines Faktors  $(1 - 1/137)$  abzuändern, um die notwendige Übereinstimmung zwischen den Zahlenwerten der Atomkonstanten zu erreichen.

In einer späteren Veröffentlichung<sup>3)</sup> hat sich dann Du Mond auf einen mehr experimentell ausgerichteten Standpunkt gestellt; in einem sehr übersichtlichen Darstellungsverfahren hat er alle seinerzeit bekannten einzelnen Präzisionsmessungen an atomaren Konstanten zusammengestellt und diskutiert. Er kommt dabei zu dem Schluß, daß die damals bestehenden Unstimmigkeiten zwischen den Zahlenwerten der Atomkonstanten auf

---

<sup>1)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, *Nature* **137**, 187, 1936; F. G. Dunnington, *Rev. Mod. Phys.* **11**, 76, 1939. — <sup>2)</sup> J. W. M. Du Mond, *Phys. Rev.* **52**, 1251, 1937. — <sup>3)</sup> J. W. M. Du Mond, *Phys. Rev.* **56**, 153, 1939; siehe hierzu noch bei R. T. Birge, ebenda **57**, 250, 1940.



irgendwelchen systematischen Fehlerquellen in den  $h/e$ -Bestimmungen oder deren Auswertung beruhen müßten und nicht durch schlecht begründete Änderungsvorschläge für grundsätzliche Gesetzmäßigkeiten, wie z. B. die Rydberg-Formel, zu beseitigen seien. Allerdings glaubt er, in einer Fußnote diese Schlußfolgerungen mit Rücksicht auf eine Arbeit von Wensel<sup>1)</sup> über die Strahlungskonstanten wieder einschränken zu müssen. Du Mond weist ausdrücklich auf die Unzulänglichkeit unbegründeter Schlüsse aus einer übertrieben angewandten Rechenmethodik hin.

Weiter soll in diesem Zusammenhang noch eine Arbeit von Darwin<sup>2)</sup> erwähnt werden. Darwin zeigt in dieser Veröffentlichung, daß die von Du Mond durchgeführte Methode des Atomkonstantenvergleichs sich wesentlich vereinfachen läßt, wenn man bei den formelmäßigen Ansätzen von den logarithmierten Beziehungen für die einzelnen gemessenen Größen  $e^{\alpha} h^{\beta} m_0^{\gamma}$  ausgeht. Nach den ihm vorliegenden experimentellen Ergebnissen schließt Darwin aus seinen graphischen Darstellungen, daß in den  $h/e$ -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums noch ein unbekannter systematischer Fehler verborgen sein müsse.

Auf Grund der heute vorliegenden Meßergebnisse über die Zahlenwerte der Atomkonstanten kann festgestellt werden<sup>3)</sup>, daß weder zwischen zwei verschiedenen  $e$ -Werten noch zwischen zwei verschiedenen  $e/m_0$ -Werten unterschieden werden kann oder muß; weiter wurden nach der Auffindung einer systematischen Fehlerquelle in den als äußerst zuverlässig angesehenen und dementsprechend mit sehr kleinem „wahrscheinlichen Fehler“ belegten  $h/e$ -Bestimmungen aus der kurzwelligen Grenze des Röntgenkontinuums neue  $h/e$ -Werte gemessen, die weit außerhalb jenes „wahrscheinlichen Fehlers“ höher liegen. Hierdurch ist eine befriedigende Übereinstimmung zwischen den Zahlenwerten der Atomkonstanten erreicht worden, ohne daß eine Abänderung der grundlegenden Gesetzmäßigkeiten — wie Rydberg-Formel, lichtelektrische Gleichung usw. — erforderlich würde.

So hat eine langjährige und bewußte<sup>4)</sup> Anwendung rein mathematischer Rechenverfahren, die auf der Gaußschen Fehlertheorie beruhen, auf experimentelle Meßergebnisse zu vielen Mißverständnissen und Fehlschlüssen geführt. Es ergibt sich also, daß man mit der Übertragung formaler Rechenoperationen auf experimentelle Werte, zumindestens aber mit irgendwelchen allgemeinen Folgerungen, die man auf Grund rein

---

<sup>1)</sup> H. T. Wensel, Bur. of Stand. Journ. of Res. **22**, 375, 1939. — <sup>2)</sup> C. G. Darwin, Proc. Phys. Soc. **52**, 202, 1940. — <sup>3)</sup> U. Stille, ZS. f. Phys. **121**, H. 3/4, 1943. — <sup>4)</sup> Siehe z. B.: R. T. Birge, Phys. Rev. **52**, 241, 1937.

rechnerischer Ergebnisse ziehen will, sehr vorsichtig sein muß<sup>1)</sup>. Dementsprechend sollen auch in der folgenden Diskussion<sup>2)</sup> der Atomkonstanten die experimentell bestimmten Zahlenwerte und die durch die benutzte Versuchsanordnung bestimmten Fehlergrenzen zugrunde gelegt werden.

### 5. Zusammenfassung.

Für eine erneute Diskussion der Zahlenwerte für die Atomkonstanten ergeben sich folgende Gesichtspunkte, unter denen in einer weiteren Veröffentlichung die zahlenmäßige Durchführung dieses Themas vorgenommen wird:

1. Neue experimentelle Ergebnisse haben den früheren Stand der Unstimmigkeiten grundlegend verändert.

2. Die von den einzelnen Autoren in ihren Veröffentlichungen zahlenmäßig angegebenen Endresultate müssen zunächst auf die Größen zurückgeführt bzw. zurückgerechnet werden, die wirklich bei den verschiedenen experimentellen Untersuchungen gemessen wurden, um einen einwandfreien Vergleich der verschiedenen Meßergebnisse zu ermöglichen.

3. Da alle elektrischen Messungen auf internationale elektrische Einheiten bezogen sind, sollen auch die sich experimentell ergebenden Zahlenwerte für die Atomkonstanten in internationalen elektrischen Einheiten angegeben werden, soweit in ihnen elektrische Größen enthalten sind.

4. Eine eingehende Behandlung der beiden in der Literatur benutzten Arten der Fehlerangaben — nämlich der Fehlergrenzen und der wahrscheinlichen Fehler — läßt vor allem mit Rücksicht auf die experimentellen Gegebenheiten und die durch Anwendung von mit den wahrscheinlichen Fehlern verknüpften, formal-mathematischen Rechenoperationen entstandenen Fehlschlüsse allgemeiner Art die Benutzung der Fehlergrenze als das Gegebene für die experimentell bestimmten Atomkonstanten erscheinen.

Braunschweig, Physikal. Inst. der Techn. Hochschule, im August 1942.

---

<sup>1)</sup> Ein anderes Beispiel für nicht gerechtfertigte Schlußfolgerungen aus der Anwendung von Ausgleichsrechnung auf experimentell bestimmte Zahlenwerte ist an anderer Stelle (U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 1/2, 1943) im Zusammenhang mit den elektrischen Umrechnungsfaktoren und dem Begriff des int. Volt ( $v$ ) behandelt worden. — <sup>2)</sup> U. Stille, ZS. f. Phys. 121, H. 3/4, 1943.

## Zur Dioptrik elektronenoptischer Geräte mit beliebig gekrümmten Abbildungsachsen.

Von Georg Wendt.

Mit 3 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1942.)

Es wird eine Dioptrik elektronenoptischer Geräte mit gekrümmter „optischer Achse“ aufgestellt. Als „optische Achse“ dient die die Mitte der Gegenstandsebene mit der Mitte der Bildebene verbindende Elektronenbahn. Diese Bahn gilt gleichzeitig als  $w$ -Achse eines krummlinigen Koordinatensystems. Die abbildenden Felder werden in Potenzreihen um diese Achse entwickelt. Die Abbildungsgleichungen einer bestimmten Klasse solcher Felder sind mit denjenigen rotationssymmetrischer Linsen identisch. Die Brennweiten und Hauptebenen werden näherungsweise ermittelt. Zum Schluß wird die Form punktweise abbildender rein elektrischer und rein magnetischer Felder mit krummen Achsen diskutiert.

### 1. Einleitung und Ziel der Arbeit.

Es gibt bereits einige elektronenoptische Geräte, bei welchen die *optische Achse* nicht gerade, wie z. B. bei einer Folge zentrierter rotationssymmetrischer Linsen, sondern *gekrümmt* ist. Erinnert sei etwa an die Anordnung von Coeterier und Teves<sup>1)</sup>, bei welcher die Gegenstands- und Bildebene senkrecht aufeinander stehen, oder an die Massenspektrographen. Außer den letzteren, die ja keine stigmatische und geometrisch ähnliche Abbildung erfordern, haben elektronenoptische Geräte mit gekrümmten Achsen kaum größere praktische Bedeutung erlangt. Dies dürfte wohl hauptsächlich auf eine vorläufig noch mangelhafte Beherrschung ihrer Abbildungsgesetzmäßigkeiten zurückzuführen sein. Es wird somit eine Theorie benötigt, welche die *Form* der für das Zustandekommen einer einwandfreien Abbildung notwendigen *Abbildungsorgane* einfach zu ermitteln gestattet, die *dioptrischen Gesetze* einer solchen Abbildung behandelt, die *Kardinalgrößen* berechnet und Auskunft über die auftretenden *Bildfehler* gibt. Die Aufstellung einer solchen Theorie ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Die Berechnung der Bildfehler allerdings soll einer späteren Arbeit vorbehalten bleiben.

### 2. Die Wahl des krummlinigen Koordinatensystems.

Bei einer Folge zentrierter rotationssymmetrischer Linsen gilt als „optische Achse“ die Symmetrieachse der abbildenden Felder. Sie ver-

<sup>1)</sup> F. Coeterier u. M. C. Teves, *Physica* 4, 33, 1937.

bindet geradlinig Gegenstandsmitte mit Bildmitte und stellt gleichzeitig eine Elektronenbahn dar. In einem sonst beliebig gestalteten, jedoch Abbildungseigenschaften aufweisenden elektromagnetischen Feld wird die entsprechende Linie eine irgendwie gekrümmte Raumkurve sein. Diese Raumkurve soll jetzt „optische Achse“ heißen. Wir lassen sie, wieder in Analogie zu den rotationssymmetrischen Linsen, mit der  $w$ -Achse eines krummlinigen Koordinatensystems  $u, v, w$  zusammenfallen. Die beiden anderen Achsen werden als geradlinig angenommen; die  $u$ -Achse soll die Richtung der Normalen, die  $v$ -Achse die Richtung der Binormalen der „optischen Achse“ erhalten.

Für die Aufstellung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten in diesem Koordinatensystem sind die Werte der Linienelemente

$$\left. \begin{aligned} dl_u &= U du; \\ dl_v &= V dv; \quad dl_w = W dw \end{aligned} \right\} \quad (1) \quad \text{Fig. 1. Das krummlinige Koordinatensystem.}$$

in Richtung der Koordinatenachsen und die Werte der sich daraus ergebenden Funktionen  $U(u, v, w)$ ,  $V(u, v, w)$  und  $W(u, v, w)$  wichtig. Für die geradlinigen Koordinaten können wir setzen:

$$\left. \begin{aligned} dl_u &= du; \quad U = 1, \\ dl_v &= dv; \quad V = 1. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für die krummlinige Koordinate  $w$  entnehmen wir der Fig. 1:

$$dl_w = \sqrt{(\rho + u)^2 d\alpha^2 + (u^2 + v^2) d\beta^2}, \quad (3)$$

wobei  $\rho$  der Krümmungsradius der Bahn ist,  $d\alpha$  den Winkel bedeutet, um welchen der Krümmungsradius geschwenkt werden muß, wenn  $w$  sich um  $dw$  ändert, und  $d\beta$  den Winkel, um welchen gleichzeitig die Schmiegeebene sich verdreht.

Nun ist  $\frac{d\alpha}{dw} = \frac{1}{\rho}$  die Krümmung,  $\frac{d\beta}{dw} = -\kappa$  die Windung (Torsion) der Bahn, so daß man statt (3) schreiben kann:

$$dl_w = dw \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\rho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}; \quad W = \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\rho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}. \quad (4)$$

Die Operatoren der Vektorrechnung haben im gewählten Koordinatensystem folgende Bedeutung <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_u \varphi &= \frac{1}{U} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ \text{grad}_v \varphi &= \frac{1}{V} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \\ \text{grad}_w \varphi &= \frac{1}{W} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial \varphi / \partial w}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathfrak{A} &= \frac{1}{UVW} \left\{ \frac{\partial (A_u VW)}{\partial u} + \frac{\partial (A_v UW)}{\partial v} + \frac{\partial (A_w UV)}{\partial w} \right\} \\ &= \frac{\frac{\partial}{\partial u} \left[ A_u \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[ A_v \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] + \frac{\partial A_w}{\partial w}}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \text{div grad } \varphi = \frac{1}{UVW} \left\{ \frac{\partial \left( \frac{VW}{U} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)}{\partial u} + \frac{\partial \left( \frac{WU}{V} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)}{\partial v} + \frac{\partial \left( \frac{UV}{W} \frac{\partial \varphi}{\partial w} \right)}{\partial w} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial u} \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] + \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial v} \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] + \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial w} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial w} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}_u \mathfrak{A} &= \frac{1}{VW} \left\{ \frac{\partial (A_w W)}{\partial v} - \frac{\partial (A_v W)}{\partial w} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left[ A_w \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] - \frac{\partial A_v}{\partial w} \right\}, \\ \text{rot}_v \mathfrak{A} &= \frac{1}{WU} \left\{ \frac{\partial (A_u U)}{\partial w} - \frac{\partial (A_w U)}{\partial u} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{\partial A_u}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial u} \left[ A_w \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right] \right\} \\ \text{rot}_w \mathfrak{A} &= \frac{1}{UV} \left\{ \frac{\partial (A_v V)}{\partial u} - \frac{\partial (A_u V)}{\partial v} \right\} = \frac{\partial A_v}{\partial u} - \frac{\partial A_u}{\partial v}. \end{aligned} \quad (8)$$

<sup>1)</sup> Vgl. z. B. G. Joos, Lehrb. d. theoretischen Physik, 3. Aufl., § 13, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1939.

### 3. Entwicklung des elektrischen und magnetischen Feldes in Reihen um die gekrümmte optische Achse.

Von dem elektrischen und magnetischen Feld wollen wir zunächst keinerlei Symmetrieeigenschaften fordern. Die Reihenentwicklungen dieser Felder um die gekrümmte optische Achse weisen dann alle möglichen Glieder in  $u$  und  $v$  auf. So ergibt sich für das elektrische Potential:

$$\varphi = \Phi_{00} + \Phi_{10}u + \Phi_{01}v + \Phi_{20}u^2 + \Phi_{11}uv + \Phi_{02}v^2 + \\ + \Phi_{30}u^3 + \Phi_{21}u^2v + \Phi_{12}uv^2 + \Phi_{03}v^3 + \dots \quad (9)$$

Die Reihen für die Komponenten der magnetischen Feldstärke  $\mathfrak{H}$  sind:

$$\left. \begin{aligned} H_u &= H_{u00} + H_{u10}u + H_{u01}v + H_{u20}u^2 + H_{u11}uv + H_{u02}v^2 + \dots, \\ H_v &= H_{v00} + H_{v10}u + H_{v01}v + H_{v20}u^2 + H_{v11}uv + H_{v02}v^2 + \dots, \\ H_w &= H_{w00} + H_{w10}u + H_{w01}v + H_{w20}u^2 + H_{w11}uv + H_{w02}v^2 + \dots. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Die Reihen (9) und (10) sind soweit angeschrieben, als sie für die Berechnung der Fehler zweiter Ordnung notwendig sind. Die Koeffizienten  $\Phi_{ik}$  bzw.  $H_{xmn}$  sind Funktionen von  $w$ . Sie sind voneinander nicht unabhängig, da z. B. das elektrische Potential  $\varphi$  der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = 0 \quad (11)$$

zu genügen hat. Wir haben also (7) gleich Null zu setzen. Entwickeln wir dabei die Wurzeln nach  $u$  und  $v$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left( 1 + \frac{u}{\varrho} + \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \left( \frac{1}{\varrho} + \kappa^2 u + \dots \right) + \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left( 1 + \frac{u}{\varrho} + \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \left( \kappa^2 v + \dots \right) + \\ + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2} \left( 1 - \frac{u}{\varrho} + \dots \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} \left( \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{d\varrho}{dw} \cdot u + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (11a)$$

Wenden wir diese Bedingung auf (9) an, so erhalten wir folgende Zusammenhänge zwischen den Reihenkoeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} 2\Phi_{20} + \frac{\Phi_{10}}{\varrho} + 2\Phi_{02} + \Phi''_{00} &= 0, \\ 6\Phi_{30} + \frac{4\Phi_{20}}{\varrho} + \Phi_{10}\kappa^2 + 2\Phi_{12} + \frac{2\Phi_{02}}{\varrho} + \\ &+ \Phi''_{10} - \frac{\Phi''_{00}}{\varrho} + \frac{\Phi'_{00}}{\varrho^2} \frac{\partial \varrho}{\partial w} = 0, \\ 2\Phi_{21} + \frac{\Phi_{11}}{\varrho} + 6\Phi_{03} + \Phi_{01}\kappa^2 + \Phi''_{01} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Wir denken an diese Zusammenhänge, wollen aber zwecks Vermeidung unnötiger Schreibarbeit weiter die Reihe (9) benutzen.



Die magnetische Feldstärke  $\mathfrak{H}$  hat, sofern sich der betrachtete Bereich auf das Vakuum beschränkt, folgenden Bedingungen zu genügen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \quad (13)$$

und

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0. \quad (14)$$

Unter Verwendung von (6) und (8) erhalten wir dafür, wenn wir die Wurzel-  
ausdrücke wieder nach  $u$  und  $v$  entwickeln:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_u}{\partial u} \left(1 + \frac{u}{\varrho} + \dots\right) + H_u \left(\frac{1}{\varrho} + \kappa^2 u + \dots\right) + \\ + \frac{\partial H_v}{\partial v} \left(1 + \frac{u}{\varrho} + \dots\right) + H_v (\kappa^2 v + \dots) + \frac{\partial H_w}{\partial w} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_w}{\partial v} \left(1 + \frac{u}{\varrho} + \dots\right) + H_w (\kappa^2 v + \dots) - \frac{\partial H_v}{\partial w} &= 0, \\ \frac{\partial H_u}{\partial w} - \frac{\partial H_w}{\partial u} \left(1 + \frac{u}{\varrho} + \dots\right) - H_w \left(\frac{1}{\varrho} + \kappa^2 u + \dots\right) &= 0, \\ \frac{\partial H_v}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Wenden wir diese Bedingungen auf (10) an, so ergeben sich folgende Beziehungen zwischen den Reihenkoeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} H_{u10} + \frac{H_{u00}}{\varrho} + H_{v01} + H'_{w00} &= 0, \\ H_{w01} - H'_{v00} &= 0, \\ H'_{u00} - H_{w10} - \frac{H_{w00}}{\varrho} &= 0, \\ H_{v10} - H_{u01} &= 0, \\ 2H_{u20} + \frac{2H_{u10}}{\varrho} + H_{u00}\kappa^2 + H_{v11} + \frac{H_{v01}}{\varrho} + H'_{w10} &= 0, \\ H_{w11} + \frac{H_{w01}}{\varrho} - H'_{v10} &= 0, \\ H'_{u10} - 2H_{w20} - \frac{2H_{w10}}{\varrho} - H_{w00}\kappa^2 &= 0, \\ 2H_{v20} - H_{u11} &= 0, \\ H_{u11} + \frac{H_{u01}}{\varrho} + 2H_{v02} + H_{v00}\kappa^2 + H'_{w01} &= 0, \\ 2H_{w02} + H_{w00}\kappa^2 - H'_{v01} &= 0, \\ H'_{u01} - H_{w11} - \frac{H_{w01}}{\varrho} &= 0, \\ H_{v11} - 2H_{u02} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Auch hier wollen wir an diese Zusammenhänge denken, zunächst jedoch wegen der durchsichtigeren Bezeichnung der Koeffizienten die Reihen (10) für die magnetische Feldstärke benutzen.

Das magnetische Vektorpotential  $\mathfrak{A}$  ist durch die Beziehung

$$\mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} \quad (18)$$

definiert. Unter Benutzung von (8) und (10) und teilweiser Beachtung von (17) können für dessen Komponenten die Reihenentwicklungen

$$\left. \begin{aligned} A_u &= 0, \\ A_v &= H_{v00} u + \frac{H_{v10}}{2} u^2 + H_{v01} uv + \frac{H_{v20}}{3} u^3 + \\ &\quad + \frac{H_{v11}}{2} u^2 v + H_{v02} u v^2 + \dots, \\ A_w &= -H_{v00} u + H_{u00} v + \frac{1}{2} \left( \frac{H_{v00}}{\varrho} - H_{v10} \right) u^2 + \\ &\quad + (H_{u10} + H'_{w00}) uv + \frac{H_{u01}}{2} v^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[ \left( \kappa^2 - \frac{3}{2\varrho^2} \right) H_{v00} + \frac{H_{v10}}{2\varrho} + H_{v20} \right] u^3 + \\ &\quad + \left( H_{u20} + \frac{H'_{w10}}{2} - \frac{H'_{w00}}{\varrho} \right) u^2 v + \\ &\quad + \frac{1}{2} (H_{u11} + H_{v00} \kappa^2 + H'_{w01}) u v^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3} (H_{u02} - H_{u00} \kappa^2) v^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

angeschrieben werden.

#### 4. Das Fermatsche Prinzip und die Bewegungsgleichungen.

Jede Bewegung eines Elektrons in einem elektromagnetischen Feld gehorcht dem Fermatschen Prinzip der Elektronenoptik <sup>1)</sup>

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \mu ds = 0. \quad (20)$$

<sup>1)</sup> W. Glaser, ZS. f. Phys. 80, 451, 1933; 96, 177, 1935.

Darin sind  $P_1$  und  $P_2$  Anfangs- und Endpunkt der Bahn<sup>1)</sup>,  $ds$  ein Bahnelement und  $\mu$  der elektronenoptische Brechungsindex:

$$\mu = \sqrt{\varphi} - \eta (\mathfrak{A} s); \quad \eta = \sqrt{\frac{e}{2m}}. \quad (21)$$

Das Potential  $\varphi$  ist gegen die Kathode des elektronenoptischen Gerätes zu zählen;  $e/m$  ist die spezifische Elektronenladung,  $s$  der Einheitsvektor in Bahnrichtung,  $\mathfrak{A}$  das durch die Beziehung (18) definierte magnetische Vektorpotential. Bequemer ist es, in (18) statt der Bogenlänge  $s$  längs der Bahn die Koordinate  $w$  zu benutzen. Da nach (2) und (4)

$$ds = \sqrt{dl_u^2 + dl_v^2 + dl_w^2} = dw \sqrt{u'^2 + v'^2 + \left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2}$$

ist, wobei Striche Differentiationen nach  $w$  bedeuten, so erhält man nach (18):

$$\delta \int \mu ds = \delta \int F dw = 0 \quad (22)$$

mit

$$F = \sqrt{\varphi \left[ u'^2 + v'^2 + \left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2 \right]} - \eta \left[ A_u u' + A_v v' + A_w \sqrt{\left(1 + \frac{u}{\varrho}\right)^2 + (u^2 + v^2) \kappa^2} \right]; \quad (22a)$$

da ja die Komponenten von  $s$  die Bedeutung  $dl_u/ds$ ,  $dl_v/ds$ ,  $dl_w/ds$  haben.

Dem Variationsprinzip (21) entsprechen die Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dw} \left( \frac{\partial F}{\partial u'} \right) = \frac{\partial F}{\partial u}; \quad \frac{d}{dw} \left( \frac{\partial F}{\partial v'} \right) = \frac{\partial F}{\partial v}. \quad (23)$$

Setzen wir die Reihenentwicklungen (9) und (19) für  $\varphi$  bzw.  $\mathfrak{A}$  in (22) ein, entwickeln die Wurzeln nach  $u$ ,  $v$ ,  $u'$  und  $v'$  und fassen die Reihenglieder gleicher Ordnung zusammen, so ergibt sich:

$$F = F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + \dots \quad (24)$$

mit

$$F_0 = \sqrt{\Phi_{00}},$$

$$F_1 = \sqrt{\Phi_{00}} \left\{ \left[ \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{10}}{\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{\varphi 00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right] u + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{01}}{\Phi_{00}} - \frac{\eta H_{u 00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right] v \right\} \\ = \sqrt{\Phi_{00}} \{ A_1 u + A_2 v \},$$

<sup>1)</sup> Die jetzt beliebig ist und nicht etwa mit der optischen Achse zusammenzufallen braucht.

$$\begin{aligned}
F_2 = & \sqrt{\Phi_{00}} \left\{ \left[ \frac{\kappa^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{10}}{\Phi_{00} \varrho} - \frac{1}{8} \frac{\Phi_{10}^2}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} + \frac{1}{2} \frac{\eta H_{v00}}{\varrho \sqrt{\Phi_{00}}} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{\eta H_{v10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right] u^2 + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{01}}{\Phi_{00} \varrho} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{10} \Phi_{01}}{\Phi_{00}^2} + \frac{\Phi_{11}}{2 \Phi_{00}} - \frac{\eta H_{u10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{\eta H'_{v00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\eta H_{v00}}{\varrho \sqrt{\Phi_{00}}} \right] u v + \left[ \frac{\kappa^2}{2} - \frac{1}{8} \frac{\Phi_{01}^2}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{02}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{2} \frac{\eta H_{u01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right] v^2 - \right. \\
& \left. - \frac{\eta H_{w00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} u v' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \right\} \\
= & \sqrt{\Phi_{00}} \{ B_1 u^2 + B_2 u v + B_3 v^2 + B_4 u v' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \}, \\
F_3 = & \sqrt{\Phi_{00}} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{30}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{20} \Phi_{10}}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{20}}{\varrho \Phi_{00}} + \frac{1}{16} \frac{\Phi_{10}^3}{\Phi_{00}^3} - \right. \right. \\
& - \frac{1}{8} \frac{\Phi_{10}^2}{\varrho \Phi_{00}^2} + \frac{1}{4} \frac{\Phi_{10} \kappa^2}{\Phi_{00}} - \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{\varrho} + \frac{1}{6} \frac{\eta H_{v00} \kappa^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \\
& - \frac{1}{3} \frac{\eta H_{v10}}{\varrho \sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{1}{3} \frac{\eta H_{v20}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \left. \right] u^3 + \\
& + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{31}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{20} \Phi_{01}}{\Phi_{00}^2} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{11} \Phi_{10}}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{11}}{\varrho \Phi_{00}} + \right. \\
& + \frac{3}{16} \frac{\Phi_{10}^2 \Phi_{01}}{\Phi_{00}^3} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{10} \Phi_{01}}{\varrho \Phi_{00}^2} + \frac{1}{4} \frac{\kappa^2 \Phi_{01}}{\Phi_{00}} - \frac{\eta H_{u20}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{H'_{w10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{\eta H_{u10}}{\varrho \sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{1}{2} \frac{\eta H_{u00} \kappa^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} \left. \right] u^2 v + \\
& + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{11} \Phi_{01}}{\Phi_{00}^2} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{02} \Phi_{10}}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{2} \frac{\Phi_{02}}{\varrho \Phi_{00}} + \right. \\
& + \frac{3}{16} \frac{\Phi_{10} \Phi_{01}^2}{\Phi_{00}^3} - \frac{1}{8} \frac{\Phi_{01}^2}{\varrho \Phi_{00}^2} + \frac{1}{4} \frac{\Phi_{10} \kappa^2}{\Phi_{00}} - \frac{\kappa^2}{2 \varrho} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\eta H_{u11}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{1}{2} \frac{\eta H'_{w01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{1}{2} \frac{\eta H_{u01}}{\varrho \sqrt{\Phi_{00}}} \left. \right] u v^2 + \\
& + \left[ \frac{1}{2} \frac{\Phi_{03}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{4} \frac{\Phi_{02} \Phi_{01}}{\Phi_{00}^2} + \frac{1}{16} \frac{\Phi_{01}^3}{\Phi_{00}^3} + \frac{1}{4} \frac{\Phi_{01} \kappa^2}{\Phi_{00}} - \right. \\
& - \frac{1}{3} \frac{\eta H_{u02}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{1}{6} \frac{\eta H_{u00} \kappa^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} \left. \right] v^3 + \\
& + \left[ \frac{1}{4} \frac{\Phi_{10}}{\Phi_{00}} - \frac{1}{2 \varrho} \right] u (u'^2 + v'^2) + \frac{1}{4} \frac{\Phi_{01}}{\Phi_{00}} v (u'^2 + v'^2) - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\eta H_{w10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} u^2 v' - \frac{\eta H_{w01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} u v v' \left. \right\} \\
= & \sqrt{\Phi_{00}} \{ C_1 u^3 + C_2 u^2 v + C_3 u v^2 + C_4 v^3 + C_5 u (u'^2 + v'^2) + \\
& + C_6 v (u'^2 + v'^2) + C_7 u^2 v' + C_8 u v v' \}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Hierin trägt  $F_0$  nicht zur Elektronenbewegung bei, wie man sich leicht durch Einsetzen in (23) überzeugt.  $F_1$  dient, wie wir später sehen werden, zur Bestimmung der Achsenkrümmung  $1/\varrho$ ,  $F_2$  bestimmt die Gaußsche Abbildung,  $F_3$  die Abbildungsfehler der niedrigsten (zweiten) Ordnung.

### 5. Die gekrümmte optische Achse (Abbildung nullter Ordnung).

Beschränken wir uns bei der Entwicklung von  $F$  auf lineare Glieder, setzen also  $F_2 = F_3 = F_4 = \dots = 0$ , so erhalten wir nach (23) eine Elektronenbahn, bei welcher weder die Koordinate  $u$  und noch die Koordinate  $v$  auftritt (Bahn nullter Ordnung), also definitionsgemäß die „optische Achse“. Es ergibt sich:

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{v00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} = 0 \quad (26)$$

und

$$\frac{\Phi_{01}}{2\Phi_{00}} - \frac{\eta H_{u00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} = 0. \quad (27)$$

Gl. (26) ergibt den Wert der Achsenkrümmung in Abhängigkeit von den beiden Feldstärkekomponenten —  $\Phi_{10}$  und  $H_{v00}$ :

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}} - \frac{\eta H_{v00}}{\sqrt{\Phi_{00}}}. \quad (28)$$

Gl. (27) sagt nur aus, daß die Feldstärkekomponenten —  $\Phi_{01}$  und  $H_{u00}$  sich in ihrer Wirkung gegenseitig aufheben, da doch in der  $v$ -Richtung keine Ablenkung erfolgen soll. Im allgemeinen wird

$$\Phi_{01} = 0 \quad \text{und} \quad H_{u00} = 0 \quad (29)$$

sein.

Merkwürdig erscheint zunächst, daß die Torsion  $\kappa$  der Achse nicht mitbestimmt ist. Dies liegt in der Wahl des Koordinatensystems begründet, welches ja entsprechend dieser Torsion um die Achse gedreht wird.  $\kappa$  hängt nur von der Wahl der Anfangs- bzw. Randbedingungen zur Festlegung der Achse ab, kann also für einen *Achsenpunkt* eines in einem beliebigen festen Koordinatensystem vorgegebenen elektromagnetischen Feldes nur angegeben werden, wenn auch die *Richtung* der Achse in diesem Punkt mit festgelegt wird.

### 6. Die Gaußsche Dioptrik (Abbildung erster Ordnung).

Berücksichtigen wir bei der Entwicklung von  $F$  [vgl. Gl. (24) und (25)] auch die in  $F_2$  zusammengefaßten Glieder zweiter Ordnung, so ergeben sich

bei Beachtung von (26), (27) und (17) die Differentialgleichungen für die *paraxialen* Elektronenbahnen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\Phi_{00}}} \frac{d}{dw} \{ \sqrt{\Phi_{00}} u' \} \\ = \left( \kappa^2 + \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} + \frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{10}^2}{4\Phi_{00}^2} + \frac{\eta H_{v10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} + \frac{\eta H_{v00}}{2\sqrt{\Phi_{00}}} \right) u + \\ + \left( \frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{01}\Phi_{10}}{4\Phi_{00}^2} + \frac{\Phi_{01}}{2\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{v01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) v - \frac{\eta H_{w00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} v', \\ \frac{1}{\sqrt{\Phi_{00}}} \frac{d}{dw} \{ \sqrt{\Phi_{00}} v' \} = \left( \frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{01}\Phi_{10}}{4\Phi_{00}^2} - \frac{\eta H_{u10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) u + \\ + \left( \frac{\Phi_{02}}{\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{01}^2}{4\Phi_{00}^2} + \kappa^2 - \frac{\eta H_{u01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) v + \frac{\eta H_{w00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} u'. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Wir erhalten eine punktweise Abbildung der Gegenstandsebene  $u = w_0$  auf die Bildebene  $w = w_1$ , wenn je eine partikuläre Lösung für  $u$  und  $v$  an diesen Stellen Nulldurchgänge haben. Die Untersuchung einer solchen ganz allgemeinen Abbildung würde jedoch mathematisch äußerst kompliziert werden und kaum praktisch verwertbare Ergebnisse, die nicht auch bereits ohne Rechnung zu erkennen sind, mit sich bringen. Wir wollen uns daher auf eine Abbildung beschränken, bei welcher die Strahlen  $u$  und  $v$  als gleichartig erscheinen, welche also der Abbildung mittels *rotations-symmetrischer Linsen* bei geraden optischen Achsen entspricht. Die den Gl. (30) entsprechenden Gleichungen der Elektronenoptik *rotations-symmetrischer Linsen* haben die Form <sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} (n x' - m y) &= p x + m y', \\ \frac{d}{dz} (n y' + m x) &= p y - m x' \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} (n x') &= p x + m' y + 2 m y', \\ \frac{d}{dz} (n y') &= p y - m' x - 2 m x'. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

<sup>1)</sup> Vgl. W. Glaser, ZS. f. Phys. 97, 177, 1935, Gl. (13).



Durch Vergleich von (30) mit (32) stellen wir fest, daß folgende Beziehungen zwischen den Koeffizienten erfüllt sein müssen:

$$\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{\Phi_{00}}} &= \kappa^2 + \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} + \frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{10}^2}{4\Phi_{00}^2} + \frac{\eta H_{v10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} + \frac{\eta H_{v00}}{2\sqrt{\Phi_{00}}} \\ &= \kappa^2 + \frac{\Phi_{02}}{\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{01}^2}{4\Phi_{00}^2} - \frac{\eta H_{u01}}{\sqrt{\Phi_{00}}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{m'}{\sqrt{\Phi_{00}}} &= \frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{01}\Phi_{10}}{4\Phi_{00}^2} + \frac{\Phi_{01}}{22\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{v01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} \\ &= -\frac{\Phi_{11}}{2\Phi_{00}} + \frac{\Phi_{01}\Phi_{10}}{4\Phi_{00}^2} + \frac{\eta H_{u10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} = -\frac{\eta H'_{w00}}{2\sqrt{\Phi_{00}}}. \end{aligned} \quad (34)$$

Aus den bis jetzt aufgestellten Beziehungen zwischen den einzelnen Koeffizienten (12), (17), (27) und (28) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{02} &= -\frac{1}{2} \left( 2\Phi_{20} + \frac{\Phi_{10}}{2} + \Phi_{00}'' \right), \\ H_{u01} &= H_{v10}, \\ H_{u10} &= - \left( \frac{H_{u00}}{2} + H_{v01} + H'_{w00} \right), \\ \frac{1}{2} &= -\frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}} - \frac{\eta H_{v00}}{\sqrt{\Phi_{00}}}, \\ \frac{\eta H_{u00}}{\sqrt{\Phi_{00}}} &= \frac{\Phi_{01}}{2\Phi_{00}}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Setzen wir diese Werte in (33) und (34) ein, so erhalten wir die weiteren Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} &= \frac{\Phi_{10}^2}{2\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{01}^2}{8\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{v00} \cdot \Phi_{10}}{\Phi_{00}^{3/2}} - \frac{\eta H_{v10}}{\sqrt{\Phi_{00}}} + \frac{\eta^2 H_{v00}^2}{2\Phi_{00}}, \\ \frac{\Phi_{11}}{\Phi_{00}} &= \frac{\Phi_{01}\Phi_{10}}{\Phi_{00}^2} + \frac{\eta H_{v00} \cdot \Phi_{01}}{\Phi_{00}^{3/2}} - \frac{2\eta H_{v01}}{\sqrt{\Phi_{00}}} - \frac{\eta H'_{w00}}{\sqrt{\Phi_{00}}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Die Beziehungen (35) und (36) vereinfachen sich weiter, wenn wir entweder ein rein elektrisches oder ein rein magnetisches Abbildungsfeld benutzen. Diese Fälle werden im Abschnitt 8 untersucht.

Da wir unsere Abbildungsgleichungen (30) auf die Form der Abbildungsgleichungen rotationssymmetrischer Linsen [Gl. (32)] gebracht haben, wobei mit (35) und (36)

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{\Phi_{00}}} &= \kappa^2 - \frac{\Phi_{10}^2}{4\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{01}^2}{8\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}} + \frac{\eta H_{v00} \cdot \Phi_{10}}{2\Phi_{00}^{3/2}} - \frac{\eta^2 H_{v00}^2}{2\Phi_{00}}, \\ \frac{m}{\sqrt{\Phi_{00}}} &= -\frac{\eta H_{w00}}{2\sqrt{\Phi_{00}}} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ist, können formal *sämtliche bekannten Gesetzmäßigkeiten der Dioptrik* rotationssymmetrischer Linsen auf unser krummliniges Koordinatensystem übertragen werden. Insbesondere gelten hier sämtliche Definitionen und Bestimmungsverfahren für die *Kardinalgrößen*: Brennweiten, Hauptpunkte usw. Bei deren Bestimmung mittels des Verfahrens der sukzessiven Approximation erfolgt jedoch hier die Wahl des ersten Schrittes zweckmäßigerweise etwas anders (vgl. Abschnitt 7). Die durch die Axialkomponente  $H_{w00}$  der magnetischen Feldstärke verursachte *Bildrehung* kann genau wie bei rotationssymmetrischen Linsen durch ein neues, entsprechend um die Achse mitumlaufendes Koordinatensystem  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  für die Rechnung eliminiert werden. Schreiben wir:

$$\sigma = u + i v \quad (38)$$

und

$$\bar{\sigma} = \bar{u} + i \bar{v} = \sigma \cdot e^{-i\chi(w)}, \quad \bar{w} = w, \quad (39)$$

so ist der Umlaufswinkel  $\chi$  gegeben durch:

$$\frac{d\chi}{dw} = -\frac{m}{\sqrt{\Phi_{00}}}, \quad \chi = -\int_{w_0}^w \frac{m}{\sqrt{\Phi_{00}}} dw. \quad (40)$$

In den neuen Koordinaten erhält man eine reelle Gleichung für  $\bar{\sigma}$ :

$$\frac{d}{dw} (\sqrt{\Phi_{00}} \bar{\sigma}') = \left( p - \frac{m^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) \bar{\sigma}. \quad (41)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung schreiben wir in der Form:

$$\bar{\sigma} = \bar{a} \cdot g(w) + \bar{b} \cdot h(w). \quad (42)$$

Hierin sind  $g$  und  $h$  die sogenannten „Hauptstrahlen“, welche folgende Bedingungen zu erfüllen haben: Der Strahl  $h$  schneidet die Achse in der Gegenstands- und in der Bildebene, in der Austrittspupille hat er den Wert 1; der Strahl  $g$  hat den Wert 1 in der Gegenstandsebene und geht durch die Mitte der Austrittspupille. Hat die Austrittspupille den Abstand  $M$  von der Bildebene, wobei  $M$  positiv gezählt sei, wenn sich die Austrittspupille im Sinne der Elektronenbewegung hinter der Bildebene befindet, werden ferner die Werte der Hauptstrahlen  $g$  und  $h$  in der Gegenstandsebene durch den Index 0, in der Bildebene durch den Index 1 gekennzeichnet, so gelten nach Obigem die Beziehungen

$$h'_1 = \frac{1}{M}, \quad g'_1 = -\frac{g_1}{M} = -\frac{V \cdot g_0}{M} = -\frac{V}{M}, \quad (43)$$

worin  $V$  die Vergrößerung ist.

In Gleichung (42) sind  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  komplexe Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \bar{a}_1 + i\bar{a}_2, \\ \bar{b} &= \bar{b}_1 + i\bar{b}_2. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Sind  $\bar{u}_0$  und  $\bar{v}_0$  die Anfangswerte eines beliebigen paraxialen Strahles in der Gegenstandsebene,  $\bar{u}_p$  und  $\bar{v}_p$  seine Werte in der Pupillenebene, so bestimmen sich die Konstanten von (44) zu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= \bar{u}_0, & \bar{a}_2 &= \bar{v}_0, \\ \bar{b}_1 &= \bar{u}_p, & \bar{b}_2 &= \bar{v}_p. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Es ist also:

$$\bar{\sigma} = \bar{u} + i\bar{v} = [\bar{u}_0 g(w) + \bar{u}_p h(w)] + i[\bar{v}_0 g(w) + \bar{v}_p h(w)]. \quad (46)$$

Zur Bestimmung der Gleichung im nichtmitumlaufenden Koordinatensystem beachten wir, daß der Umlaufswinkel  $\chi$  nach (40) für die Gegenstandsebene verschwindet, daß also

$$u_0 = \bar{u}_0, \quad v_0 = \bar{v}_0 \quad (47)$$

ist, in der Pupillenebene aber  $\chi$  das gleiche wie in der Bildebene ist:

$$\chi_p = \chi_1. \quad (48)$$

Die Koordinaten  $u_p, v_p$  bzw.  $\bar{u}_p, \bar{v}_p$  des Durchstoßpunktes durch die Pupillenebene sind also durch die Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_p &= u_p \cos \chi_1 + v_p \sin \chi_1, \\ \bar{v}_p &= v_p \cos \chi_1 - u_p \sin \chi_1 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

miteinander verknüpft. Beachten wir dies, so ergibt sich nach (39) und (46) für die Koordinaten im nicht mitumlaufenden System:

$$\begin{aligned} \sigma &= u + iv = [(\bar{u}_0 \cos \chi - \bar{v}_0 \sin \chi) g + (\bar{u}_p \cos \chi - \bar{v}_p \sin \chi) h] + \\ &\quad + i[(\bar{u}_0 \sin \chi + \bar{v}_0 \cos \chi) g + (\bar{u}_p \sin \chi + \bar{v}_p \cos \chi) h] \\ &= [(u_0 \cos \chi - v_0 \sin \chi) g + (u_p \cos (\chi - \chi_1) - v_p \sin (\chi - \chi_1) h)] + \\ &\quad + i[(u_0 \sin \chi + v_0 \cos \chi) g + (u_p \sin (\chi - \chi_1) + v_p (\chi - \chi_1) h)]. \end{aligned} \quad (50)$$

## 7. Näherungsweise Bestimmung der Brennweite und der Hauptebenenlage.

Zur Bestimmung der Brennweiten und der Hauptebenenlage wird eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (41):

$$\frac{d}{dw} \left( \sqrt{\Phi_{00}} \frac{d\bar{\sigma}}{dw} \right) = \left( p - \frac{m^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) \bar{\sigma} \quad (41)$$

herangezogen; diese Lösung stellt einen Strahl dar, der in der *Gegenstandsebene* im Achsenabstand 1 parallel zur Achse verläuft. Die bildseitige Brennweite  $f_1$  ist dann<sup>1)</sup>:

$$\frac{1}{f_1} = -\bar{\sigma}_1' \quad (51)$$

( $\bar{\sigma}_1'$  ist die Strahlineigung in der Bildebene); die gegenstandsseitige Brennweite ergibt sich aus den Gaußschen Abbildungsgesetzen:

$$\frac{1}{f_0} = -\frac{1}{f_1} \sqrt{\frac{U_1}{U_0}}, \quad (52)$$

wenn  $U_0$  und  $U_1$  die Potentiale in der Gegenstands- bzw. Bildebene sind:

$$\begin{aligned} U_0 &= \Phi_{00}(w_0), \\ U_1 &= \Phi_{00}(w_1). \end{aligned} \quad (53)$$

Die Lage  $w = w_{H_1}$  der bildseitigen Hauptebene ergibt sich zu:

$$w_{H_1} = w_1 - f_1 (1 - \bar{\sigma}_1). \quad (54)$$

Zur Bestimmung der Lage  $w = w_{H_0}$  der gegenstandsseitigen Hauptebene wählt man einen Strahl, der in der *Bildebene* im Achsenabstand 1 parallel zur Achse verläuft. Man erhält entsprechend

$$w_{H_0} = w_0 - f_0 (1 - \bar{\sigma}_0). \quad (55)$$

In der Elektronenoptik rotationssymmetrischer Linsen wird die gesuchte partikuläre Lösung meist mittels der Methode der sukzessiven Approximation gefunden<sup>2)</sup>. Als erster Ansatz wird dabei  $\bar{\sigma}_I = 1 = \text{const}$  gewählt, auf der rechten Seite von (41) eingesetzt und die verbesserte Lösung daraus durch zweifache Quadratur bestimmt:

$$\bar{\sigma}_{II} = 1 + \int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{\Phi_{00}}} \int_{w_0}^w \left( p - \frac{m^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} \right) dw. \quad (56)$$

Dieser Wert kann dann nochmals auf der rechten Seite von (41) eingesetzt werden usw.

In unserem Fall (bei gekrümmten Abbildungsachsen) ist es sehr oft der Fall, daß der Strahl bereits innerhalb des Feldes einen Nulldurchgang aufweist, so daß  $\sigma_I = \text{const}$  als erster Schritt unzweckmäßig erscheint. Nehmen wir andererseits an, daß  $\Phi_{00}$  und  $\left(p - \frac{m^2}{\Phi_{00}}\right)$  sich nur wenig ändern, so daß sie gebietsweise als praktisch konstant angesehen werden können,

<sup>1)</sup> Die Brennweiten werden positiv gerechnet, wenn die Brennpunkte im Sinne der Elektronenbewegung hinter der entsprechenden Hauptebene liegen.  
<sup>2)</sup> Vgl. z. B. O. Scherzer, ZS. f. Phys. 80, 193, 1933.

so gibt (41) als Lösung eine Kreisfunktion. Wir setzen daher als ersten Schritt an:

$$\sigma_I = \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) \quad (57)$$

mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2}{\Phi_{00}} - \frac{p}{\sqrt{\Phi_{00}}}}. \quad (58)$$

Als die nächstbessere Annäherung ergibt sich dann:

$$\sigma_{II} = 1 + \int_{w_0}^w \frac{dw}{\sqrt{\Phi_{00}}} \int_{w_0}^w \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) dw. \quad (59)$$

Die Strahlwerte in der Bildebene sind in dieser Näherung:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= 1 + \int_{w_0}^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{\Phi_{00}}} \int_{w_0}^w \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) dw, \\ \sigma'_1 &= \frac{1}{\sqrt{U_1}} \int_{w_0}^{w_1} \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) dw. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Für die *Brennweiten* erhält man also nach (51) und (52):

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{1}{f_0} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{U_1}} = -\frac{1}{\sqrt{U_1}} \int_{w_0}^{w_1} \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cdot \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) dw. \quad (61)$$

Befinden sich Gegenstands- und Bildebene im feldfreien Raum, so können als Integrationsgrenzen statt  $w_0$  und  $w_1$  die Werte  $-\infty$  bzw.  $+\infty$  eingesetzt werden:

$$\frac{1}{f_1} = -\frac{1}{f_0} \cdot \sqrt{\frac{U_0}{U_1}} = -\frac{1}{\sqrt{U_1}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cos \left( \int_{-\infty}^w \alpha dw \right) dw. \quad (62)$$

Die Lage der *bildseitigen Hauptebene* erhält man aus (54) und (60):

$$w_{H_1} = w_1 + f_1 \cdot \int_{w_0}^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{\Phi_{00}}} \int_{w_0}^w \sqrt{\Phi_{00}} \cdot \alpha^2 \cos \left( \int_{w_0}^w \alpha dw \right) dw. \quad (63)$$

Für den Fall, daß Gegenstands- und Bildebene wieder im feldfreien Raum liegen, erhalten wir daraus nach einer partiellen Integration:

$$\begin{aligned} w_{H_1} = & -f_1 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} w \alpha^2 \cos \left( \int_{-\infty}^w \alpha dw \right) dw + \right. \\ & \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{w \Phi'_{00}}{\Phi_{00}^{3/2}} \int_{-\infty}^w \alpha^2 \sqrt{\Phi_{00}} \cos \left( \int_{-\infty}^w \alpha dw \right) dw \right) dw \right]. \quad (64) \end{aligned}$$

Für die Lage der gegenstandseitigen Hauptebene erhält man entsprechend:

$$w_{H_0} = f_0 \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} w \alpha^2 \cos \left( \int_w^\infty \alpha dw \right) dw + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w \Phi'_{00} dw}{\Phi_{00}^{3/2}} \int_w^\infty \alpha^2 \sqrt{\Phi_{00}} \cos \left( \int_w^\infty \alpha dw \right) dw \right]. \quad (65)$$

### 8. Punktweise abbildende rein elektrische und rein magnetische Felder.

Wir wollen jetzt untersuchen, von welcher Form ein rein elektrisches bzw. ein rein magnetisches Feld sein muß, damit die Gegenstandsebene  $w = w_0$  Punkt für Punkt ähnlich auf die Bildebene  $w = w_1$  abgebildet wird. Dabei wird wieder vorausgesetzt, daß unsere Felder eine Form haben sollen, die den rotationssymmetrischen Linsenfeldern äquivalente Brechungseigenschaften aufweisen (vgl. Abschnitt 6).

Zunächst sei ein *rein elektrisches Linsenfeld* behandelt. Aus den Bedingungen (35) und (36) für die Reihenkoeffizienten bei einem allgemeinen elektromagnetischen Feld erhalten wir für unseren Sonderfall:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{01} &= \Phi_{11} = 0, \\ \frac{1}{\varrho} &= -\frac{\Phi_{10}}{2\Phi_{00}}, \\ \frac{\Phi_{20}}{\Phi_{00}} &= \frac{\Phi_{10}^2}{2\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}}, \\ \frac{\Phi_{02}}{\Phi_{00}} &= -\frac{\Phi_{10}^2}{4\Phi_{00}^2} - \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}}. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Das Abbildungsfeld hat also nach (9) die Gestalt:

$$\varphi = \Phi_{00} + \Phi_{10}u + \left( \frac{\Phi_{10}^2}{2\Phi_{00}} - \frac{\Phi_{00}''}{4} \right) u^2 - \left( \frac{\Phi_{10}^2}{4\Phi_{00}} + \frac{\Phi_{00}''}{4} \right) v^2 + \dots \quad (67)$$

oder

$$\frac{\varphi}{\Phi_{00}} = 1 - \frac{2u}{\varrho} + \left( \frac{2}{\varrho^2} - \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}} \right) u^2 - \left( \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\Phi_{00}''}{4\Phi_{00}} \right) v^2 + \dots \quad (68)$$

Die Niveaulinien  $\varphi = \varphi_k$  dieser Potentialverteilung in einer Ebene  $w = \text{const}$  stellen eine Schar konfokaler Hyperbeln dar, mit der Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{\left[ \frac{u}{\varrho} - \frac{1}{2 \left( 1 - \frac{\Phi_{00}'' \varrho^2}{8\Phi_{00}} \right)} \right]^2}{1 + 2 \left( \frac{\varphi_k}{\Phi_{00}} - 1 \right) \left( 1 - \frac{\Phi_{00}'' \varrho^2}{8\Phi_{00}} \right)} - \frac{\left( \frac{v}{\varrho} \right)^2}{2 \left( 1 - \frac{\Phi_{00}'' \varrho^2}{8\Phi_{00}} \right) \left( 1 + \frac{\Phi_{00}'' \varrho^2}{4\Phi_{00}} \right)} = 1. \quad (69)$$



Als Beispiel greifen wir den Fall heraus, daß längs der  $w$ -Achse das Potentialfeld unveränderlich, d. h.  $\Phi''_{00} = 0$  sein soll. Wir erhalten dann:

$$\frac{\left(\frac{u}{\varrho} - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{\varphi_k}{\Phi_{00}} - \frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{v}{\varrho}\right)^2}{\frac{\varphi_k}{\Phi_{00}} - \frac{1}{2}} = 1. \quad (70)$$

Dieses Potentialfeld ist in Fig. 2a dargestellt. Will man das Feld praktisch realisieren, so kann man entsprechend ausgebildete Elektroden

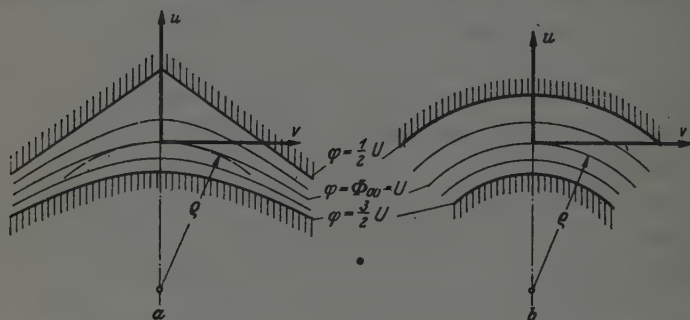


Fig. 2. Punktweise abbildendes rein elektrisches Linsenfeld mit  $\Phi_{00} = U = \text{const}$  in einer Ebene  $w = \text{const}$ . ( $\varrho$  = Krümmungsradius der Achse.) a) Hyperbelförmige Niveaulinien. b) Kreisförmige Niveaulinien.

an Stelle beliebig ausgesuchter Niveaulächen legen. Legt man z. B., wie in der Figur angedeutet, die eine Elektrode an die Stelle der Hyperbelsymptoten, so würde sie die Form eines Stückes gebogenen Winkelprofils erhalten.

Bei solchen Überlegungen ist zu beachten, daß die Niveaulinien nur in der Umgebung der optischen Achse die geforderte Gestalt aufweisen müssen. In weiterer Entfernung spielen bereits die Glieder höherer Ordnung in  $u$  und  $v$  eine Rolle, die wir für die Gaußsche Abbildung vernachlässigt haben. So ist z. B. für den Fall der Fig. 2a nur die Krümmung der Niveaulinien im Hyperbelscheitel wesentlich, ob dagegen die Äquipotentiallinien selber Hyperbeln oder andere Kurven gleicher Scheitelkrümmung sind, ist nebensächlich.

Der Krümmungsradius im Scheitel einer Hyperbel ist:

$$R = \frac{B^2}{A}, \quad (71)$$

wenn  $A$  die reale,  $B$  die imaginäre Hyperbelhalbachse bedeutet. Die durch den Koordinatenanfangspunkt  $u = 0$ ,  $v = 0$  gehende Äquipotentiallinie  $\varphi_k = \Phi_{00}$  hat also nach (58) eine Scheitelkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{A}{B^2} = \frac{e/2}{e^2/2} = \frac{1}{e}. \quad (72)$$

Die Krümmung der Niveauflächen in der zur  $uv$ -Ebene senkrechten  $uw$ -Ebene ist, da auf der Achse  $\varphi = \Phi_{00} = \text{const}$  vorausgesetzt wurde, gleich der Krümmung der Achse  $1/\rho$ . Somit stellt ein Element der Niveaufläche in der Umgebung eines Achsenpunktes ein Kugelflächelement dar. Ist insbesondere längs der Achse  $\rho = \text{const}$  und  $\kappa = 0$ , so kann eine solche Linse aus zwei konzentrischen Kugelkalotten gebildet werden (Fig. 2b). Eine solche Verschiedenheit von abbildungsfähigen Elektrodenformen ist auch bei rotationssymmetrischen Linsen vorhanden (Scheibenlinsen, Rohrlinsen). Man wird sich für diejenige Formentscheiden, die praktisch möglichst einfach herstellbar ist oder die geringsten Abbildungsfehler aufweist.

Im Fall einer rein magnetischen Linse erhalten wir aus (35) und (36) die Bedingungen für die Koeffizienten:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{00} &= \text{const}, \\ H_{u00} &= 0, \\ H_{u10} &= H_{v01} = -\frac{1}{2} H'_{w00}, \\ H_{u01} &= H_{v10} = \frac{\eta}{2} \frac{H_{v00}^2}{\sqrt{\Phi_{00}}}, \\ \frac{1}{e} &= -\frac{\eta H_{v00}}{\sqrt{\Phi_{00}}}. \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

Um über die Form des magnetischen Feldes eine anschauliche Vorstellung zu gewinnen, führen wir das skalare magnetische Potential  $\psi$  ein, das wie das skalare elektrische Potential mit der Feldstärke durch die Beziehung

$$\mathfrak{H} = -\text{grad } \psi \quad (74)$$

verbunden ist. Setzen wir für  $\psi$  die Reihenentwicklung:

$$\psi = \Psi_{00} + \Psi_{10} u + \Psi_{01} v + \Psi_{20} u^2 + \Psi_{11} uv + \Psi_{02} v^2 + \dots \quad (75)$$

an und beachten (5), so wird:

$$\left. \begin{aligned} H_u &= -\Psi_{10} - 2\Psi_{20}u - \Psi_{11}v - \dots, \\ H_v &= -\Psi_{01} - \Psi_{11}u - 2\Psi_{02}v - \dots, \\ H_w &= -\Psi'_{00} - \Psi'_{10}u - \Psi'_{01}v - \dots. \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Unter Berücksichtigung von (10) und (73) erhalten wir für die Verteilung des magnetischen Skalarpotentials:

$$\psi = - \int H_{w00} dw - H_{v00} v + \frac{1}{4} H'_{w00} (u^2 + v^2) - \frac{\eta}{2} \frac{H_{v00}^2}{\sqrt{\Phi_{00}}} uv + \dots \quad (77)$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck beiderseits mit dem konstanten Faktor

$$k = \frac{\eta}{\sqrt{\Phi_{00}}}, \quad (78)$$

so wird aus (77) mit der letzten Gleichung von (73)

$$k\psi = - \int k H_{w00} dw + \frac{v}{\varrho} + \frac{k}{4} H'_{w00} (u^2 + v^2) - \frac{uv}{2\varrho^2} + \dots \quad (79)$$

Je nachdem ob in einer Ebene  $w = \text{const}$   $k^2 H_{w00}^2$  größer, gleich oder kleiner als  $1/4\varrho^4$  ist, stellt (79) eine Schar von Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln dar.

Als Beispiel soll der Fall  $H_{w00} = 0$  behandelt werden. Dann wird:

$$k\psi = \frac{v}{\varrho} - \frac{uv}{2\varrho^2} + \dots \approx - \frac{v}{\varrho} \left( \frac{u}{2\varrho} - 1 \right). \quad (80)$$

Dies ist für  $w = \text{const}$  eine Schar von gleichseitigen Hyperbeln mit den Asymptoten  $u = 2\varrho$ ;  $v = 0$  (Fig. 3). Auch hier ist es nicht notwendig, die

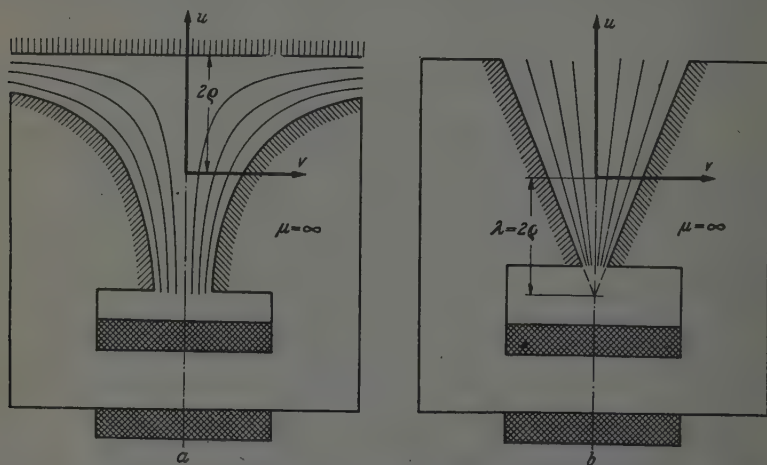


Fig. 3. Punktweise abbildendes rein magnetisches Linsenfeld in einer Ebene  $w = \text{const}$ . ( $H_{w00} = 0$ ,  $\varrho$  = Krümmungsradius der Achse.) a) Hyperbelförmige Niveaulinien. b) Gerade Niveaulinien des skalaren magnetischen Potentials.

Polschuhe des Elektromagneten, wie in der Figur angedeutet, durch Hyperbeln begrenzen zu lassen. Wie wir sehen, sind in der Umgebung der Achse die Niveaulinien nahezu gerade. Wir wollen daher versuchen, sie durch

eine Geradenschar darzustellen. Liegt das Zentrum des Geradenbüschels auf der negativen  $u$ -Achse im Abstand  $\lambda$  vom Koordinatenursprung, so wird es durch die Gleichung:

$$\frac{v}{u + \lambda} = \text{const} \quad (81)$$

dargestellt. Entwickeln wir die linke Seite nach  $u$  und  $v$ , so ergibt sich

$$\frac{v}{\lambda} \left( 1 - \frac{u}{\lambda} + \dots \right) = \text{const} \quad (82)$$

und durch Vergleich mit (80):

$$\lambda = 2 \varrho. \quad (83)$$

Wir können also zur Herstellung eines punktweise abbildenden magnetischen Feldes auch eben begrenzte Polschuhe für den Elektromagneten wählen. Auch hier wird man sich für diejenige Anordnung entscheiden, die entweder praktisch leicht herstellbar ist oder möglichst geringe Abbildungsfehler aufweist.

Bei der Bestimmung der Brennweiten und Hauptebenen nach (62), (64) und (65) ist für *rein elektrische Felder* für  $\alpha$  nach (58), (37) und (66)

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Phi''_{00}}{4 \Phi_{00}} + \frac{\Phi_{10}^2}{4 \Phi_{00}^3}} - \kappa^2 = \sqrt{\frac{\Phi''_{00}}{4 \Phi_{00}} + \frac{1}{\varrho^2}} - \kappa^2 \quad (84)$$

zu setzen. Für *rein magnetische Felder* entsprechend nach (73):

$$\alpha = \sqrt{\frac{\eta^2 H_{w00}^2}{4 \Phi_{00}} + \frac{\eta^2 H_{v00}^2}{2 \Phi_{00}} - \frac{1}{\kappa^2}} = \sqrt{\frac{\eta^2 H_{w00}^2}{4 \Phi_{00}} + \frac{1}{2 \varrho^2}} - \kappa^2. \quad (85)$$

Interessant ist noch der Fall, wenn  $\alpha = 0$  und  $\Phi_{00} = \text{const}$  ist. Der Elektronenstrahl wird dann zwar entsprechend der Achsenkrümmung gekrümmt, aber nicht gebrochen: zwischen  $u$ ,  $v$  und  $w$  gelten nur lineare Beziehungen. So verändert z. B. ein in das Feld achsenparallel eintretender Strahl seinen Abstand von der Achse auch im Felde nicht, erscheint also im Bildraum wieder als achsenparalleler Strahl.

### 9. Zusammenfassung.

Entsprechend der optischen Achse bei rotationssymmetrischen Elektronenlinsen wird als „krummlinige Achse“ eine Elektronenbahn gewählt, die die Mitte der Gegenstandsebene mit der Mitte der Bildebene verbindet. Zugleich ist diese Achse die  $w$ -Achse eines krummlinigen Koordinatensystems. Die beiden anderen Koordinaten  $u$  und  $v$  haben die Richtung der Normalen und der Binormalen der Achse.

Das elektromagnetische Potentialfeld wird in eine Potenzreihe in  $u$  und  $v$  um diese Achse entwickelt. Aus dem Fermatschen Prinzip erhält man die Bewegungsgleichungen. Nach dem Einsetzen der Potentialreihen in diese Gleichungen, Entwicklung der vorkommenden Wurzelausdrücke und Streichung aller von den Koordinaten  $u$  und  $v$  abhängiger, also auch linearer Glieder erhält man die Beziehung zwischen Potentialfeld und Achsenkrümmung. Die Windung der Achse ist durch Anfangs- oder Randbedingungen für die Achse festgelegt.

Läßt man in den Bewegungsgleichungen die linearen Glieder stehen, so erhält man die Gaußschen Bahnen. Von dem elektromagnetischen Potentialfeld wird dann verlangt, daß die  $u$  und  $v$ -Richtung in bezug auf die Elektronenbewegung gleichberechtigt sind, was dem rotationssymmetrischen Fall bei Elektronenlinsen mit gerader Achse entspricht. Es gelten dann sämtliche Abbildungsgesetze der rotationssymmetrischen Linsen.

Die Brennweiten und Hauptpunkte werden nach der Methode der sukzessiven Approximation angenähert berechnet. Dabei wird entsprechend dem etwas anders gelagerten Problem als erster Ansatz keine Konstante, sondern eine Kreisfunktion gewählt.

Zum Schluß wird die Form solcher krummachsiger Linsen für den rein elektrischen oder rein magnetischen Fall angegeben.

*Berlin*, Laboratorium für Elektronenforschung, Telefunken, im September 1942.

# Strahlungseigenschaften und Energieausbreitung bei dicht gelagerten, gleichartigen Atomen.

Von F. Möglich und R. Rompe in Berlin.

Mit 2 Abbildungen. (Eingegangen am 22. November 1942.)

Für ein aus beliebig vielen, nahe benachbarten Atomen bestehendes System werden Wellenfunktionen zu seiner näherungsweise Beschreibung angegeben. Es wird dann gezeigt, wie die Emission und Absorption durch Übergangswahrscheinlichkeiten des einzelnen Atoms beschrieben werden können, wobei zu diesen Übergangswahrscheinlichkeiten Faktoren hinzutreten, die in charakteristischer Weise von der Lage der Atome zueinander abhängen. Insbesondere wird nachgewiesen, daß die natürliche Linienbreite einer von einem solchen Atomensemble ausgesandten Linie zur Übergangswahrscheinlichkeit in dem gleichen Zusammenhang stehen, wie die entsprechenden Größen des einzelnen Atoms. Auch die Linienverschiebung als Folge der Wechselwirkung der Atome untereinander wird berechnet. Die Resonanzfluoreszenz eines solchen Ensembles wird untersucht. Die gewonnenen Ergebnisse werden auf den Fall angewandt, daß die Atome eine regelmäßige Anordnung haben. Als Realisierung dieses Falles dienen die von Scheibe und Mitarbeitern untersuchten Phänomene der reversiblen Polymerisate gewisser Farbstoffmoleküle. Die dabei beobachteten Erscheinungen lassen sich durch die hier gegebene Theorie befriedigend deuten.

Der Begriff „Einzelatom“ setzt Bedingungen voraus, bei welchen die Einwirkung der Nachbaratome entweder überhaupt zu vernachlässigen ist oder sich jedenfalls nur über sehr kurze Zeiträume erstreckt, kurz im Vergleich zum zeitlichen Abstand zwischen zwei Einwirkungen. Eine derartige Form der Wechselwirkung wird in der Atomphysik gemeinhin als „Stoß“ bezeichnet. Dies ist jedenfalls die Voraussetzung, die mehr oder weniger stillschweigend bei der Theorie der Gase und der Beeinflussung der Strahlungseigenschaften der Atome durch ihre Nachbarn, wie Linienverbreiterung durch Stöße, Quasimolekülspektren u. dgl. zugrunde gelegt wird. Andererseits ist es bei dichter Packung der Atome sicher nicht mehr sinnvoll, von Einzelatomen zu sprechen, etwa bei Materie in kondensierter Phase, wie Metallen u. dgl.<sup>1)</sup> Es gibt natürlich Übergangsgebiete, in denen es durchaus zweifelhaft sein kann, ob man der atomindividualistischen oder der dem festen Zustand angepaßten Behandlungsweise den Vorzug geben soll. Unsere Überlegungen beziehen sich gerade auf dieses Übergangsgebiet, wobei die quantitativen Daten der Erstreckung dieses Bereiches aus dem Folgenden hervorgehen werden.

In dem uns hier interessierenden Bereich der Dichte bzw. der Abstände der Atome glauben wir, den Begriff des Einzelatoms noch durchaus als

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu: R. de L. Kronig im Handb. d. Phys. 24,2 Berlin 1934.



sinnvoll ansehen zu können. Als Kriterium für die Abgrenzung gegen den Bereich höherer Dichten, wo also die Einzelindividualität der Atome aufgegeben werden muß, wollen wir das Integral:

$$A = \int \psi_n^{(a)}(\mathbf{r}) \psi_m^{(b)}(\mathbf{r}) d\tau$$

ansehen, wo  $\psi_n^{(a)}$  die Eigenfunktion des  $n$ -ten Quantenzustandes des Atoms  $a$ ,  $\psi_m^{(b)}$  die des  $m$ -ten des benachbarten Atoms  $b$  darstellt. Das näherungsweise Verschwinden von  $A$  soll im Rahmen unserer Überlegungen als notwendige Bedingung für die Berechtigung der Vorstellung des individualen Atoms angesehen werden.

Man sieht aus dem Integral, daß der Gültigkeitsbereich unserer Überlegungen von der Höhe des in Betracht gezogenen Quantenzustandes abhängt. Denn man kann ja näherungsweise die lineare Ausdehnung der Elektronenwolke des Atoms als proportional  $n^2$  ansehen, wo  $n$  die Hauptquantenzahl des Elektronenzustandes ist. Ferner ist noch zu berücksichtigen, daß im allgemeinen der Abfall der Ladungsdichte der Elektronenwolke nach außen exponentiell geht, so daß meist eine ziemlich gut definierte Grenze für das Eintreten der Überlappung  $A$  und damit das Aufhören der Eigenindividualität gegeben ist. Auf diese Weise kann es also geschehen, daß z. B. Na-Atome, die in einem Stück Na-Metall sich befinden, hinsichtlich des 3  $s$  (Leucht-)Elektrons ihre Individualität völlig eingebüßt haben und ein durchaus neues Gebilde, nämlich eben das Na-Metall darstellen, hinsichtlich der 1  $s$ - und 2  $s$ -, 3  $p$ -Elektronen noch durchaus individualen Charakter besitzen und als regelmäßig angeordnete Einzelatome anzusprechen sind.

Es muß jetzt die Frage beantwortet werden, was wir als experimentell greifbares Kriterium der Individualität des Atoms ansehen wollen. Diese Frage beantwortet sich von selbst: Das Spektrum des Atoms. Und zwar sollen die Verschiebung und Verbreiterung der Linien im Energiemaß klein sein gegen die Termenergie selbst. In der Tat ist bei Einsetzen der Überlappung der Ladungsverteilung der Atome die entstehende Störenergie sehr bald so groß, daß das Spektrum des Atomindividuums bis zur völligen Unkenntlichkeit entstellt wird, wie man ohne weiteres durch Vergleich der Spektren des Na-Atoms, des Natriummoleküls und des Na-Metalls sehen kann.

Die Abgrenzung nach großen Abständen, d. h. kleinen Dichten hin, ist nicht ganz so einfach durchzuführen. Sie wird sich jedoch mit ausreichender Klarheit aus den weiteren Überlegungen ergeben. Wir wollen unsere Aufmerksamkeit im folgenden auf die Modifikation der Strahlungs-

eigenschaften der Atome bei Eingang in den uns hier interessierenden, nach unten wohl abgegrenzten Bereich der Atomabstände richten.

Welche Strahlungseigenschaften sich ändern können im Vergleich zum Verhalten des Einzelatoms, ist ohne weiteres verständlich: Die Intensität der Ausstrahlung nach Größe und Richtung. Die Ausstrahlung eines Einzelatoms ist gegeben durch sein Dipolmoment, dieses durch Frequenz und  $f$ -Wert; die Richtcharakteristik ist die eines Dipols. Sind unabhängige Atome an der Ausstrahlung beteiligt und ist der Raum, in welchem sie sich befinden, isotrop, so kommt wegen der statistischen Verteilung der Richtungen eine völlig isotrope Ausstrahlung der Intensität zustande. Ist der Raum etwa durch ein elektrisches oder magnetisches Feld für die Atome anisotrop, so tritt infolge der Orientierung der Atome im äußeren Feld eine Anisotropie der Ausstrahlung auf, unter Erhaltung des Gesamt- $f$ -Wertes und damit der Ausstrahlungsintensität. Dies ist aus der Untersuchung des Zeeman-Effektes bekannt. Beim Übergang in den uns hier interessierenden Atomabstandsbereich ist von vornherein nicht sicher, daß der Gesamtwert der  $f$ -Zahl von  $N$  Atomen erhalten bleibt. Denn dies ist durchaus von der Wechselwirkung mit der Umgebung abhängig, durch welche z. B. in besonders krassen Fällen ein Übergangsverbot im Atom aufgehoben werden kann, so daß eine Emission von „metastabilen“ Termen aus erfolgt (Preston).

Wir haben es hier mit gleichartigen Atomen zu tun, die zudem alle im selben Zustand, dem Grundzustand, sich befinden sollen. Die Wechselwirkung soll in sehr guter Näherung elektrodynamischer Art sein. Sie hat einen skalaren Anteil  $V$ , der von den Coulomb-Kräften der Atombestandteile herrührt und den vektoriellen Anteil  $\mathfrak{U}$ , der die Einwirkung des Strahlungsfeldes beschreibt. Solange wir uns nicht für die Verlagerung der Termenergien interessieren, können wir den skalaren Anteil  $V = 0$  setzen; wir beschränken uns dann lediglich auf die Veränderung der Ausstrahlung nach Größe und Richtung, so daß also die Koppelung der Atome allein von der virtuellen Existenz des Strahlungsfeldes besorgt wird. Als Wechselwirkung dieses Feldes mit den übrigen Atomen wird ein Überspringen der Energie von dem zunächst angeregten Atom auf die anderen zu verzeichnen sein. Eine unmittelbare Konsequenz dieses Vorganges liegt darin, daß die Anregungsenergie, die im Falle isolierter Atome im allgemeinen etwa  $10^{-8}$  sec bei dem Atom verbleibt, im Falle einer solchen Wechselwirkung gleichartiger Atome nicht mehr einem bestimmten Atom zugeschrieben werden kann. Die unmittelbar in Erscheinung tretende Folge dieses Vorganges, der einen Austausch der Energie unter den Atomen darstellt, ist eine Verkürzung der Lebensdauer jedes angeregten Atomzustandes, und damit

eine Verbreiterung der Spektrallinien, die das Atom emittiert. Diese Verbreiterung tritt additiv zur natürlichen Linienbreite hinzu. Umgekehrt gibt nun also eine Linienverbreiterung dieser Art Kunde von einem Energieübertragungsmechanismus zwischen den Atomen, eine dem Physiker längst geläufige Tatsache, die jedoch neuerdings für gewisse biologische Probleme Bedeutung gewonnen hat, wo derartige „Energieausbreitungen“ für das Funktionieren bei biologischen Primärreaktionen wesentlich sind<sup>1)</sup>.

Die Beschreibung der Wechselwirkung des angeregten Atoms mit anderen, gleichartigen Atomen mittels des virtuellen elektrischen Feldes hat zunächst etwas abstrakt Unanschauliches an sich. Man ist geneigt, die Wechselwirkung durch „Zustrahlung“ als einen Teil des insgesamt Möglichen anzusehen, zu der ja auch die durch Stoß 2. Art, also auch ein strahlungsloser Vorgang, hinzukommt. Tatsächlich lassen sich diese beiden Möglichkeiten bei kleinen Dichten experimentell voneinander trennen: Die „Zustrahlung“ ist von der Bewegung der isolierten Atome unabhängig (in 1. Näherung) und die Stöße 2. Art sind durch das Dipolpotential, die Relativgeschwindigkeit und den Stoßparameter ausreichend gekennzeichnet. Sie besitzen einen genau angebbaren Wirkungsquerschnitt, der z. B. für  $f = 1$  etwa  $10^{-10}$  bis  $10^{-12}$  cm<sup>2</sup> beträgt. Der Wirkungsquerschnitt für die Absorption eines Lichtquanten durch ein gleichartiges Atom ist von derselben Größenordnung für eine Temperatur, bei welcher die Doppler-Breite etwa 100mal größer ist als die natürliche, also etwa bei Zimmertemperatur. Diese begriffliche Aufteilung des Übertragungsmechanismus läßt sich jedoch

---

<sup>1)</sup> Die Sichtung des biologischen Materials hat nämlich zweifelsfrei ergeben, daß die Wirkungen der Strahlung auf die Gene nicht in einem unmittelbaren Absorptionsakt am Orte des Gens stattfindet, sondern daß zwischen Absorption eines Lichtquanten und der entsprechenden Umgestaltung eines Genes ein physikalischer Vorgang zwischengeschaltet ist, der in einer Wanderung der Energie über beträchtliche Strecken besteht. Für solche Wandervorgänge kann man mehrere Mechanismen angeben, die im biologischen Falle möglicherweise alle verwirklicht sind. Ein Mechanismus aber hat deshalb besondere Beachtung gefunden, weil er sich gewissermaßen in vitro (allerdings zunächst unabhängig von biologischen Fragestellungen) hat züchten lassen. Es ist dies die Energiefortleitung in den von Scheibe und Mitarbeitern entdeckten reversiblen Polymerisaten des Pseudoisocyanins. Die hier gefundenen Gesetzmäßigkeiten in der Anordnung der Moleküle scheinen sich nun bei gewissen Eiweiß- und Thymonucleinsäuren wiederzufinden, so daß man möglicherweise in den genannten Polymerisaten einen besonderen Typ des biologischen Energieleiters vor sich hat. Unter diesen Umständen schien es uns besonders interessant, die physikalischen Vorgänge in einem solchen Komplex zu analysieren, wobei uns das Rüstzeug hierzu aus anderen Untersuchungen, über die in einer späteren Arbeit referiert werden soll, erwuchs. Vgl. hierzu F. Möglich, R. Rompe u. N. W. Timofeeff-Ressovsky, Naturwiss. 30, 409, 1942.

kaum noch aufrechterhalten, wenn die Abstände der Atome kleiner als die genannten Wirkungsradien, d. h. kleiner als  $10^{-5}$  bis  $10^{-6}$  cm geworden sind. Denn dann liegen dauernd Atome innerhalb einer Strecke von der genannten Größe, d. h. etwa einer Wellenlänge, so daß die Unterscheidung zwischen einer Wechselwirkung innerhalb der freien Flugdauer (Zustrahlung) und innerhalb des Stoßes (Stoß 2. Art) sinnlos wird.

Vom grundsätzlichen Standpunkt aus betrachtet sind die verschiedenen hier eben erörterten Verfahren lediglich verschiedene Näherungslösungen für ein und dasselbe Problem, das in völliger Exaktheit zu behandeln, oft rechnerisch unüberwindliche Schwierigkeiten bereitet. Wenn man z. B. die Wechselwirkung zweier Moleküle miteinander berechnen will, so kann man jedes Molekül durch eine Wellenfunktion darstellen, und muß dann für die Wechselwirkung zwischen diesen Molekülen einen Ansatz machen, der den bekannten Molekularkräften entspricht. So gelangt man gewiß zu richtigen Resultaten, solange die Moleküle einander nicht zu nahe kommen. Fangen aber die Elektronenwolken der Moleküle an einander zu durchdringen, so ist die Darstellung eines solchen Vorganges mit Hilfe von zwei Molekülwellenfunktionen offenbar nicht mehr zu leisten. Dann muß die Tatsache berücksichtigt werden, daß jedes Molekül aus einer Anzahl von Elektronen und positiv geladenen Atomrümpfen besteht und für jeden dieser Partner eines Moleküls müssen Wellenfunktionen eingeführt werden, wobei es wieder in einer gewissen Näherung genügt, nur mit Elektroneneigenfunktionen zu arbeiten, und die Lage der schweren Teilchen lediglich als Parameter in die Wellenfunktionen der Elektronen eingehen zu lassen. Die Wechselwirkung, die jetzt anzusetzen ist, ist natürlich nicht mehr der Ausdruck für die Molekularkräfte, sondern offenbar die Coulombsche Wechselwirkung zwischen allen geladenen Teilchen. Die Molekularkräfte müssen sich dann aus diesem Ansatz automatisch als eine brauchbare Näherung für große Werte gewisser Abstandsparameter ergeben. Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und das Atom nicht als Wellenfunktionen lediglich der Elektronen behandeln (nur noch versehen mit einem Lageparameter für den Atomkern), sondern man kann auch dem Atomkern eine Wellenfunktion zuordnen. Dann braucht man die Coulombschen Kräfte nicht mehr einzuführen, sondern nur noch die Wechselwirkung jeder Partikel mit dem elektromagnetischen Feld zu berücksichtigen. Es ergibt sich so eine Näherung, die Coulombsche Wechselwirkung, wie es Dirac gezeigt hat<sup>1)</sup>, so daß also der letztgenannte Fall alle anderen als sukzessive Näherung enthält, usw.

<sup>1)</sup> P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) 136, 453, 1932.



Der in dieser Arbeit vertretene Standpunkt ist nicht der eben dargestellte extremste. Wir machen das Atom zur Grundlage unserer Berechnung und beziehen unsere Ergebnisse auf dieses. Daher führen wir die Atomkerne lediglich durch ihre Lageparameter ein und behandeln sie demgemäß „klassisch“. Die Elektronen werden durch Wellenfunktionen berücksichtigt und die Wechselwirkung ist als Summe Coulombscher Ausdrücke anzusetzen. Die Verkopplung der Elektronen hinsichtlich der Übernahme der Energie von einem Atompartner zum anderen besorgt die Wechselwirkung jedes der Elektronen mit dem elektromagnetischen Feld. Dabei ergibt sich, daß diese Koppelung gerade für die von der klassischen Elektrodynamik geforderten Interferenzen maßgebend ist.

Nachdem wir vorhin nach der Seite der großen Dichten eine Grenze für unsere Überlegungen angegeben haben, müssen wir auch den Dichtebereich nach der Seite der kleineren Werte der Dichte abgrenzen: Sobald von Stößen geredet werden kann, hören unsere Überlegungen auf, sinnvoll zu sein. Zahlenmäßig ist zu sagen, daß nach unten hin die Grenze für „Leuchtelektronen“ bei etwa 3 bis 3,5 Å liegen dürfte, nach oben hin bei etwa 1000 Å, d. h. etwa bei mittleren Abständen, bei denen weniger als 1 Atom auf einen Wellenlängenkubus der zugeordneten Strahlung entfällt. Die Dichten, denen diese Abstände entsprechen, finden sich im Druckbereich von 0,1 bis  $10^3$  Atm., also eigentlich die praktisch am häufigsten vorkommenden.

Die besonderen Phänomene, die als Folge des Zusammenwirkens dicht gepackter gleichartiger Atome zu erwarten sind, werden naturgemäß am deutlichsten zutage treten bei geordneter Anordnung der Atome. Denn nur hier sind Richtungsanomalien der Ausstrahlung zu erwarten, während im Falle ungeordneter Lage lediglich die Rückwirkungen der Ausstrahlungsbedingungen auf die Spektrallinien, d. h. Verschiebung und Verbreiterung zu beobachten sein werden. Wir werden den zweiten Punkt in einer folgenden Arbeit behandeln und uns hier auf die Untersuchung des geordneten Falles beschränken.

Was nun unsere Ergebnisse anbelangt, so können wir zeigen, daß jede Atomlinie eine charakteristische Verschiebung hat, die daher rührt, daß die Wechselwirkung der Atome untereinander verschieden ist, je nachdem, ob alle Teilchen unangeregt oder einige von ihnen angeregt sind. Auch ergibt sich, daß die Ausstrahlung der verschobenen Linie im wesentlichen vom gleichen  $f$ -Wert reguliert wird wie früher, nur daß dieser  $f$ -Wert in sehr charakteristischer Weise durch einen Faktor verändert wird, der nur von der geometrischen Anordnung der Teilchen zueinander abhängt. Für

regelmäßig und linear angeordnete Atome oder Moleküle findet man, daß Ausstrahlung praktisch nur in Richtungen senkrecht zur Figurenachse und dort mit großer Intensität stattfindet. Es kommt dies daher, daß die Strahlung durch die geometrische Anordnung der Atome in fast allen Richtungen durch Interferenz ausgelöscht wird und dann mit großer Intensität in den genannten Richtungen zum Vorschein kommt. Dieser Effekt wird allerdings durch die Einwirkung der Wärme bedeutend gemildert.

Man kommt auf diese Weise dazu, jeder Strahlungsrichtung einen eigenen  $f$ -Wert zuzuordnen. Dies ist zwar unüchlich, liegt aber ganz in der Richtung der quantentheoretischen Überlegungen auch des Einatomproblems. Zwar wird bei vollständig kugelsymmetrischen Atomen eine solche Unterscheidung nicht notwendig sein, aber schon bei Atomen oder Molekülen mit nicht kugelsymmetrischer Ladungsverteilung muß ein solcher Unterschied gemacht werden, wie man sich unschwer überlegt. Denn die Ausstrahlung in einer bestimmten Richtung mit dem Richtungskosinus  $\alpha, \beta, \gamma$  wird bestimmt durch das Quadrat des absoluten Betrages der Impulsmatrix

$$|\alpha p_{n,m}^{(x)} + \beta p_{n,m}^{(y)} + \gamma p_{n,m}^{(z)}|^2$$

und dies ist eine Funktion von  $\alpha, \beta, \gamma$ , wenn  $p_{n,m}^{(x)}; p_{n,m}^{(y)}; p_{n,m}^{(z)}$  nicht miteinander übereinstimmen. Solche Richtungsverschiedenheiten können sogar experimentell nachgewiesen werden, wenn man die betreffenden Atome durch ein Feld zwingt, sich entsprechend zu orientieren.

Die Verbreiterung der Linie ergibt sich als natürliche Linienbreite zu der neuen, während der aus der Theorie eines Atoms bekannte Zusammenhang zwischen natürlicher Linienbreite und Übergangswahrscheinlichkeit erhalten bleibt. So kann es vorkommen, daß die Linienbreite einer und derselben Spektrallinie von ganz kleinen zu ganz großen Werten variiert, je nachdem in welcher Richtung man die Strahlung betrachtet. Natürlich würde ein solcher Effekt auch erst zu beobachten sein, wenn ein äußeres Feld die Komplexe in eine bestimmte Orientierung hineinbringt. Ohne ein solches wird man immer nur bestimmte Mittelwerte messen, die aber natürlich ebenfalls einen Zusammenhang zwischen der Zahl der Atome eines Komplexes und der Linienbreite ergeben. Auf diese Weise dürfte man z. B. bei den von Scheibe und Mitarbeitern entdeckten Polymerisaten ein Verfahren in die Hand bekommen, um die Zahl der Atome eines solchen Polymerisatkomplexes abzuschätzen.

Der von uns untersuchte Fall wird in der Natur realisiert sein bei einer Anordnung gleichartiger Atome oder Moleküle, bei welcher die Abstände einerseits so groß sind, daß eine Überlappung der Elektronenwolken die



Individualität der Einzeloszillatoren nicht stört und die andererseits so klein sind, daß noch eine erhebliche Zahl von Oszillatoren auf eine Wellenlänge entfallen. Wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, sind diese Strecken durch diese Bedingungen nur im relativen Maßstabe festgelegt. Es kommt in Wirklichkeit immer auf das Verhältnis der linearen Ausdehnung der Elektronenwolke zu dem Abstand bzw. der Wellenlänge zu dem Abstand an. Für das Gebiet der sichtbaren Strahlung und der äußeren Elektronen, bei denen die Wellenlänge einige  $1000 \text{ \AA}$ , die Ausdehnung der Elektronenwolken  $1,5$  bis  $3 \text{ \AA}$  beträgt, falls die Terme die Grundterme der Atome sind, dürften damit die oben angeführten zahlenmäßigen Abstandsgrößen herauskommen.

Ein experimentelles Beispiel für das sichtbare Gebiet stellen anscheinend, wie ebenfalls bereits erwähnt, die von G. Scheibe und Mitarbeitern<sup>1)</sup> untersuchten Polymerisate dar. Hier kann man in der Tat nicht nur die Verbreiterung der Linie, sondern auch die Richtungsverteilung der Strahlung beobachten, da sich diese Substanzen wegen ihrer sehr stark anisotropen Zähigkeitseigenschaften durch mechanische Behandlung leicht zu einem hohen Grad ausrichten lassen. Eine Besonderheit dieser Stoffe ist allerdings, daß die Linie, die charakteristisch die Eigenschaften durch die Nachbarn beeinflussten Ausstrahlung aufweist, dem einzelnen Molekül fehlt. Man muß also wohl annehmen, daß durch den regelmäßigen Zusammentritt der Moleküle ein Auswahlverbot aufgehoben wird, welches für das einzelne Molekül das Vorkommen dieser Absorptionslinie verhindert. Der Mechanismus der Anregung dieser Linie kann sowohl durch Einstrahlung in diese selbst, wie auch durch Einstrahlung in die Eigenabsorption des Moleküls hervorgerufen werden. Der letztere Fall entspricht durchaus den von uns beschriebenen Bedingungen. Der erste Fall ist mehr als Resonanzfluoreszenz zu bezeichnen, doch dürften zwischen den beiden keine nennenswerten Unterschiede bestehen.

Vor einer Reihe von Jahren hat Weisskopf<sup>2)</sup> in einer umfassenden Untersuchung der Eigenschaften der Resonanzfluoreszenz auch den uns hier interessierenden Fall behandelt. Er beschränkt sich von vornherein auf linear regelmäßige Ketten bei Einstrahlung der Resonanzlinie des einzelnen Atoms. Das Resultat, das er hierbei erhielt, war unserer Meinung nach nicht recht befriedigend, insofern, als trotz einer sehr intensiven

---

<sup>1)</sup> Naturwissensch. **25**, 474, 1937; **26**, 412, 1938; **27**, 499, 1939; ZS. f. angew. Chem. **50**, 51 u. 218, 1937, Kolloid-ZS. **82**, 1, 1938; ZS. f. wiss. Photogr. **38**, 1, 1939; Angew. Chem. **52**, 631, 1939; Ber. phys.-med. Ges. Würzburg, **63**, 15, 1939; ZS. f. Elektroch. **47**, 573, 1941. — <sup>2)</sup> V. Weisskopf, Ann. d. Phys. (5) **9**, 23, 1931.

Wechselwirkung für die einzelnen Atome untereinander in der Formel für die Linienverbreiterung die Beeinflussung durch die große Zahl der Atome wieder herausfällt und die Linie praktisch nur die Breite der des einzelnen Atoms besaß. Wir wollen hier nicht untersuchen, wodurch diese Diskrepanz zustande gekommen ist, nur möchten wir darauf hinweisen, daß bei der von uns angestellten, von der Weisskopfschen abweichenden Art der Behandlung dieses Problems, das sicher viel plausible Resultat herauskommt, daß tatsächlich die Verbreiterung der Linie durch die Gesamtzahl der beteiligten gleichartigen Atome, oder besser unter Berücksichtigung der Wärmebewegung durch einen nennenswerten Bruchteil derselben bestimmt wird.

### 1. Herleitung der Wahrscheinlichkeit eines Elektronensprunges in einem Ensemble gleichartiger Atome.

Unser Problem als Problem der Wechselwirkung zwischen vielen Teilchen ist ein  $N$ -Körperproblem, wo  $N$  die Zahl der überhaupt vorhandenen Atome ist. Wir wenden uns zunächst der Aufstellung der Differentialgleichung zu, wobei wir die Koppelung mit dem Strahlungsfeld zu berücksichtigen haben. Der Grundzustand werde durch den Index 0 an den Eigenfunktionen, der erste Anregungszustand durch den Index 1 bezeichnet. Wir werden also im folgenden aus einer unendlichen Folge von Eigenfunktionen  $\psi_0, \psi_1, \psi_2 \dots$  nur die beiden Eigenfunktionen  $\psi_0(xyz)$  und  $\psi_1(xyz)$  benutzen. Die Größen  $\psi_i$  seien überdies die Eigenlösungen der Schrödingerschen Differentialgleichung

$$H\psi = E\psi; \quad H = -\frac{\hbar^2}{8\pi^2 m} \Delta + \Phi(xyz). \quad (1)$$

Die Energieterme  $E_0, E_1, E_2 \dots$  sind als bekannt anzusehen.  $\Phi(xyz)$  ist die Wechselwirkungsenergie zwischen dem Atomrumpf und dem Leuchtelektron. Aus Gründen einer einfacheren Schreibweise nehmen wir für das Folgende an, daß nur ein Leuchtelektron vorhanden ist. Das Potential  $\Phi(xyz)$  geht in großer Entfernung vom Kern in eine einfache Coulombsche Anziehung über.

Wenn wir nun das entsprechende  $N$ -Körperproblem lösen wollen, so werden wir zunächst zum Ausdruck zu bringen haben, daß die Atomkerne (bzw. deren Schwerpunkt) an verschiedenen Orten des Raumes liegen. Die Koordinaten des Schwerpunktes des  $i$ -ten Atomkernes wollen wir mit  $X_i, Y_i, Z_i$  bezeichnen, wobei dies rechtwinklige Koordinaten sein sollen, die sich auf ein einziges im Raume festliegendes Koordinatensystem be-

ziehen. Im gleichen Koordinatensystem bezeichne  $x_i, y_i, z_i$  die Koordinaten des Leuchtelektrons des  $i$ -ten Atomkernes.

Eine Eigenfunktion des  $i$ -ten Atoms wollen wir mit  $\psi_n^{(i)}(xyz)$  bezeichnen. Im folgenden werden wir es also mit den Eigenfunktionen  $\psi_0^{(i)}(xyz)$  und  $\psi_1^{(i)}(xyz)$  zu tun haben. Der obere Index  $i$  vertritt gewissermaßen eine Quantenzahl, denn nach dem in der Einleitung Gesagten, werden wir annehmen dürfen, daß

$$\int \psi_n^{(i)}(xyz) \psi_m^{(k)}(xyz) dx dy dz = 0, \quad (2)$$

wofern  $i \neq k$  ist. Wir hatten schon darauf hingewiesen, daß durch diese Annahme die Gültigkeit unserer Theorie begrenzt ist.

Die prinzipielle Ununterscheidbarkeit der Elektronen macht es unmöglich zu behaupten, daß das Elektron, das sich zur Zeit am Kern  $i$  befindet, nun auch wirklich das  $i$ -te Leuchtelektron ist. Wir müssen mit der Möglichkeit rechnen, daß gerade auch das  $k$ -te Leuchtelektron sich am  $i$ -ten Atomrumpf befindet. Einer solchen Möglichkeit tragen wir dadurch Rechnung, daß wir dann schreiben:

$$k\text{-tes Elektron am } i\text{-ten Rumpf } \psi_n^{(i)}(x_k y_k z_k) = \psi_n^{(i)}(k).$$

Unter  $H_i$  wollen wir den Operator  $H$  der Gleichung 1 verstehen, wenn in ihm die Koordinaten  $x, y, z$  durch die Koordinaten  $x_i, y_i, z_i$  des  $i$ -ten Elektrons ersetzt werden. Dann ist die Schrödingersche Differentialgleichung des Gesamtsystems gegeben durch

$$\sum_{i=1}^N H_i \Psi + U(x_1 \dots z_N) \Psi = W \Psi, \quad (3)$$

wobei das Wechselwirkungspotential  $U(x_1 \dots z_N)$  folgendes bedeutet:

$$U(x_1 \dots z_N) = e^2 \sum_{i \neq k=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(X_i - x_k)^2 + (Y_i - y_k)^2 + (Z_i - z_k)^2}} \right\}. \quad (4)$$

Der erste Summand ist das Abstoßungspotential der Elektronen. Hier steht der Faktor  $1/2$ , weil bei der Summation über  $i$  und  $k$  jede Kombination der Elektronen zweimal berücksichtigt wird. Das zweite Potentialglied ist die Anziehung jedes Elektrons durch die Atomrümpfe der fremden Atome. Die Anziehung durch die Rümpfe der eignen Atome ist ja bereits durch die Gleichung (1) in der Funktion  $\Phi(x_i y_i z_i)$  berücksichtigt. Daher sind in beiden Ausdrücken die Fälle  $i = k$  auszuschalten.

Wenn wir nun zunächst in der Differentialgleichung (3)  $U$  gleich Null setzen, so läßt sich die Lösung der so erhaltenen Differentialgleichung durch

die schon aus Gleichung (1) bekannten Eigenfunktionen  $\psi_n(xyz)$  darstellen, nämlich

$$\Psi = \prod_1^N \psi_{n_i}^{(i)}(x_i y_i z_i) = \prod_1^N \psi_{n_i}^{(i)}(i).$$

Uns interessiert aber nur der Fall, daß unter den  $N$  Atomen keines oder nur eines angeregt ist. Zu solchen Zuständen gehören ersichtlich die Eigenfunktionen

$$\prod_{i=1}^N \psi_0^{(i)}(i) \quad \text{und} \quad \psi_1^{(1)}(1) \prod_{i=2}^N \psi_0^{(i)}(i)$$

und dazu die Eigenwerte  $N \cdot E_0$  bzw.  $(N-1) \cdot E_0 + E_1$ . Diese Eigenzustände sind entartet von einem sehr hohen Entartungsgrad, denn wir können aus den eben gewonnenen Eigenfunktionen neue und offenbar mit diesen nicht identische Eigenfunktionen erhalten, indem wir die Elektronen irgendeiner Permutation unterwerfen, so z. B. wenn man Elektron 1 mit Elektron 2 vertauscht:

$$\psi_0^{(1)}(2) \psi_0^{(2)}(1) \prod_3^N \psi_0^{(i)}(i) \quad \text{bzw.} \quad \psi_1^{(1)}(2) \psi_0^{(2)}(1) \cdot \prod_{i=3}^N \psi_0^{(i)}(i).$$

Die Energiewerte, zu denen diese neuen Funktionen gehören, sind offenbar die gleichen wie oben. Man sieht, daß die Zahl der Eigenfunktionen, die man auf diese Weise für den Grundzustand erhält, gleich  $N!^1$  ist, während die Zahl der Eigenfunktionen im ersten Anregungszustand  $N \cdot N!$  wird, da bereits zu einem Zustand, bei dem das  $i$ -te Atom angeregt ist,  $N!$  Eigenfunktionen gehören. Da aber jedes der  $N$  Atome angeregt sein kann, so erhalten wir also  $N \cdot N!$  Eigenfunktionen.

Wir müssen nun daran gehen, dem Problem diese Vieldeutigkeit zu nehmen. Das geht in einfachster Weise durch Anwendung des Pauli-Prinzips. Zwar können wir hier durch das Verbot äquivalenter Bahnen nicht mehr weiter kommen, da ja bereits durch unseren Ansatz dafür gesorgt ist, daß niemals zwei Teilchen sich in äquivalenten Quantenzuständen befinden. Wenn wir uns aber der gruppentheoretischen Interpretation des Pauli-Prinzips bedienen, so gibt uns dies die Möglichkeit, unter allen Funktionen eine bestimmte Linearkombination als die einzige mit dem Pauli-Prinzip verträgliche auszusondern. Wir haben hierzu in bekannter Weise nur zu verlangen, daß die Eigenfunktionen in den Elektronenkoordinaten vollständig antisymmetrisch sein sollen, d. h. daß sie sich mit dem Faktor  $-1$  multiplizieren, wenn man irgend zwei der Elektronen miteinander vertauscht.

<sup>1)</sup> Entsprechend der Zahl der Permutation von  $N$  Dingen!

Die gesuchte Linearkombination für den Grundzustand (alle Atome im Grundzustand) ist damit leicht anzugeben. Die geforderte Symmetrieeigenschaft hat die Determinante, die in folgender Weise aus den Eigenfunktionen zu bilden ist:

$$\Psi_0(x_1 \dots z_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \psi_0^{(1)}(1) & \psi_0^{(1)}(2) & \psi_0^{(1)}(3) & \dots & \psi_0^{(1)}(N) \\ \psi_0^{(2)}(1) & \psi_0^{(2)}(2) & \psi_0^{(2)}(3) & \dots & \psi_0^{(2)}(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_0^{(N)}(1) & \psi_0^{(N)}(2) & \psi_0^{(N)}(3) & \dots & \psi_0^{(N)}(N) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Dabei haben wir den Faktor  $\sqrt{N!}^{-1}$  hinzugefügt, um zu garantieren, daß die Funktion  $\Psi$  im Raume aller  $x_1 \dots z_N$  normiert ist, wenn wir voraussetzen, daß die Eigenfunktion für den Grundzustand des Einzelatoms normiert ist:

$$\int |\psi_0(xyz)|^2 dx dy dz = 1.$$

Mit Hilfe dieser Bedingung kann man unmittelbar zeigen, daß das Integral über den ganzen  $3N$ -dimensionalen Raum der Koordinaten  $x_1 \dots z_N$  für das Quadrat der in (5) angegebenen Determinante gerade gleich  $N!$  ist, nämlich gleich einer Summe aus  $N!$  Summanden, deren jeder den Wert 1 hat. Daraus ersieht man dann, daß (5) eine normierte Eigenfunktion ist.

Um nun die Eigenfunktion für den ersten Anregungszustand zu erhalten (ein Atom im ersten Anregungszustand,  $N - 1$  im Grundzustand) ersetzen wir in der Determinante von (5) die  $i$ -te Kolonne durch

$$\psi_1^{(1)}(i) \psi_1^{(2)}(i) \psi_1^{(3)}(i) \text{ usw.}$$

und nennen die so entstehende neue Determinante  $A_i$ :

$$A_i = \begin{vmatrix} \psi_0^{(1)}(1) & \dots & \psi_1^{(1)}(i) & \dots & \psi_0^{(1)}(N) \\ \psi_0^{(2)}(1) & \dots & \psi_1^{(2)}(i) & \dots & \psi_0^{(2)}(N) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \psi_0^{(N)}(1) & & \psi_1^{(N)}(i) & & \psi_0^{(N)}(N) \end{vmatrix} \quad (6)$$

Wenn wir nun in  $A_i$  das  $r$ -te mit dem  $s$ -ten Elektron vertauschen, wobei  $r \neq s \neq i$  ist, so geht dabei, wie man leicht sieht,  $A_i$  in  $-A_i$  über. Betrachten wir aber bei der Vertauschung des  $r$ -ten mit dem  $s$ -ten Elektron die Determinante  $A_r$ , so erkennt man leicht, daß diese bei der fraglichen Vertauschung in  $-A_s$ , und entsprechend  $A_s$  in  $-A_r$  übergeht. Daraus aber folgt sofort, daß die Funktion

$$\Psi_1(x_1 \dots z_N) = (N \cdot N!)^{-1/2} \cdot \sum_{i=1}^N A_i \quad (7)$$

der geforderten Bedingung genügt. Darüber hinaus erkennt man aber, daß auch für die Atomkerne (gekennzeichnet durch den oberen Index der



$\psi$ -Funktionen) die entsprechende Symmetriebedingung erfüllt ist. Vertauscht man nämlich zwei Atomkerne miteinander, so wird in jeder der Determinanten  $A_i$  eine Zeile mit einer anderen vertauscht, und das hat einen Vorzeichenwechsel in jeder der Determinanten  $A_i$  zur Folge. Damit ist gezeigt, daß bei unserem Ansatz auch die Kerne automatisch der Fermi-Statistik genügen. Hierdurch wird zum Ausdruck gebracht, daß die Atomkerne ebenso wie die Elektronen ihre Individualität eingebüßt haben, und daß nur noch die Zahl der angeregten und unangeregten Atome Bedeutung besitzt.

Es läßt sich zeigen, daß  $\Psi_1$  orthogonal<sup>1)</sup> zu  $\Psi_0$  ist. Dazu ist nur zu beachten, daß jede der Determinanten  $A_i$  orthogonal zu  $\Psi_0$  ist. Dies folgt daraus, daß das Produkt aus  $\Psi_0$  und irgendeinem  $A_i$  in Summanden zerlegt werden kann, deren jeder den Faktor

$$\psi_1^{(m)*}(i) \psi_0^{(n)}(i)$$

hat, wobei der zweite Faktor jedes der Summanden die Koordinaten des  $i$ -ten Elektrons nicht mehr enthält. Bei der Integration über alle  $x_1 \dots z_N$  kann man daher die Integration über  $x_i, y_i, z_i$  abspalten und erhält dann als Faktor für jeden der Summanden einen Ausdruck der Form

$$\int \psi_1^{(m)*}(i) \psi_0^{(n)}(i) dx_i dy_i dz_i$$

und ein solches Integral ist gemäß unserer Annahme Gl. (2) Null.

Wir haben vor die  $\sum_{i=1}^N A_i$  den Faktor  $\sqrt{N \cdot N!}^{-1}$  gesetzt, der Normierungszwecken dient. Daß dieser richtig ist, sieht man so ein: Ganz entsprechend wie eben beweist man, daß das Integral

$$\int A_i^* A_k d\tau = 0, \quad d\tau = dx_1 \dots dz_N$$

verschwindet, wenn  $i \neq k$  ist. Für  $i = k$  hat das Integral den Wert  $N!$  Um das zu zeigen, denke man sich die Determinante in ihre  $N!$  Einzelsummanden zerlegt, die alle die Form  $\pm \psi^{(k_1)}(1) \cdot \psi^{(k_2)}(2) \dots \psi^{(k_N)}(N)$  haben, wo  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_N$  der Reihe nach alle Permutationen von  $1, 2, 3, \dots, N$  durchläuft und das  $+$ - oder  $-$ -Zeichen gilt, je nachdem die Permutation gerade oder ungerade ist. Der untere Index ist einmal 1 und  $(N-1)$ mal Null. Wenn nun bei der Bildung von  $|A_i|^2$  zwei Faktoren

$$\psi^{k_1^*}(1) \psi^{k_2^*}(2) \dots \psi^{k_N^*}(N) \quad \text{und} \quad \psi^{l_1}(1) \psi^{l_2}(2) \dots \psi^{l_N}(N)$$

<sup>1)</sup> Orthogonal bedeutet: komplex orthogonal  $\int \Psi_1^* \Psi_0 d\tau = 0!$



zusammenkommen, bei denen  $k_1, k_2, \dots, k_n$  und  $l_1, l_2, \dots, l_N$  verschiedene Permutationen der Zahlenreihe  $1, 2, \dots, N$  bedeuten, so verschwinden diese wegen Gl. (2). Übrigbleiben nur die  $N!$  Produkte mit gleichen Permutationen und diese geben jedes den Wert 1, insgesamt also  $N!$ . Nun gibt es aber  $N$  Summanden  $|A_i|^2$  und daher ergibt sich der Faktor  $N \cdot N!$ , so daß sich also die Funktion (7) als auf 1 normiert erweist.

Mit Hilfe der Eigenfunktionen  $\Psi_1$  und  $\Psi_0$  bilden wir die Matrixelemente der Wechselwirkungsenergie für die Atome untereinander unter Benutzung der Funktion  $U$  [Gleichung (4)]:

$$\left. \begin{aligned} U_{10} &= \int \Psi_1^* U \Psi_0 d\tau = U_{01}^*, \\ U_{11} &= \int \Psi_1^* U \Psi_1 d\tau, \\ U_{00} &= \int \Psi_0^* U \Psi_0 d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wir müssen jetzt dazu übergehen, die Matrixelemente zu berechnen, die die Verknüpfung unseres Atomensembles mit dem elektromagnetischen Feld beschreiben. Dazu denken wir uns die Strahlung des leeren Raumes durch Fourier-Analyse zerlegt und schreiben die für eine ebene Welle gültigen Komponenten des Vektorpotentials  $\mathfrak{A}$  an, wobei wir das skalare Potential gleich Null setzen und dementsprechend das Vektorpotential der Bedingung  $\text{div } \mathfrak{A} = 0$  unterwerfen. Für eine bestimmte Frequenz  $\nu_q$  erhalten wir<sup>1)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A}_{k'_q} &= 2a_1 \cdot c \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\nu_q V}} \sin 2\pi (k_q \cdot \mathbf{r} - \nu_q \cdot t + \vartheta_q^{(1)}), \\ \mathfrak{A}_{k'_q} \times k_{q-} &= -2a_2 c \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\nu_q V}} \sin 2\pi (k_q \cdot \mathbf{r} - \nu_q t + \vartheta_q^{(2)}). \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Hierbei bedeutet  $k$  den Ausbreitungsvektor der ebenen Welle und es ist  $k_q^2 = \frac{\nu_q^2}{c^2}$ ,  $k'_q$  soll ein Vektor senkrecht zu  $k_q$  sein und  $\mathfrak{A}_{k'_q}$  ist die Komponente von  $\mathfrak{A}$  in der Richtung von  $k'_q$ . Entsprechend ist  $\mathfrak{A}_{k'_q} \times k_q$  die Komponente von  $\mathfrak{A}$  in der Richtung senkrecht zu  $k_q$  und  $k'_q$ .  $V$  ist das Volumen eines Hohlraumes, in den wir zum Zwecke einfacherer mathematischer Formulierung das System Atome + Strahlung eingeschlossen denken.  $V$  ist nicht identisch mit dem Volumen, das den Atomen zur Verfügung steht.

Die Wechselwirkungsenergie ist in der üblichen Näherung für ein Elektron und Lichtquantenfeld durch den Ausdruck

$$U_{EF} = \frac{e}{m \cdot c} \mathbf{p} \cdot \mathfrak{A}$$

<sup>1)</sup> Vgl. P. A. M. Dirac, Proc. Royal Soc. (A) 114, 243, 1927.

gegeben, wobei für  $\mathfrak{A}$  die obigen Ausdrücke einzusetzen sind.  $\mathbf{p}$  ist der Impulsvektor des Elektrons. Schließlich hat man dann noch über alle Frequenzen des Hohlraumes zu summieren.

Wenn nun, wie bei uns, mehrere Elektronen vorhanden sind, so ist für jedes Elektron ein solches Wechselwirkungsenergieglied zu berücksichtigen, wobei ein jedes Funktion der Koordinaten eines Elektrons wird. Wir haben also folgende Wechselwirkung in Ansatz zu bringen:

$$U_{EF} = \frac{e}{mc} \sum_{\sigma=1}^N \mathfrak{A}(\sigma) \mathbf{p}(\sigma), \quad (10)$$

wobei  $\mathfrak{A}(\sigma)$  bedeuten soll, daß das Vektorpotential in den Koordinaten des  $\sigma$ -ten Elektrons geschrieben ist und  $\mathbf{p}(\sigma) = \frac{\hbar}{2\pi i} \left( \frac{\partial}{\partial x_\sigma}; \frac{\partial}{\partial y_\sigma}; \frac{\partial}{\partial z_\sigma} \right)$  bedeutet. Die Summe über alle Elektronen garantiert dann, daß keines der Elektronen vor den anderen bevorzugt ist.

Bei der quantentheoretischen Umdeutung des Vektorpotentials ist zu beachten, daß nicht nur die Koordinaten der Elektronen, sondern auch die Bestimmungsstücke des elektromagnetischen Feldes eingehen. Diese berücksichtigen wir am einfachsten dadurch, daß wir die in dem Vektorpotential  $\mathfrak{A}(\sigma)$  auftretenden Ausdrücke  $a_j e^{\pm 2\pi i (\nu_e t - \vartheta_e^{(j)})}$  ersetzen durch die Matrizen

$$\eta_e^{(j)} = \sqrt{n_e^{(j)} + 1} \left\{ \delta_{n_0^{(j)} n_0^{(j)'}} \cdot \delta_{n_1^{(j)} n_1^{(j)'}} \cdots \delta_{n_e^{(j)} n_e^{(j)'} - 1} \cdots \delta_{n_\mu^{(j)} n_\mu^{(j)'}} \cdots \right\}$$

und entsprechend  $a_j e^{-2\pi i (\nu_e t + \vartheta_e^{(j)})}$  durch

$$\eta_e^{(j)+} = \sqrt{n_e^{(j)}} \left\{ \delta_{n_0^{(j)} n_0^{(j)'}} \cdot \delta_{n_1^{(j)} n_1^{(j)'}} \cdots \delta_{n_e^{(j)} n_e^{(j)'} + 1} \cdots \delta_{n_\mu^{(j)} n_\mu^{(j)'}} \cdots \right\}$$

Hier bedeutet  $\delta_{n, n'}$  in bekannter Weise Null, wenn  $n \neq n'$  und 1, wenn  $n = n'$  ist. Die komplexen Zahlen  $a_j e^{\pm 2\pi i (\nu_e t - \vartheta_e^{(j)})}$  werden damit also durch zwei nichthermitesche Matrizen  $\eta_e^{(j)}$  und  $\eta_e^{(j)+}$  ersetzt, von denen die erste nur oberhalb, die zweite nur unterhalb der Hauptdiagonalen je eine Nebendiagonale mit nicht verschwindenden Elementen hat.

Wir haben nunmehr die Matrixelemente zu berechnen, die der Wechselwirkungsenergie  $U_{EF}$  entsprechen. Die Matrixelemente  $(U_{EF})_{n, m}$  ergeben sich in bekannter Weise mit Hilfe der Wellenfunktionen des Gesamtsystems  $\Psi_i(x_1, \dots, x_N)$  durch das folgende Integral

$$(U_{EF})_{n, m} = \int \Psi_m^* U_{EF} \Psi_n d\tau, \quad (11)$$

wobei  $U_{EF}$  nunmehr die Bedeutung

$$U_{EF} = \frac{e}{im} \sum_{\sigma} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\nu_{\sigma}V}} \cdot \left\{ \eta_{\sigma}^{(1)} \cdot \sum_{\sigma} e^{2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{\sigma\sigma}} - \right. \\ \left. - \eta_{\sigma}^{(1)+} \sum_{\sigma} e^{-2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{\sigma\sigma}} + \right. \\ \left. + \eta_{\sigma}^{(2)} \sum_{\sigma} e^{2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k''_{\sigma\sigma}} - \right. \\ \left. - \eta_{\sigma}^{(2)+} \sum_{\sigma} e^{-2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k''_{\sigma\sigma}} \right\} \quad (12)$$

hat.  $\frac{\partial}{\partial k'_{\sigma\sigma}}$  bezeichnet

$$\frac{1}{|k'_{\sigma}|} \cdot \left( k'_{\sigma x} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} + k'_{\sigma y} \frac{\partial}{\partial y_{\sigma}} + k'_{\sigma z} \frac{\partial}{\partial z_{\sigma}} \right)$$

wo  $k'_{\sigma}$  der in Gleichung (9) eingeführte auf  $k_{\sigma}$  senkrecht stehende Vektor ist, entsprechend bezeichnet

$$\frac{\partial}{\partial k''_{\sigma\sigma}} = \frac{1}{|k_{\sigma} \times k'_{\sigma}|} \cdot \left[ (k_{\sigma} \times k'_{\sigma})_x \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} + (k_{\sigma} \times k'_{\sigma})_y \frac{\partial}{\partial y_{\sigma}} + (k_{\sigma} \times k'_{\sigma})_z \frac{\partial}{\partial z_{\sigma}} \right].$$

Man erkennt sofort, daß die Matrixelemente  $(U_{EF})_{n,m}$  ihrerseits noch Funktionen der auf das elektromagnetische Feld bezüglichen Matrizen  $\eta_{\sigma}^{(j)}$  und  $\eta_{\sigma}^{(j)+}$  sind.

Für das Folgende berechnen wir lediglich die beiden Matrixelemente  $(U_{EF})_{01}$  und  $(U_{EF})_{10}$ , wobei zu beachten ist, daß das eine Element in das andere übergeht, wenn wir  $i$  durch  $-i$  und  $\eta$  durch  $\eta^+$  ersetzen. Es genügt daher nur z. B.  $(U_{EF})_{10}$  zu berechnen. Für dieses gilt also [Gl. (5), (6) und (7)]

$$(U_{EF})_{10} = \frac{1}{N! \sqrt{N}} \int D^* U_{EF} \cdot \sum_i A_i d\tau; \quad D = \sqrt{N!} \Psi_0(x_1 \dots z_N).$$

Hier betrachten wir nur ein einziges Glied der Summe über  $\sigma$  in  $U_{EF}$ , z. B. das Glied für  $\sigma = t$

$$e^{2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{\sigma t}}$$

und bilden

$$\frac{1}{N! \sqrt{N}} \int D^* e^{2\pi i(k_{\sigma}\tau_{\sigma})} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{\sigma t}} \cdot A_m d\tau.$$

Jetzt entwickeln wir die Determinante  $D^*$  sowie auch die Determinante  $A_m$  nach der  $m$ -ten Kolonne (wobei angenommen sei, daß zunächst  $m \neq t$  ist). So ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{N} N!} \int \sum_{\tau=1}^N \psi_0^{(\tau)*}(m) D_{\tau}^* \cdot \sum_{n=1}^N \psi_1^{(n)}(m) \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{\sigma t}} \cdot D_n dz_1 \dots dz_N.$$

Wenn wir jetzt zunächst die Integration über die Koordinaten des  $m$ -ten Elektrons ausführen, erhalten wir Integrale von der Form

$$\int \psi_0^{(\tau)*}(m) \psi_1^{(n)}(m) dx_m dy_m dz_m$$

und diese verschwinden alle, weil für die  $\psi_i^{(\epsilon)}$  eine Orthogonalität sowohl für die oberen wie für die unteren Indizes besteht.

Wir ersehen daraus, daß das einzige Glied, das von Null verschieden sein könnte, das Glied

$$\frac{1}{N! \sqrt{N}} \int D^* e^{2\pi i k_e \cdot r_t} \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{et}} A_t dx_1 \dots dz_N$$

ist. Wenn wir jetzt  $D^*$  und  $A_t$  nach der  $t$ -ten Kolonne entwickeln, ergibt sich

$$\frac{1}{N! \sqrt{N}} \cdot \sum_{\tau=1}^N \psi_0^{(\tau)*}(t) D_{\tau}^* \frac{\hbar}{2\pi i} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\partial}{\partial k'_{et}} \psi_1^{(n)}(t) \right) D_n e^{2\pi i (k_e \cdot r_t)} dx_1 \dots dz_N.$$

Die Integrale

$$\int e^{2\pi i (k_e \cdot r_t)} \psi_0^{(\tau)*}(t) \frac{\partial}{\partial k'_{et}} \psi_1^{(n)}(t) dx_t dy_t dz_t$$

mit  $\tau \neq n$  werden verschwinden, weil die Funktionen  $\psi^{(\tau)}$  und  $\psi^{(n)}$  nicht überlappen, und es bleibt daher nur

$$\frac{1}{N! \sqrt{N}} \sum_{\tau=1}^N \int e^{2\pi i (k_e \cdot r_t)} \psi_0^{(\tau)*}(t) \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial k'_{et}} \psi_1^{(\tau)}(t) dx_t dy_t dz_t \cdot \int |D_{\tau}|^2 \cdot dx_1 dy_1 dz_1 \dots dx_{t-1} dy_{t-1} dz_{t-1} dx_{t+1} dy_{t+1} dz_{t+1} \dots dx_N dy_N dz_N.$$

Die ersten über einen dreidimensionalen Raum zu erstreckenden Integrale berechnen wir folgendermaßen: Für sichtbares Licht sowie auch für praktisch das ganze Ultraviolettgebiet ist  $e^{2\pi i (k_e \cdot r)}$  als eine sehr langsam variierende Funktion anzusehen, deren Wert sich innerhalb des Gebietes, in dem die Funktionen  $\psi_0^{(\tau)}$  und  $\psi_1^{(\tau)}$  wesentlich von Null verschiedene Werte annehmen, kaum verändert. Wir können daher den Wert dieser Funktion an der Stelle des Schwerpunktes des betreffenden Atoms nehmen und diesen Wert vor das Integral setzen. Was dann von dem Integral noch übrigbleibt, ist aber eine wohlbekannte Größe, nämlich das Matrixelement zum Übergang erster Anregungszustand-Grundzustand der Impulskomponente in der Richtung  $k'_e$  des einzelnen Atoms der Nummer  $\tau$ :

$$(p_{k'_e})_{10} = \frac{\hbar}{2\pi i} \cdot \int \psi_0^{(\tau)}(t) \frac{\partial}{\partial k'_{et}} \psi_1^{(\tau)}(t) dx_t dy_t dz_t, \quad (18)$$

so daß also der letzterhaltene Ausdruck in den folgenden übergeht, wenn man beachtet, daß das Matricelement  $(p_{k'_q})_{10}$  für jedes der vorhandenen Atome den gleichen Wert hat:

$$\frac{1}{N! \sqrt{N}} (p_{k'_q})_{10} \sum_{\tau=1}^N e^{2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}_0^{(\tau)})} \cdot \int |D_\tau|^2 dx_1 \dots dz_{t-1} \dots dx_{t+1} \dots dz_N.$$

Hier bedeutet  $\mathfrak{R}^{(m)}$  den Vektor, der von einem festgegebenen Nullpunkt zum Schwerpunkt des  $m$ -ten Atoms weist.

Die noch übrigbleibenden Integrale über einen  $3N - 3$ -dimensionalen Raum lassen sich leicht auswerten. Hierzu bemerke man nur, daß die Größe  $D_n$  aus der Determinante  $D$  durch Streichung der  $t$ -ten Kolonne und der  $n$ -ten Zeile hervorgehen ( $t$  war in unserer Betrachtung ausgezeichnet, weil wir aus der  $U_{EF}$  darstellenden Summe nur ein Glied, das für  $\sigma = t$  ausgewählt hatten. Wir haben nachträglich noch über  $t$  von 1 bis  $N$  zu summieren). Die Determinanten  $D_\tau$  haben damit den gleichen Charakter wie  $D$  selber, nur daß die Zahl der Zeilen und Kolonnen nicht  $N$ , sondern  $N - 1$  beträgt. In der gleichen Weise wie früher bei dem Integral

$$\int |D|^2 dx_1 \dots dz_N = N!$$

können wir jetzt schließen, daß jedes der Integrale über  $|D_\tau|^2$  den Wert  $(N - 1)!$  liefert. So erhalten wir schließlich

$$N^{-3/2} \cdot (p_{k'_q})_{10} \cdot \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}^{(n)})}.$$

In diesem Ausdruck ist nun nichts mehr enthalten, was auf die Auszeichnung der Zahl  $t$  hinweist. Wenn wir also die angekündigte Summation über  $t$  ausführen, liefert diese nur noch den Faktor  $N$  und wir erhalten schließlich

$$(U_{EF})_{10} = \frac{e}{i m} N^{-1/2} \sum_q \sqrt{\frac{h}{2\pi v_q V}} \cdot \left\{ \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}^{(n)})} [\eta_q^{(1)} (p_{k'_q})_{10} + \eta_q^{(2)} (p_{k''_q})_{10}] - \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}^{(n)})} [\eta_q^{(1)+} \cdot (p_{k'_q})_{10} + \eta_q^{(2)+} \cdot (p_{k''_q})_{10}] \right\}. \quad (14)$$

Entsprechendes für  $(U_{EF})_{01}$ . Hier bedeutet entsprechend  $(p_{k'_q})_{10}$  das Matricelement von der Impulskomponente des Einzelatoms in Richtung des Vektors  $k''_q = k'_q \times k_q$ . Damit haben wir den Übergang unseres aus  $N$  gleichartigen Atomen bestehenden Ensembles vom Zustand: ein Atom angeregt,  $N - 1$  Atome nicht angeregt zum Zustand: alle Atome unangeregt zurückgeführt auf diejenige Größe, die die entsprechende Übergangswahrscheinlichkeit beim einzelnen isolierten Atom bestimmt. Da die Größe  $|(p_{k'_q})_{10}|^2$  proportional zum  $f$ -Wert des Resonanzüberganges des einzelnen

Atoms ist, so kann man sagen, daß für den Übergang des betrachteten Atomensembles vom Energiezustand  $E_1 + (N - 1) E_0$  zum Grundzustand  $NE_0$  ein  $f$ -Wert zugrunde zu legen ist, der sich aus dem  $f$ -Wert des Einzelüberganges berechnet, indem man noch den Faktor

$$\Gamma = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (k_e \cdot \mathfrak{R}^{(n)})} \right|^2 \quad (15)$$

hinzufügt. Wenn man den gleichen Tatbestand für die Matrixelemente, die einem solchen Übergang zugeordnet sind, auszusprechen wünscht, so hat man zu sagen, daß das Matrixelement eines solchen Überganges gegeben ist durch

$$P_{n,m}^{(e)} = N^{-1/2} \cdot \sum_{n=1}^N e^{2\pi i (k_e \cdot \mathfrak{R}^{(n)})} \cdot p_{n,m}, \quad (16)$$

wo  $p_{n,m}$  das Matrixelement des entsprechenden Überganges am einzelnen Atom bedeutet.

Die  $f$ -Wertebestimmungen werden durch Beobachtungen an verdünnten Gasen durchgeführt; diese können daher nach den vorhergehenden Ausführungen nur dann berechtigt sein und nur zuverlässige Kenntnis der Übergangswahrscheinlichkeiten am einzelnen Atom vermitteln, wenn sich zeigen läßt, daß der zusätzliche Faktor (15) im  $f$ -Wert für verdünnte Gase den Wert 1 annimmt.

Offensichtlich hat der Wert (15) für Gase und auch für Flüssigkeiten nur dann eine unmittelbare Bedeutung, wenn man ihn über lange Zeiten oder, was dasselbe ist, für alle möglichen Anordnungen der Atome im Raume mittelt. Wir wollen diese Mittelung ausführen unter der Annahme, die Dichte des Gases sei derart gering, daß im Mittel nur ein Teilchen entfällt auf ein Raumgebiet von der Größe eines Würfels mit der Kantenlänge  $\lambda$ , wo  $\lambda$  die Wellenlänge des emittierten Lichtes ist. Innerhalb eines solchen Wellenlängenkubus kann das vorhandene Teilchen im Mittel natürlich jeden beliebigen Raumpunkt einnehmen. Schreiben wir nun die Größe (15) folgendermaßen:

$$\frac{1}{N} \left\{ \sum_{n=1}^N 1 + \sum_{n,m=1}^N \cos[2\pi k_e (\mathfrak{R}^{(n)} - \mathfrak{R}^{(m)})] \right\},$$

so erkennt man sofort, daß unter den gemachten Voraussetzungen die  $\cos$ -Funktionen im Laufe der Zeit alle positiven und negativen Werte zwischen 1 und  $-1$  annehmen werden und sich im Mittel wegheben. Es bleibt daher von der ganzen Summe nur die Größe  $\sum 1 = N$  stehen, die sich gegen das  $N$  im Nenner wegekürzt; damit ergibt sich, wie erwartet, daß der Wert



des Ausdrucks (15) für geringe Dichten gleich 1 wird. Auch folgt daraus, daß die Dichte so klein sein muß, daß höchstens ein Atom pro Wellenlängen kubus vorhanden ist. Größere Dichten können die Bestimmung des  $f$ -Wertes für das Einzelatom erheblich verfälschen. Es folgt daraus, daß derartige Bestimmungen für sichtbare Strahlung bei Dichten von höchstens  $10^{13}$  Teilchen pro  $\text{cm}^3$  vorgenommen werden dürfen. In allen anderen Fällen müßte durch Berechnung des Ausdrucks (15) geprüft werden, ob man noch mit hinreichender Genauigkeit den  $f$ -Wert des Atoms oder schon den  $f$ -Wert eines Atomensembles bestimmt hat.

An die Gleichungen (15) und (16) werden nun alle wesentlichen Schlußfolgerungen zu knüpfen sein. Diese jedoch werden sehr verschieden ausfallen, je nachdem die Atome regelmäßig oder unregelmäßig angeordnet sind. Bei unregelmäßiger Anordnung müssen die Ausdrücke (15) bzw. (16) uns Aufschluß geben über die Linienbreite eines dichten Gases bzw. eines van der Waalsschen Kondensates. Im anderen Falle der geordneten Atomgesamtheit müssen wir Aufschluß erhalten über Strahlungseigenschaften von Polymerisaten eines Baues, wie sie von Scheibe und Mitarbeitern hergestellt und beschrieben worden sind.

Da die Berechnung der Größe (15) bzw. (16) für den ungeordneten Fall erheblichen Aufwand erfordert, wollen wir uns in dieser Arbeit auf den Fall geordneter Atomgesamtheiten beschränken und diese berechnen. Für derartige Gesamtheiten leiten wir zunächst den Zusammenhang zwischen der Linienbreite und dem Ausdruck (16) her.

## 2. Die Strahlungseigenschaften einer Atomgesamtheit.

Ogleich wir uns im Rahmen dieser Untersuchungen zunächst nur für geordnete Gesamtheiten interessieren, wollen wir doch die Fortführung unserer Überlegungen möglichst allgemein gestalten und von den Vereinfachungen, die die eingeführte Beschränkung zur Folge hat, sparsamen Gebrauch im Hinblick auf spätere Anwendungsmöglichkeiten machen. Dies gilt insbesondere für die Herleitung der natürlichen Linienbreite eines Atomensembles, der wir uns jetzt zuwenden.

Wir betrachten die Wechselwirkung zwischen unserem Atomensemble und dem elektromagnetischen Felde. Die Quantenzahl des elektromagnetischen Feldes sind, wie üblich, die ganzen Zahlen  $n_k$ , die angeben, wieviel Lichtquanten mit der Frequenz  $\nu_k$  vorhanden sind. Dann setzt sich die Energiefunktion für das gesamte System: elektromagnetisches Feld + Atomensemble zusammen aus der Anregungsenergie der einzelnen Atome, der Wechselwirkungsenergie der Atome untereinander, der Eigen-

energie des elektromagnetischen Feldes sowie der Wechselwirkungsenergie zwischen dem elektromagnetischen Felde und dem Atomensemble.

Die Eigenenergie der Atome ist gegeben durch

$$[\sum N_i \varepsilon_i + N \cdot E_0] \delta_{n_1 n'_1} \cdot \delta_{n_2 n'_2} \dots \delta_{n_q n'_q} \dots, \quad (17)$$

wo  $\varepsilon_i = E_i - E_0$  die verschiedenen Energiestufen des Einzelatoms sind (gerechnet vom untersten Energiezustand aus) und die  $N_i$  die Besetzungszahlen der einzelnen Energiestufen bedeuten, so daß  $\sum_i N_i = N$  zu gelten hat. Die Größe  $N \cdot E_0$  ist die Nullpunktsenergie der Atomgesamtheit. Die Zahlen  $N_i$  fungieren als Quantenzahl derselben, während die Faktoren  $\delta_{n_q n'_q}$  der Abhängigkeit von den Zahlen der Lichtquanten des äußeren Feldes Rechnung tragen. Durch diese Faktoren wird zum Ausdruck gebracht, daß eine Größe, die nur Bedeutung für das Atomensemble hat, irgendeine Funktion, die sich auf das elektromagnetische Feld bezieht, ungeändert lassen muß.

Da der Zustand unserer Atomgesamtheit durch die Angabe der Zahlen  $N_i$  völlig bestimmt ist, so müssen auch die Eigenfunktionen als Indizes diese Quantenzahlen haben und eine Eigenfunktion wird daher so zu schreiben sein:

$$\Psi_{N_0 N_1 N_2 \dots} (x_1 \dots z_N).$$

Für den Fall, daß  $N_0 = N - 1$ ,  $N_1 = 1$ , alle übrigen  $N_i = 0$  sind, haben wir die Eigenfunktion angegeben [Gleichung (7)] und an die Stelle der Zahlen  $N - 1, 1, 0, 0, \dots$  einfach das Symbol 1 geschrieben. Ebenso ist in Gleichung (5) die Eigenfunktion angegeben, die zum Grundzustand ( $N_0 = N$ ,  $N_1 = 0$ ,  $N_2 = 0 \dots$ ) gehört und mit dem Index 0 versehen. Für die Matricelemente, die die Wechselwirkung der Atome untereinander angeben, haben wir daher unter Benutzung der Funktion  $U(x_1 \dots z_N)$  aus Gleichung (4) zu schreiben:

$$U_{N_0' N_1' \dots n_0 n_1 n_2 \dots | N_0' N_1' \dots n_0' n_1' n_2' \dots} = \int \Psi_{N_0' N_1' N_2'} U \Psi_{N_0 N_1 N_2} d\tau \cdot \delta_{n_0 n_0'} \delta_{n_1 n_1'} \dots \quad (18)$$

Die Eigenenergie des elektromagnetischen Feldes hat natürlich die Form

$$(\sum n_i h \nu_i) \cdot \delta_{N_0 N_0'} \delta_{N_1 N_1'} \delta_{N_2 N_2'} \dots \quad (19)$$

wobei nunmehr die Abhängigkeit von den Quantenzahlen der Atomgesamtheit die triviale  $\delta$ -Form hat. Die auftretende Summe kann, wenn die Frequenzen sehr dicht liegen, durch das Integral

$$\frac{8\pi h}{c^3} \int n(\nu) \nu^3 d\nu$$

ersetzt werden.

Die Wechselwirkung zwischen der Atomgesamtheit und dem elektromagnetischen Feld ist eine Größe, die wir mit

$$(U_{EF})_{N_0 N_1 N_2 N_3 \dots n_0 n_1 n_2 n_3 \dots N'_0 N'_1 N'_2 N'_3 \dots n'_0 n'_1 n'_2 n'_3 \dots}$$

zu bezeichnen haben. Die Matrixelemente für  $N_0 = N - 1$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0 \dots$  und  $N'_0 = N$ ,  $N'_1 = 0$ ,  $N'_2 = 0 \dots$  haben wir kurz mit  $(U_{EF})_{10}$  bezeichnet und in Gleichung (14) bereits dargestellt.

Wir werden jetzt das Gesamtsystem Atomensemble + elektromagnetisches Feld durch Eigenfunktionen darstellen, die nicht mehr Bezug nehmen auf räumliche Vorgänge, sondern die den zeitlichen Ablauf des ganzen Systems beschreiben durch Angabe der zeitlichen Änderung der Besetzungszahlen  $N_i$  und  $n_k$ . Diese Funktionen nennen wir

$$\Phi(t, N_0 N_1 \dots | n_0 n_1 n_2 \dots).$$

Ihre Bedeutung ist die folgende:

$$|\Phi(t, N_0 N_1 \dots | n_0 n_1 \dots)|^2$$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß zum Zeitpunkt  $t$  das Atomensemble sich in dem durch die Besetzungszahlen  $N_0, N_1, N_2, N_3 \dots$  charakterisierten Zustande befindet, während  $n_0, n_1, n_2 \dots$  Lichtquanten mit den Frequenzen bzw.  $\nu_0, \nu_1, \nu_2 \dots$  vorhanden sind.

Wir interessieren uns im folgenden für zwei Fälle, für die wir einige wesentliche Vereinfachungen einführen werden. Der erste Fall ist der der Emission. Das Atomensemble soll sich zu einem bestimmten Zeitpunkt im Zustand  $N_0 = N - 1$ ,  $N_1 = 1$ , alle übrigen  $N_i = 0$  befinden, während zum gleichen Zeitpunkt das elektromagnetische Feld keine Lichtquanten enthalten soll (alle  $n_k = 0$ ). Der Zeitpunkt, für den dies der Fall ist, sei  $t = 0$ . Gefragt wird nach dem zeitlichen Abklingen des Zustandes 1 zum Zustande 0 und nach dem Auftreten von Lichtquanten im elektromagnetischen Felde.

Der zweite Fall ist der der Resonanzfluoreszenz: Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet sich die Atomgesamtheit im Zustande 0; jedoch sind im elektromagnetischen Felde Lichtquanten vorhanden, so daß der Zustand 1 in der Atomgesamtheit angeregt werden kann. Diese Anregung wird zu einer nachfolgenden Emission Anlaß geben, wobei die Atomgesamtheit wieder in den Zustand 0 übergeht. Auch hier ist nach dem zeitlichen Verlauf dieses Überganges gefragt sowie nach den Lichtquanten, die dabei entstehen.

Für den ersten Prozeß führen wir folgende Vereinfachung ein: Obgleich bei dem betrachteten Abklingprozeß gelegentlich auch intermediäre Zustände auftreten, bei denen in der Atomgesamtheit ein Atom sehr hoch angeregt

ist (auch wenn damit kurzfristig der Energiesatz sehr stark verletzt ist), so können diese Zustände doch immer nur mit sehr geringer Wahrscheinlichkeit vorhanden sein. Diese Wahrscheinlichkeit werden wir für unsere Annäherungsrechnung exakt Null setzen. Unter dieser Voraussetzung sind dann nur die Eigenfunktionen

$$\Phi(t, 0 | n_0 n_1 \dots) \quad \text{und} \quad \Phi(t, 1 | n_0 n_1 n_2 \dots)$$

als wesentlich von Null verschieden anzusehen, wobei die Symbole 1 und 0 die Besetzungszahlen in der Atomgesamtheit  $N_0 = N - 1$ ,  $N_1 = 1$ ,  $N_2 = 0$  usw. bzw.  $N_0 = N$ ,  $N_1 = 0$  usw. bedeuten.

Für diese Eigenfunktionen erhalten wir dann folgende Differentialgleichungen, die die Schrödinger-Gleichung für das System Atomgesamtheit + elektromagnetisches Feld darstellt. Die ihr entsprechende Matrix ist die Summe der Ausdrücke (17), (18), (19) und (14) 1):

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Phi(t, 0 | n_0 n_1 \dots)}{\partial t} = (N E_0 + \sum n_k \hbar \nu_k + U_{00}) \Phi(t, 0 | n_0 n_1 \dots) + [U_{01} + (U_{EF})_{01}] \Phi(t, 1 | n_0 n_1 \dots). \quad (20)$$

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial \Phi(t, 1 | n_0 n_1 \dots)}{\partial t} = (\varepsilon_1 + N E_0 + \sum n_k \hbar \nu_k + U_{11}) \Phi(t, 1 | n_0 n_1 \dots) + [U_{10} + (U_{EF})_{10}] \Phi(t, 0 | n_0 n_1 \dots). \quad (20a)$$

Wir behandeln zunächst den Fall der Emission. Hier müssen wir für den Anfangszustand annehmen: Atomensemble befindet sich im Zustand 1 und es sind keine Lichtquanten da. Dementsprechend machen wir die vereinfachende Annahme, daß die Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$\Phi(t, 1 | n_0 n_1 \dots)$$

alle Null sind, wenn auch nur eine der Zahlen  $n_k$  von Null verschieden ist. Ferner soll  $\Phi(t, 0 | n_0 n_1 \dots)$  gleich Null sein, wenn entweder alle  $n_k$  gleich Null sind oder mehr als eines der  $n_k$  den Wert 1 hat. Auch soll diese Funktion gleich Null sein, wenn zwar nur ein  $n_k$  den Wert 1 hat, aber dafür der zugehörige Energiebetrag  $\hbar \nu_k$  von der Anregungsenergie des Zustandes 1 der Atomgesamtheit wesentlich abweicht. Wir setzen also alle diejenigen  $\Phi$  exakt gleich Null, die zu Zuständen gehören, bei denen der Energiesatz stark verletzt ist.

Eine solche Annahme ist für die gleichen Überlegungen beim Einzelatom von Weisskopf und Wigner<sup>2)</sup> gemacht worden. Sie entspricht

<sup>1)</sup> Genau genommen müßte in jeder der Gleichungen auf der rechten Seite ein Glied  $(U_{EF})_{00} \Phi(t, 0 | n_1 n_2 \dots)$  oder  $(U_{EF})_{11} \Phi(t, 1 | n_0 n_1 \dots)$  berücksichtigt werden. Allein ergibt sich bei Einführung der im folgenden besprochenen Näherung, daß diese Glieder gerade immer ein verschwindendes  $\Phi$  als Faktor erhalten. Wir haben uns darum entschlossen, diese Glieder nicht erst hinzuschreiben. — <sup>2)</sup> V. Weisskopf u. E. Wigner, ZS. f. Phys. 63, 54, 1930.

der Voraussetzung, daß die Breite der Linien klein ist gegen die Energie des Linienschwerpunktes. Für den Fall des Einzelatoms wird eine solche Voraussetzung keine wesentliche Einschränkung sein, für unseren Fall ist sie es jedoch. Für sichtbares Licht bedeutet diese Einschränkung, daß der Faktor  $\Gamma$  der Gleichung (15) nicht größer wird als etwa  $10^6$ . Diese Bedingung ist für die Scheibesch'schen Polymerisate noch erfüllt.

Die hier gemachte Annahme bedeutet für unser Gleichungssystem (20) und (20a) folgendes: In Gleichung (20) müssen wir alle  $n_k = 0$  setzen mit Ausnahme eines einzigen. Dann tritt auf der rechten Seite das Glied

$$U_{01} \Phi(t | 1 | 000 \dots 0100 \dots)$$

auf, in dem der Zustand des Atomensembles gleich 1 ist, während sich an dem Zustand des elektromagnetischen Feldes nichts geändert hat, da ja  $U_{01}$  wegen der  $\delta$ -Faktoren die Größen  $n_k$  des elektromagnetischen Feldes nicht affiziert. Dieses Glied verschwindet demnach aus unserer Gleichung (20). Das gleiche gilt aus den gleichen Gründen für  $U_{10} \Phi(t | 0 | 0000 \dots 0 \dots)$  in Gleichung (20a).

Jetzt ersetzen wir die Eigenfunktionen  $\Phi$  durch neue Eigenfunktionen  $\Theta$ , die mit den  $\Phi$  in folgender Weise zusammenhängen:

$$\Phi = e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (N E_0 + E_1 - E_0 + U_{11}) \cdot t} \cdot \Theta.$$

Die Argumente der neuen Funktionen  $\Theta$  schreiben wir kurz folgendermaßen:

$$\Theta(1|0)$$

bzw.

$$\Theta(0|1_q),$$

wo  $1_q$  bedeutet, daß ein Lichtquant von der Frequenz  $\nu_q$  vorhanden ist. Wir führen ferner die Abkürzung

$$\hbar \nu_0 = E_1 - E_0 + U_{11} - U_{00} \quad (21)$$

ein und nehmen, wie schon erwähnt, nur diejenigen  $\Theta$  als von Null verschieden an, für die die Ungleichung

$$|\hbar \nu_0 - \hbar \nu_q| \ll \hbar \nu_0$$

erfüllt ist. Schließlich soll noch gesetzt werden:

$$w_{n,m}^{(q)} = \frac{e}{im} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi\nu_q V}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_n e^{2\pi i (k_q x^n)} \cdot p_{n,m}. \quad (22)$$

Wir müssen nun noch die Größe  $U_{EF}$  in Gleichung (14) in die Gleichungen (20) und (20a) einführen. Dabei können wir von den beiden Polarisationsrichtungen der Strahlung die eine willkürlich vernachlässigen, da beide voneinander unabhängig sind und nacheinander behandelt werden



können. Wenn wir nun für Gleichung (20) in Gleichung (14) alle  $n_k$  mit einer Ausnahme gleich Null, diese aber gleich 1 setzen, so geht (20) über in

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\Theta}(0; 1_\rho) = w_{01}^{(\rho)} \Theta(1|0) + (\hbar \nu_\rho - \hbar \nu_0) \Theta(0|1_\rho) \quad (23)$$

und entsprechend (20a) in

$$\frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\Theta}(1|0) = \sum_{\rho} w_{10}^{(\rho)} \Theta(0|1_\rho). \quad (23a)$$

Diese beiden Gleichungen stimmen aber völlig überein mit den Gleichungen (14a) bzw. (14b) der zitierten Arbeit von Weisskopf und Wigner. Wir können daher die Schlußweise dieser Autoren völlig übernehmen und gelangen so zu dem Ergebnis, daß erstens die Größe

$$\Theta(1|0) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \quad (24)$$

gesetzt werden darf und daß die Größe  $\gamma$ , also im wesentlichen die reziproke Verweilzeit, die unmittelbar die Linienbreite bestimmt, gegeben ist durch<sup>1)</sup>

$$\gamma = \frac{16 \pi^2 e^2 \nu_0}{m^2 c^3 \hbar} \cdot \Gamma \cdot |p_{10}|^2, \quad (25)$$

so daß also der Zusammenhang zwischen der Strahlungsintensität und der Linienbreite einer Atomgesamtheit der gleiche ist wie im Falle des einzelnen Atoms. Gegenüber der Linienbreite der Strahlung eines einzelnen Atoms wird die Linienbreite der Strahlung eines Atomensembles hinauf- oder herabgesetzt nach Maßgabe der Größe des Faktors  $\Gamma$  aus Gleichung (15). Gleichzeitig tritt auch eine Verschiebung der ursprünglichen Spektrallinie auf, die allein von der Wechselwirkungsenergie der Atome untereinander herrührt und die gegeben ist durch

$$\Delta \nu = \frac{U_{11} - U_{00}}{\hbar}. \quad (26)$$

Der Fall der Resonanzfluoreszenz läßt sich nunmehr ebenfalls sehr einfach erledigen. Wir haben dazu nur zu berücksichtigen, daß die Zahl der Lichtquanten nicht lediglich Null oder 1 ist, sondern daß die Zahlen  $n_k$

<sup>1)</sup> Dieser Ausdruck für die natürliche Linienbreite unterscheidet sich bezüglich der „trivialen“ Faktoren scheinbar von dem üblichen Ausdruck durch das Fehlen eines Faktors  $\frac{1}{3}$ . Dies liegt jedoch daran, daß üblicherweise das Quadrat einer Größe  $p_{AB}$  eingeht, wobei

$$|p_{AB}|^2 = |X_{AB}|^2 + |Y_{AB}|^2 + |Z_{AB}|^2$$

ist ( $A$  bedeutet Anfangs-,  $B$  Endzustand des Elektronensprunges). Die Größen  $X_{AB}$ ;  $Y_{AB}$ ;  $Z_{AB}$  sind die Heisenbergschen Matrizen, also genau das, was wir mit  $(p_{k_\rho})_{10}$  bezeichnet haben. Im Falle kugelsymmetrischer Atome ist natürlich  $|X_{AB}|^2 = |Y_{AB}|^2 = |Z_{AB}|^2 = \frac{1}{3} |p_{AB}|^2$  und daher rührt der Faktor  $\frac{1}{3}$ . Unsere Schreibweise ist daher allgemeiner und gilt auch für nichtkugelsymmetrische Gebilde, was für die Anwendung auf Polymerisate wichtig ist.



beliebig sein können entsprechend der Existenz einer elektromagnetischen Strahlung im Außenraum. Durch die  $n_k$  wird demnach die Intensität dieser Strahlung beschrieben. Die Absorption und Remission ändert an diesen Besetzungszahlen nur insofern etwas, als sie aus  $n_k$  die Zahl  $n_k - 1$  und aus einem anderen  $n_m$  die Zahl  $n_m + 1$  macht.

Wir machen wieder die Annahme, daß die Eigenfunktionen  $\Phi$  nur dann von Null verschieden sind, wenn der Energiesatz gilt oder nur wenig verletzt ist. Dies bedeutet, daß lediglich folgende drei Typen von Wellenfunktionswerten von Null verschieden sein können:

$$\begin{aligned} 1. \Phi(t|0|n_1 n_2 \dots), \quad 2. \Phi(t|1|n_1 n_2 \dots n_k - 1 \dots), \\ 3. \Phi(t, 0|n_1 \dots n_m + 1 \dots n_k - 1 \dots). \end{aligned}$$

Für Typ 2 muß die Bedingung gelten

$$|h\nu_0 - h\nu_k| \ll h\nu_0$$

und für Typ 3

$$|h\nu_m - h\nu_k| \ll h\nu_0,$$

wo  $\nu_0$  wiederum durch (21) gegeben ist. Unter Beachtung von (14) und der Abkürzung (22) finden wir für die Wellenfunktionen folgende Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\Phi}(t|0|n_1 n_2 n_3 \dots) &= (NE_0 + \sum_k n_k h\nu_k + U_{00}) \Phi(t|0|n_1 n_2 \dots) + \\ &+ \sum_k \sqrt{n_k} w_{01}^{(k)} \Phi(t|1|n_1 \dots n_k - 1 \dots), \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\Phi}(t|1|n_0 \dots n_k - 1 \dots) &= \{NE_0 + \varepsilon_1 + [n_1 h\nu_1 + n_2 h\nu_2 \dots + \\ &+ (n_k - 1) h\nu_k + \dots] + U_{11}\} \Phi(t|1|\dots n_k - 1 \dots) + \\ &+ \sqrt{n_k} w_{10}^{(k)} \Phi(t|0|n_1 \dots n_k \dots) + \\ &+ \sum_m \sqrt{n_m + 1} w_{10}^{(m)} \Phi(t|0|\dots n_m + 1 \dots n_k - 1 \dots), \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{\Phi}(t|0|n_1 \dots n_m + 1 \dots n_k - 1 \dots) &= \{NE_0 + n_1 h\nu_1 + n_2 h\nu_2 \dots + \\ &+ (n_m + 1) h\nu_m \dots + (n_k - 1) h\nu_k \dots + U_{00}\} \times \\ &\times \Phi(t|0|n_1 \dots n_m + 1 \dots n_k - 1 \dots) + \\ &+ \sqrt{n_m + 1} w_{01}^{(m)} \Phi(t|1|n_1 \dots n_m \dots n_k - 1 \dots). \end{aligned}$$

Wenn wir schließlich neue Größen einführen:

$$e^{2\pi i (NE_0 + \sum_k n_k h\nu_k + U_{00}) t} \cdot \begin{cases} \Phi(t|0|n_1 n_2 \dots) &= a, \\ \Phi(t|1|n_1 \dots n_k - 1 \dots) &= b_k, \\ \Phi(t|0|n_1 \dots n_m + 1 \dots n_k - 1 \dots) &= a_{km}, \end{cases}$$

so gehen diese Gleichungen in die folgenden über:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{a} &= \sum_k \sqrt{n_k} w_{01}^{(k)} b_k; \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{b}_k &= \hbar(\nu_0 - \nu_k) b_k + \sqrt{n_k} w_{10}^{(k)} \cdot a + \sum_m \sqrt{n_m + 1} w_{10}^{(m)} a_{km}; \\ \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{a}_{km} &= \hbar(\nu_m - \nu_k) a_{km} + \sqrt{n_m + 1} w_{01}^{(m)} \cdot b_k, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

und diese Gleichungen stimmen formal vollkommen mit den von Weisskopf<sup>1)</sup> für die Resonanzfluoreszenz eines einzigen Atoms angegebenen Gleichungen (28a) bis (28c) der zitierten Arbeit überein.  $\nu_0$  ist jetzt nicht mehr die Emissionsfrequenz des einzelnen Atoms, sondern die der Atomgesamtheit gemäß Gl. (21) und an die Stelle der Matricelemente  $p_{01}$  bzw.  $p_{10}$  des Einzelatoms tritt das gleiche Matricelement, nur multipliziert mit dem Faktor  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{2\pi i (k_e \mathfrak{R}^{(n)})}$  auf. Daraus folgt dann, daß für die Linienbreite der Resonanzfluoreszenz einer Atomgesamtheit die gleiche Breite maßgebend ist, wie bei der Emission. Im übrigen können alle Schlüsse, die Weisskopf für die Resonanzfluoreszenz des einzelnen Atoms gezogen hat, übertragen werden auf die Resonanzfluoreszenz einer Atomgesamtheit, wenn man nur die Resonanzstelle des einzelnen Atoms durch die der Gesamtheit und den  $f$ -Wert des einzelnen Atoms ebenfalls durch den nach unseren Formeln bestimmten  $f$ -Wert der Gesamtheit ersetzt. Es kann unter diesen Umständen für alle Einzelheiten auf die Arbeit von Weisskopf verwiesen werden, soweit sie sich auf die Resonanzfluoreszenz des einzelnen Atoms bezieht.

### 3. Zur Theorie der Scheibeschens Polymerisate.

An gewissen in Wasser gelösten organischen Farbstoffen entdeckten Scheibe und Mitarbeiter<sup>2)</sup> bei Abkühlung das Auftreten einer neuen im Sichtbaren liegenden Bande, die bezüglich Farbe und anderer Eigenschaften von den optischen Eigenschaften der Substanz bei höheren Temperaturen deutlich unterschieden war. Gleichzeitig wurde eine starke Veränderung der mechanischen Eigenschaften der Lösung, wie enorme Steigerung der Zähigkeit u. ä. beobachtet. Diese Erscheinungen ließen sich durch Erhöhung der Temperatur wieder vollkommen rückgängig machen. Scheibe und Mitarbeiter vermuteten, daß die Veränderung der mechanischen und optischen Eigenschaften ihrer Substanzen durch Zusammenballungen der einzelnen Moleküle hervorgerufen werden und konnten schließlich diese Vermutung durch sehr überzeugende Experimente belegen. Hierbei ergab sich, daß tatsächlich molekulartige Gruppen entstehen, bei denen die Zahl

<sup>1)</sup> V. Weisskopf, l. c. — <sup>2)</sup> Vgl. Fußnote (1) auf Seite 748.

der Teilchen, die zu einer solchen Gruppe zusammentreten, von der Größenordnung  $10^6 - 10^7$  ist.

Bei den zuerst von Scheibe und Mitarbeitern untersuchten Pseudoisozyaninen (es ergab sich dann bald, daß andere ähnlich gebaute Substanzen das gleiche Verhalten zeigen) konnte nachgewiesen werden, daß an diesen in Lösung befindlichen Molekülgruppen eine echte Resonanzfluoreszenz im Gelborange auftritt, während die Absorption der Substanz bei höheren Temperaturen eindeutig im Grünen liegt. Die im Gelben auftretende Bande ist von außerordentlicher Schmalheit und zeigt bezüglich ihrer Abhängigkeit von der Frequenz deutliche Dispersionsverteilung. Die ihrer Halbwertsbreite entsprechende Verweilzeit wurde von Hanle zu bestimmen versucht und ergab sich als kleiner als  $10^{-9}$  sec, während die nach einem Vorschlag von Rompe<sup>1)</sup> berechnete Verweilzeit auf Grund der Daten der Dispersionskurve  $10^{-14}$  sec ergibt. Wir werden sehen, daß dieser Verweilzeit ein nach unserer Auffassung heraufgesetzter  $f$ -Wert um den Faktor  $10^6 - 10^7$  entspricht, was auf  $10^6 - 10^7$  einzelne Moleküle im Molekülverband schließen läßt und mit dem auf anderen Wege experimentell ermittelten Zahlen gut übereinstimmt.

Der Aufbau der Molekülgruppen dieses Polymerisates ist, wie Scheibe und Mitarbeiter ebenfalls nachweisen konnten, linear. Die vorwiegend ebenen Pseudoisocyaninmoleküle legen sich aufeinander wie die Geldstücke einer Geldrolle und bilden so fadenförmige Moleküle. Die Bindungsfestigkeit ist sehr gering, da sie schon bei wenig über Zimmertemperatur liegenden Temperaturen vollständig dissoziieren. Diese Tatsache beweist, daß die Bindung, die für die Herstellung der Molekülgruppen maßgebend ist, die Größe von etwa  $1/30$  e-Volt haben muß, so daß wir mit Sicherheit homöopolare oder polare Bindungsformen ausschließen können. Wir können Bindungskräfte vom van der Waalsschen Typ annehmen, so daß auf das Nichtüberlappen der einzelnen Elektronenwolken geschlossen werden darf. Die Abstände von etwa 4,5 und mehr Ångström zwischen diesen Molekülen und die Tatsache, daß die Farbstoffmoleküle praktisch eben sind, sprechen ebenfalls dafür. Die Voraussetzungen für die Anwendung unserer Theorie sind daher gegeben.

Die einfachste Annahme zur Erklärung des Phänomens auf der Grundlage der vorher besprochenen Anschauungen wäre die, daß die gelbe Bande aus der grünen Bande des einzelnen Moleküls entsteht und daß die beobachtete Verschiebung des Linienschwerpunktes der Größe  $\Delta \nu = \frac{U_{11} - U_{00}}{h}$

<sup>1)</sup> Vgl. G. Scheibe, A. Schöntag, F. Katheter, Naturwissensch. 27, 499, 1939.

unserer Theorie entspricht. Dem widersprechen jedoch gewisse Tatsachen. Die Breite der grünen Bande ist sehr groß und offenbar durch molekulare Eigenschaften des einzelnen Farbstoffmoleküls bestimmt; sie ist so groß, daß eine Verbreiterung infolge des Zusammenflockens der einzelnen Moleküle wohl nicht beobachtet werden könnte. Die Schmalheit der gelben Bande beweist andererseits, daß dieser Elektronenübergang durch das Kernschwingungsspektrum des Farbstoffmoleküls bzw. des Polymerisates nur wenig modifiziert wird. Dies kann mehrere Gründe haben: Einmal kann es sein, daß die Kernschwingungen des — ebenen — Farbstoffmoleküls keine Komponente senkrecht zur Molekülebene besitzen, und deshalb in einen Elektronenübergang senkrecht zur Molekülebene nicht in Erscheinung treten. Weiter, daß die Kernschwingungen, welche der Längsstruktur des Polymerisates entsprechen, wegen der geringen Dissoziationsarbeit des Polymerisates auch eine sehr kleine, etwa  $1/100$  bis  $1/1000$  Volt betragende Quantengröße besitzen, die naturgemäß gegenüber der „Stoßdämpfungsbreite“ weitgehend zurücktritt; schließlich aber auch, daß dieser Elektronenübergang fast vollständig gegen die Kernschwingungen des Polymerisates entkoppelt ist, so daß es, mit anderen Worten, praktisch keinen Einfluß auf die Bindungsverhältnisse des Polymerisates ausübt. Für das letztere spricht auch die Überlegung, daß die Bindung des Polymerisates auf van der Waalssche Kräfte zurückgeht, und nicht elektronischer Natur ist. Es erscheinen auch die grüne und die gelbe Bande nebeneinander in Absorption, die grüne allerdings geschwächt. Wollte man nun annehmen, daß die grüne Bande ausschließlich von noch nicht polymerisierten Molekülen herrührt, so könnte man sehr schwer erklären, warum die gelbe Bande in Emission erhalten werden kann, wenn man in den kurzwelligen Flügel der grünen Bande einstrahlt.

Am plausibelsten erscheint uns die Annahme, daß die grüne Bande sowohl dem einzelnen Atom wie auch dem Polymerisat zukommt und daß die gelbe Bande lediglich dem Polymerisat eigentümlich ist.

Die gelbe Bande ist die Folge eines Ausstrahlungsmechanismus, der bei der Polymerisation erst entsteht. Nach unserer Auffassung kommt diese Bande nicht dem einzelnen Farbstoffmolekül zu, sondern einem Doppel-molekül, das sich allerdings erst in der polymerisierten Form stabil bilden kann. Scheibe und Mitarbeiter haben nämlich nachweisen können, daß die einzelnen Moleküle sich nicht streng wie die Geldstücke einer Geldrolle aufeinanderlegen, sondern daß immer je zwei aufeinanderfolgende Moleküle um eine bestimmte Strecke in Richtung ihrer Ebenen gegeneinander verschoben sind und daß erst das erste, dritte, fünfte usw. Molekül durch Parallel-

verschiebung senkrecht zu ihrer Ebene ineinander übergeführt werden können und ebenso das zweite, vierte, sechste usf. Molekül. Beide Molekülreihen sind demnach um einen Betrag senkrecht zur Achse des Gesamtkomplexes etwas verschoben (s. Figur). Damit ist vom Standpunkt der linearen Kette nicht das einzelne Farbstoffmolekül ein Baustein für das Polymerisat, sondern erst ein Doppelmolekül, das aus zwei Einzelmolekülen besteht, die gegeneinander diese charakteristische Verschiebung in Richtung ihrer Ebenen zeigen.

Es liegt nun wohl sehr nahe, anzunehmen, daß durch das Zusammen-  
treten zweier Moleküle zu einem neuen Baustein ein neuer Ausstrahlungs-  
mechanismus auftritt, der als Manifestation des Doppelmoleküls anzusehen



Fig. 1 und 2. Darstellung der verschiedenen Polymerisationsmöglichkeiten der Polymerisate von Scheibe und Mitarbeitern. Im Falle 1 ist die Bildung der sogenannten Doppelmoleküle hervorgehoben. Die verschieden gezeichneten Abstände zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Molekülen sind experimentell nicht verbürgt.

ist. Auf diesen Mechanismus haben wir dann die vorhergehenden Überlegungen anzuwenden. Hierbei ist anzunehmen, daß die Zahl der erregten Doppelmoleküle innerhalb eines polymerisierten Gebildes 1 oder von der Größenordnung 1 ist.

Die hier vorgeschlagene Deutung findet ihre Stütze in den experimentellen Tatsachen. Es hat sich nämlich herausgestellt, daß die Scheibischen Farbstoffmoleküle in zwei verschiedenen Anordnungen polymerisieren können. Erstens in der Form der Fig. 1: diese Anordnung nennt Scheibe leiterförmig. Ferner in einer treppenförmigen Anordnung nach Fig. 2. Bei der letztgenannten Anordnung ist offensichtlich von der Bildung der Doppelmoleküle keine Rede. Dementsprechend zeigt auch ein Polymerisat dieser Anordnung außer der grünen Bande keine weitere. Damit ist eigentlich handgreiflich bewiesen, daß die gelbe Bande im Falle 1 der besonderen Anordnung ihre Entstehung verdankt, so daß die Rückführung der gelben Bande auf die Doppelmoleküle, wie hier vorgeschlagen, durchaus



plausibel ist. Weiter wäre dabei auch zu verstehen, daß ein solches Doppelmolekül einen Strahlungsmechanismus ausbildet, der weitgehend geschützt ist vor den Stößen durch die Moleküle der Lösung, als Folge der weitausladenden geometrischen Konfiguration der beiden einzelnen Moleküle dieses Doppelgebildes.

Wenn in der leiterförmigen Anordnung  $d$  den Abstand zweier aufeinanderfolgender Doppelmoleküle bedeutet und  $\mathfrak{R}^0$  den Abstand des Aufpunktes vom ersten Doppelmolekül, so erhalten wir für die Summe aus Gleichung (16)

$$\sum_n e^{2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}^{(n)})} = e^{2\pi i (k_q \cdot \mathfrak{R}^0)} \frac{e^{2\pi i \frac{Nd}{\lambda} \cos \vartheta} - 1}{e^{2\pi i \frac{d}{\lambda} \cos \vartheta} - 1}$$

und damit für  $I$  aus Gleichung (15):

$$I = \frac{1}{N} \frac{\sin^2 \left( \frac{\pi N d}{\lambda} \cdot \cos \vartheta \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi d}{\lambda} \cdot \cos \vartheta \right)} \quad (28)$$

Hier ist  $\vartheta$  der Winkel zwischen  $k_q$  und der Achse des polymerisierten Moleküls und  $|k_q| = 1/\lambda$ , wo  $\lambda$  die Wellenlänge der emittierten Strahlung ist. Da diese Größenordnungsmäßig das Tausendfache von  $d$  beträgt, so erkennt man leicht, daß  $I$  nur ein einziges Maximum besitzt bei  $\vartheta = \pi/2$  und daß dieses Maximum den sehr großen Wert  $N$  besitzt. Auch sieht man unmittelbar, daß die gesamte Ausstrahlung innerhalb des Winkelbereiches

$$\frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{\lambda}{Nd} \right) \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\lambda}{Nd} \right) \quad (29)$$

erfolgt. In dieser Richtung gibt es eine Emission, die bezüglich ihrer Frequenzabhängigkeit die Form einer Dispersionskurve zeigt, wobei die Konstante der Dämpfung (und damit die durch sie gegebene Linienbreite) nach Gleichung (25) den Wert

$$\gamma = \frac{16\pi^2 e^2 \nu_0}{m^2 c^3 \hbar} \cdot N \cdot |p_{10}|^2 \quad (30)$$

hat.

Den Einfluß der Temperatur auf unser Phänomen kann man dadurch zu berücksichtigen suchen, daß man die Abstandsvektoren  $\mathfrak{R}^{(n)}$  nicht konstant setzt, sondern ihnen noch einen zeitlich periodischen Anteil hinzufügt, der von den Eigenschwingungen des als elastisch zu denkenden Polymerisates herrührt. Dann bildet man nicht die Größe  $I$ , sondern einen statistischen Mittelwert von  $I$ . Da dieses Verfahren genau analog ist der Berechnung des Temperatureinflusses auf die Interferenzflecke bei der



Beugung von Röntgenstrahlen an einem Kristallgitter, so erübrigt sich die explizite Ausführung hier. Die Rechnung ergibt einen Faktor, der multiplikativ zu dem Ausdruck (28) hinzutritt, so daß wir jetzt erhalten:

$$\bar{I} = .e \frac{-4 k T \sin^2 \vartheta}{\lambda^3 \omega^2 M} \cdot I.$$

Hier bedeutet  $\lambda$  die Wellenlänge der emittierten Strahlung,  $M$  die Masse eines Doppelmoleküls, während  $\omega$  den Mittelwert der elastischen Eigenfrequenzen des Polymerisates darstellt. Man erkennt unmittelbar, daß der Temperatureinfluß in einer scheinbaren Herabsetzung der Zahl der zusammenwirkenden Teilchen besteht. Wie groß diese Herabsetzung ist, kann man nicht entscheiden, bevor man vernünftige Annahmen über die Größe  $\omega$  macht. Da die Bindung der Moleküle im Scheibischen Polymerisat jedenfalls kleiner ist als die Bindung der Teilchen in einem festen Körper, so wird man jedenfalls die Annahme machen dürfen, daß  $\omega$  kleiner als  $10^{14}$  ist. Das ist aber auch alles, was man hierüber aussagen kann. Ob das Frequenzspektrum auch von der Zahl der Teilchen im Polymerisat abhängt, kann man gar nicht entscheiden, es ist jedoch nicht unwahrscheinlich.

Schließlich ist zu bedenken, daß das Debyesche Verfahren der Mittelung, das wir hier angewandt haben, voraussetzt, daß die elastischen Schwingungen wirklich ungestört erfolgen. Diese Voraussetzung ist möglicherweise bei den Scheibischen Polymerisaten gar nicht erfüllt, weil diese ja immer in einem Lösungsmittel beobachtet werden und die Rückwirkung dieses Lösungsmittels auf die elastischen Schwingungen bei unseren derzeitigen Kenntnissen nicht annähernd abgeschätzt werden kann. Dies alles veranlaßt uns, zu betonen, daß die Temperaturabhängigkeit des Scheibischen Phänomens vom theoretischen Standpunkt aus doch als ungelöst betrachtet werden muß. Daher begnügen wir uns auch mit den wenigen hier gebrachten Hinweisen.

*Berlin O 17, Studiengesellschaft für elektr. Beleuchtung m. b. H.*

(Aus dem Forschungs-Institut der AEG.)

## Übermikroskopische Feinstrukturen an Glasbruchflächen.

Von E. Götz.

Mit 6 Abbildungen. (Eingegangen am 24. November 1942.)

Rauhigkeitsstellen, die sich auf Bruchflächen von Glasstäben meist als Übergangszone zwischen „Spiegel“ und „Furchungsfläche“ ausbilden, werden auf ihre Feinstruktur hin übermikroskopisch untersucht. Es zeigt sich, daß die Zunahme der Feinheit der einzelnen Furchen nach der Spiegelseite hin im sublichtmikroskopischen Gebiet weiter fortschreitet. Dabei haben die Bruchflächen auch in den übermikroskopischen Dimensionen die von der makroskopischen Furchungsfläche her bekannten Ausbildungsformen. Übergangsstellen zwischen „glatten“ und „rauen“ Bereichen auf übermikroskopischen Aufnahmen legen die Vermutung nahe, daß noch unterhalb der Grenze, bis zu der nach dem heutigen Entwicklungsstand eine Sichtbarmachung mit dem Übermikroskop gelingt, weitere noch feinere Furchungen vorhanden sind.

1. *Problemstellung.* Die Bruchflächen von massiven Glasstäben zeigen in ihren typischen Ausbildungsformen charakteristische Merkmale, die immer auftreten, gleichgültig, ob es sich um einen Bruch durch Zug- oder Biegebeanspruchung<sup>1)</sup> oder durch Detonation<sup>2)</sup> handelt. Die Dreiteilung in „Spiegel“, „Rauhigkeitszone“ und „Furchungsfläche“ (Fig. 1), die sich beim Zugbruch am deutlichsten ausgeprägt findet, ist bereits mehrfach beschrieben worden und fand durch Smekal ihre befriedigende theoretische Deutung<sup>3)</sup>. Wie auf Fig. 1 deutlich zu erkennen ist, besitzt das Gebiet des „glatten“ Spiegels keine scharfe Abgrenzung gegen die Rauhigkeitszone. Es findet ein allmählicher Übergang statt, der Smekal zu der Vermutung führte<sup>4)</sup>, daß schon innerhalb der eigentlichen „Spiegelfläche“ eine sublichtmikroskopische Rauhigkeit vorhanden ist. Eine allmähliche Vergröberung der Struktur nach außen hin, in Fortpflanzungsrichtung des Bruches, tritt

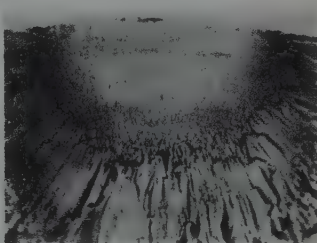


Fig. 1. Lichtoptisch. Vergr. 26 : 1.  
Typische Dreiteilung einer Bruchfläche  
in „Spiegel“, „Rauhigkeitszone“ und  
„Furchungsfläche“

<sup>1)</sup> G. Apelt, ZS. f. Phys. **91**, 336, 1934; G. Thierbach, ebenda **91**, 344, 1934; K. Mengelkoch, ebenda **97**, 46, 1935; M. Eichler, ebenda **98**, 280, 1936. — <sup>2)</sup> E. Rexer, Glastechn. Ber. **17**, 207, 1939. — <sup>3)</sup> A. Smekal, Ergebn. d. exakt. Naturwiss. **15**, 106, 1936. — <sup>4)</sup> A. Smekal, ebenda S. 141.

dann als zunehmende Rauhigkeit in Erscheinung. Für die Abmessungen der vermuteten feinsten Unebenheiten wird die Größenordnung der Lichtwellenlängen ( $\sim 5 \cdot 10^{-5}$  cm) als obere Grenze angegeben. Diese Vorstellungen



Fig. 2. Lichtoptisch. Vergr. 6:1.  
Diskrete Rauheitsstelle auf einer Bruchfläche  
mit Streifung radial von der primären Kerbstelle  
ausgehend.

fanden eine Stütze durch Versuche über die Oberflächenkristallisation von Gläsern, die an solchen „Spiegelflächen“ durchgeführt wurden<sup>1)</sup>. Dabei konnte festgestellt werden, daß sich die „Spiegel“ rauher verhalten als feuerpolierte Glasoberflächen.

Mit Hilfe des Elektronen-Übermikroskops ist nun versucht worden, einen genaueren Einblick in die Struktur der „Rauheitszone“ im sublichtmikroskopischen Gebiet zu gewinnen und darüber hinaus Aussagen über die „Rauhigkeit“ der Spiegelfläche zu machen.

2. *Untersuchungsmethode.* Da in der Übermikroskopie heute im wesentlichen nur nach dem Durchstrahlungsprinzip gearbeitet werden kann, wurde zur Oberflächenuntersuchung das von Mahl entwickelte übermikroskopische Abdruckverfahren<sup>2)</sup> verwandt, das vor kurzem vom Verfasser auf die Oberflächenuntersuchung von Glas und Keramik ausgedehnt wurde<sup>3)</sup>. Danach wird bei Glas usw. eine dünne Lackhaut auf der zu untersuchenden Oberfläche erzeugt, die reliefartig alle Oberflächenunebenheiten enthält. Das übermikroskopische Durchstrahlungsbild dieses Abdruckes gibt ein Bild von der ursprünglichen Oberfläche. Der durch die Bildkontraste hervorgerufene plastische Eindruck stimmt dabei mit der Wirklichkeit überein, wie Stereoskopaufnahmen zeigen. Die Tönungsunterschiede in den Aufnahmen kommen durch verschiedene Durchstrahlungsdicken der Lackhaut zustande. Waagerechte oder nach oben gewölbte Stellen erscheinen hell, da sie die kleinste Durchstrahlungsdicke haben. Je schräger eine Fläche steht, desto dunkler wird sie wiedergegeben. Vertiefungen, die sich durch Kapillarwirkung bei der Benetzung mit Lacklösung vollsaugen, erscheinen im Durchstrahlungsbild des Abdruckfilms stärker geschwärzt. —

<sup>1)</sup> H. Wiehr, Diss. Halle 1936. — <sup>2)</sup> H. Mahl, Naturwiss. 30, 207, 1942. — <sup>3)</sup> E. Götz, „Oberflächen-Übermikroskopie von Glas und Keramik“, ZS. f. techn. Phys., im Druck.

Als Untersuchungsgerät diene das elektrostatische Elektronen-Übermikroskop der AEG.

3. *Vorbereitung der Untersuchungsproben.* Da die Anwendung des übermikroskopischen Abdruckverfahrens bei gewöhnlichen Bruchflächen nach Art der oben gezeigten Fig. 1 auf Schwierigkeiten stößt, wurden für die Untersuchungen Bruchflächen mit extrem großen Spiegeln verwandt, die sich durch Einritzen einer primären Kerbstelle hoher Kerbzahl an der Staboberfläche leicht erzeugen lassen. Dabei treten häufig diskrete Rauigkeitsstellen in der Mitte des Bruchquerschnittes auf, die qualitativ den rauen Übergangszonen zwischen Spiegel- und Furchungsfläche auf gewöhnlichen Bruchflächen entsprechen. Wie aus Fig. 2 zu erkennen ist, zeigen solche Rauigkeitsstellen eine streifige Struktur radial zur primären Kerbstelle an

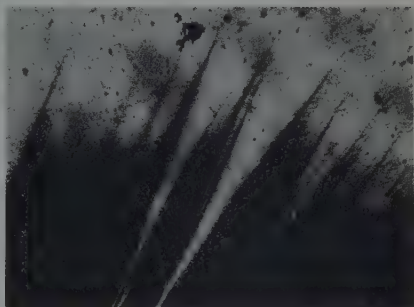


Fig. 3. Lichtoptisch. Vergr. 24:1.  
Vergrößerter Ausschnitt aus einem Randbezirk der Rauigkeitsstelle auf Fig. 2.

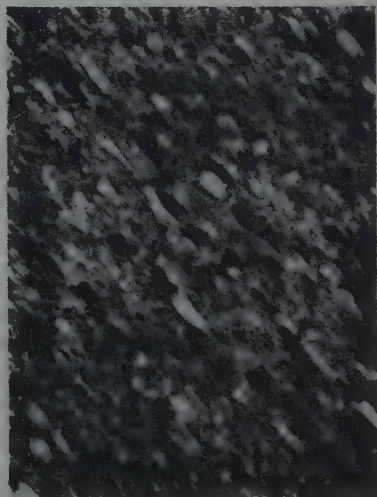
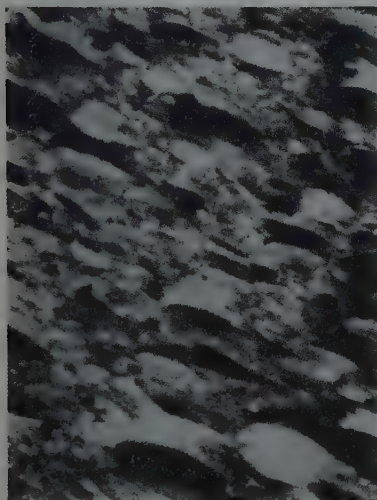


Fig. 4.

Elektronenoptisch.

b

Vergr. 2500:1.

Übermikroskopische Oberflächenbilder der Rauigkeitsstelle (Fig. 2).

a) Aus dem Mittelbezirk b) aus dem Randbezirk.

der Peripherie. Die Streifenwirkung kommt durch periodischen Wechsel grober und feiner Rauigkeiten zustande (Fig. 3).

4. *Übermikroskopische Oberflächenbilder von Rauigkeitsstellen.* Von der Mitte und von Randbezirken derartiger Rauigkeitsstellen wurden Lackabdrücke genommen und übermikroskopisch abgebildet. Die Vermutung einer nach außen hin zunehmenden Verfeinerung der einzelnen Furchen findet sich bestätigt (Fig. 4). Dabei bleibt auch bei den feinsten feststellbaren



Fig. 5. Elektronenoptisch. Vergr. 6000:1. Weiter vergrößerte Einzelheiten aus dem Mittelbezirk der Rauigkeitsstelle.

Furchen (Fig. 6 unten) eine Längsstruktur in Fortpflanzungsrichtung des Bruches gewahrt. Die Bruchflächen zeigen auch in kleinsten Dimensionen die von den makroskopischen Furchungsflächen her bekannten Ausbildungsformen, wie ein Vergleich der übermikroskopischen Aufnahmen (Fig. 5 und 6) mit der Furchungsfläche auf der lichtmikroskopischen Aufnahme Fig. 1 lehrt. Die allmähliche Zunahme der Rauigkeit am Rande „glatter“ Bereiche der Furchungsfläche führte Smekal zu dem Schluß<sup>1)</sup>, daß primäre „Spiegelfläche“ und sekundäre

„Furchungsflächen“ grundsätzlich von gleicher Beschaffenheit sind, daß es sich bei den „glatten“ Bereichen der Furchungsflächen um eine Art sekundäre Spiegelbildung handelt, bei der alle typischen Kennzeichen des „Spiegels“, also auch zunehmende Rauigkeit nach außen hin vorhanden sind.

Die elektronenoptischen Aufnahmen zeigen, daß dieses Prinzip „sekundärer Spiegelbildung“ auch bis in übermikroskopische Dimensionen hinein fortgesetzt wird. Der „glatte“ Bereich auf Fig. 6 unten, der etwa  $10\ \mu$  lang und  $2\ \mu$  breit ist, geht durch allmähliche Vergrößerung der einzelnen Unebenheiten in ein Gebiet größerer Rauigkeit über. Die kleinsten Furchen, die in dem Übergangsgebiet gerade noch feststellbar sind, haben eine Länge von  $100\ m\mu$  und eine Breite von etwa  $50\ m\mu$ . Man gewinnt jedoch den Eindruck, daß nach dem glatten Bereich hin die Verfeinerung der Furchen noch weiter fortschreitet, in Dimensionen, die auch mit dem Übermikroskop

<sup>1)</sup> A. Smekal, *Ergebn. d. exakt. Naturwiss.* 15, 106, 1936.



heute noch nicht erfaßbar sind. Das Auflösungsvermögen der heutigen Elektronenmikroskope würde an sich ein Sichtbarmachen noch kleinerer Furchen grundsätzlich ermöglichen, doch setzt die zu große Flachheit der einzelnen Unebenheiten der Abbildung im Übermikroskop eine Grenze. Wird nämlich die Neigung der einzelnen Furchenflächen zu gering, so zeigen sich in der durchstrahlten Lackabzugfolie keine feststellbaren Kontraste mehr.



Fig. 6.

Elektronenoptisch.

Vergr. 6000:1.

Übermikroskopisches Oberflächenbild aus dem Mittelbereich der Rauigkeitsstelle.  
Übergang zwischen „glatter“ Bruchfläche und feiner Rauigkeit (unten rechts).

Vielleicht wird es gelingen, durch Verwendung schräg aufgedampfter Metallschichten als Abdruckfolien<sup>1)</sup> die Kontrastwirkung des übermikroskopischen Bildes so zu erhöhen, daß noch feinere Unebenheiten auf den Randgebieten der „Spiegelflächen“ sichtbar gemacht werden können. Doch auch dann wird man an eine Grenze der optischen Hilfsmittel kommen, ohne mit Sicherheit aussagen zu können, daß man nun die feinsten Unebenheiten erfaßt hätte. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die fortschreitende Verfeinerung der Furchen auf dem Rauigkeitsgebiet nach der Spiegelseite hin bis in molekulare Dimensionen reicht.

<sup>1)</sup> H. Mahl, Naturwiss. 30, 207, 1942.



## Autorenregister.

- Ackermann, I. s. Kossel, W.
- Ardenne, Manfred von. Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von H. Heil. S. 227.
- Elektronenmikrokinematographie mit dem Universal-Elektronenmikroskop. S. 397.
- Barnóthy, J. Über den Wertebereich der physikalischen Mengen. I. S. 148.
- Bechmann, R. Längsschwingungen rechteckiger Quarzplatten. S. 107.
- Bernardini, G. Über die anomale Absorption in Luft und die Lebensdauer des Mesons. S. 413.
- Bomke, H. und Reddemann, H. Absorption langsamer Neutronen in seltenen Erden und in Cadmium. S. 56.
- Bongartz, H. s. Fucks, W.
- Born, Heinz. Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet. S. 383.
- Bothe, W. Zur Methodik der Neutronensonden. S. 437.
- Dravnieks, A. s. Straumanis, M.
- Ewald, H. s. Mattauach, J.
- Fassbender, J. s. Weizel, W.
- Flammersfeld, A., Jensen, P. und Gentner, W. Die Aufteilungsverhältnisse und Energietönungen bei der Uranspaltung. S. 450.
- Fucks, W. und Bongartz, H. Zündkanalquerschnitt und Zündung mit querschnittsbegrenzter Bestrahlung. S. 468.
- Gentner, W. s. Flammersfeld, A.
- Gerthsen, Chr. und Grimm, E. Der Ionisierungsaufwand von radioaktiven Rückstoßatomen. S. 476.
- Glaser, Walter. Über elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie. S. 1.
- Gölz, E. Übermikroskopische Feinstrukturen an Glasbruchflächen. S. 773.
- Gora, E. Quantentheorie der Strahlungsdämpfung. S. 121.
- Gorodetzky, S. s. Leprince-Ringuet, L.
- Grimm, E. s. Gerthsen, Chr.
- Hacman, D. und Haxel, O. Energie und Reichweite langsamer  $\alpha$ -Strahlen. S. 486.
- Haenzel, G. Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente. S. 283.
- Hahn, O. s. Mattauach, J.
- Haxel, O. und Volz, H. Über die Absorption von Neutronen in wässrigen Lösungen. 493.
- s. Hacman, D.
- Heil, Hans. Über eine neue Ionenquelle. S. 212.
- Heisenberg, W. Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen. S. 513.
- Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. II. S. 673.
- Jagodzinski, Heinz. Über die Druckabhängigkeit der Anregungstemperatur in der Lichtbogensäule. S. 318.
- Jensen, P. s. Flammersfeld, A.
- Jentschke, Willibald. Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit Neutronen. S. 165.
- s. Stetter, Georg.
- Knauer, Fr. Vergleichende Messungen des Aktivierungsquerschnittes von Jod in verschiedenen Formen für Neutronen. S. 103.
- Koch, K. M. Ein neuer Versuch zur Deutung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes und die „Keim“-Theorie der Supraleitung. S. 86.
- Kolhörster, Werner. Zur Ermittlung von Höhenstrahlenkoinzidenzen. S. 539.
- Kopfermann, H. und Paul, W. Über den inversen Stark-Effekt der D-Linien des Natriums. 545.
- Kossel, W., Ackermann, I. und Möllenstedt, G. Symmetrisch angeregte Elektroneninterferenzen. S. 553.

- Koyenuma, Nobutsugu. Beiträge zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung. S. 185.
- Kulenkampff, Helmuth. Betrachtungen über die harte Komponente der kosmischen Strahlung. S. 561.
- Kundt, W. s. Suhrmann, R.
- Laue, M. v. Nochmals über Stromverteilung in Supraleitern. 578.
- Leprince-Ringuet, L., Nageotte, E., Gorodetzky, S. und Richard-Foy, R. Direkte Massenbestimmung eines Mesotrons mit Hilfe des elastischen Stoßes. S. 588.
- Mannkopff, R. Die Berechnung der Lichtbogentemperatur und das Stabilitätsproblem der Lichtbogensäule. S. 228.
- Über den Energietransport durch Strahlung der Resonanzlinien in Gasen. S. 301.
- Maresch, Elfriede s. Stetter, Georg.
- Mattauch, J., Ewald, H., Hahn, O. und Strassmann, F. Hat ein Caesium-Isotop langer Halbwertszeit existiert? Ein Beitrag zur Deutung ungewöhnlicher Linien in der Massenspektrographie. S. 598.
- Mecklenburg, W. Über das elektrostatische Emissions-Übermikroskop. S. 21.
- Möglich, F. und Rompe, R. Strahlungseigenschaften und Energieausbreitung bei dicht gelagerten, gleichartigen Atomen. S. 741.
- Möllenstedt, G. s. Kossel, W.
- Mollwo, E. Zum Nachweis von Interferenzerscheinungen durch Streuteilchen im Interferenzfeld. S. 618.
- Müller, Erwin W. Zur Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bei der Feldemission. S. 261.
- Das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops. S. 270.
- Nageotte, E. s. Leprince-Ringuet, L.
- Paul, W. s. Kopfermann, H.
- Rajewsky, B. Das Geiger-Müller-Zählrohr im Dienste des Bergbaues. S. 627.
- Recknagel, A. Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für Selbststrahler. S. 331.
- Reddemann, H. s. Bomke, H.
- Richard-Foy, R. s. Leprince-Ringuet, L.
- Riemann, W. Aufnahmen von Elektronenlawinen in der Nebelkammer. S. 16.
- Rompe, R. und Weizel, W. Über die Bedeutung des Steenbeckschen Minimumprinzips. S. 31.
- s. Möglich, F.
- Schachinger, Erich † s. Stetter, Georg.
- Schmidt, Richard W. Über Wachstums- und Abbauförmungen von Wolframkristallen, insbesondere über den Gleichstromeffekt. S. 69.
- Stetter, Georg (nach Versuchen gemeinsam mit Jentschke, Willibald, Schachinger, Erich † und Maresch, Elfriede). Die Ionisation einzelner Alpha-Strahlen in verschiedenen Gasen. S. 639.
- Stille, U. Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten. S. 703.
- Strassmann, F. s. Mattauch, J.
- Straumanis, M. (unter Mitarbeit von Dravnieks, A.). Die Steigerung der Intensität offener Röntgenröhren durch bewegliche Anoden. S. 47.
- Suhrmann, R. und Kundt, W. Über die Sekundäremission reiner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand und deren Durchlässigkeit für Sekundärelektronen. S. 363.
- Volz, H. s. Haxel, O.
- Weizel, W. und Fassbender, J. Über die Vorgänge an der Anode eines zischenden Homogenkohlebogens. S. 252.
- s. Rompe, R.
- Weiss, Carlfriedrich. Zur Frage der als Normale festgelegten Radiumstandards. S. 652.
- Wendt, Georg. Zur Dioptrik elektronenoptischer Geräte mit beliebig gekrümmten Abbildungsachsen. S. 720.

## Namenregister zu Band 116 bis 120.

- Ackermann, I. s. Kossel, W. 120, 553.
- Ardenne, Manfred von. Über das Auftreten von Schwärzungslinien bei elektronenmikroskopischer Abbildung kristalliner Lamellen 116, 736.
- Elektronen-Übermikroskop mit wahlweise einschaltbarer Elektronensonde zur Herstellung von Elektronenbeugungsdiagrammen bestimmter kleiner Bezirke des Gesichtsfeldes 117, 515.
  - Zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen. Eine einfache Methode und ihre Ergebnisse 117, 602.
  - Über ein 200 kV - Universal - Elektronenmikroskop mit Objektabschattungsvorrichtung 117, 657.
  - Ergänzung zu den Arbeiten „Zur Prüfung von kurzbrennweitigen Elektronenlinsen“ und „Über ein 200 kV - Universal - Elektronenmikroskop mit Objektabschattungsvorrichtung“ 118, 384.
  - Bemerkung zu der Arbeit von H. Heil 120, 227.
  - Elektronenmikrokinematographie mit dem Universal-Elektronenmikroskop 120, 397.
  - , Schiebold, E. und Günther, F. Feinstrahl-Elektronenbeugung im Universal-Elektronenmikroskop. (Arbeitsweise und Ergebnisse.) 119, 352.
- Ariyama, Kanetaka. Zur Theorie der Supraleitung 119, 174.
- Artmann, Kurt. Zur Theorie der anomalen Reflexion von Atomstrahlen an Kristalloberflächen. Teil I. Anschauliche Betrachtungen 118, 624. Teil II. Berechnung der Dellen-gestalt bei diskontinuierlichem Potentialverlauf 118, 659. Teil III. Übergang zu kontinuierlichem Potentialverlauf 119, 49. Teil IV. Berücksichtigung des Energieaustausches zwischen Gitter und Teilchen 119, 137.
- Artmann, Kurt. Zur Theorie der anomalen Reflexion von optischen Strichgittern 119, 529.
- Bărcă-Gălăţeanu, D. Das ultrarote Absorptionsspektrum des Methylenbromiddampfes 117, 589.
- Barnóthy, J. Über den Wertebereich der physikalischen Mengen. I. 120, 148.
- Bartholomeyczzyk, W. Townsend-sche Zündbedingung und Aufbauzeit einer Entladung 116, 235.
- , Funk, W. und Seeliger, R. Über das Eindringen von Edelgasen in Metalle 117, 651.
- Bay, Z. Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler 117, 227.
- Berichtigung zu „Elektronenvervielfacher als Elektronenzähler“ 117, 544.
- Bechmann, R. Elastische Schwingungen eines anisotropen Körpers von der Form eines rechtwinkligen Parallelepipedes 117, 180.
- Längsschwingungen quadratischer Quarzplatten 118, 515.
  - Längsschwingungen rechteckiger Quarzplatten 120, 107.
- Becker, A. Zur Kenntnis des Selenphotoelements. V. Einwirkung von  $\alpha$ -Strahlen 118, 695.
- und Schaper, Ilsemarie. Zur Gehaltsbestimmung radioaktiver Lösungen 118, 357.
- Bernardini, G. Über die anomale Absorption in Luft und die Lebensdauer des Mesons 120, 413.
- Betz, Hans. Die Diffusion von Wasserstoff durch Eisen in Abhängigkeit von der Oberflächenbeschaffenheit und ihre Beziehung zur Katalyse 117, 100.

- Bezler, R. Zeeman-Effekt des Ar II-Spektrums bei 55000 Gauß **116**, 480.
- Bittel, Heinz. Bemerkung zu der vorhergehenden Veröffentlichung von Salvador Velayos: „Der Einfluß elastischer Druckbelastung auf das Suszeptibilitätsmaximum von Nickel. Die Eigenspannungen“ **116**, 349.
- Björnsthål, Yngve. Beiträge zur Theorie der sogenannten Ellipsoidmethode für Bestimmung von Dielektrizitätskonstanten **118**, 257.
- Thermische Effekte bei Strömungsdoppelbrechung. (Über die obere Grenze der maximal meßbaren Strömungsdoppelbrechung.) **119**, 245.
- Boersch, H. Beugungsversuche mit sehr feinen Elektronenstrahlen **116**, 469.
- Der Einfluß von Kristallgitter-Interferenzen auf die Abbildung im Elektronenmikroskop **118**, 706.
- Berechnung von Debye-Scherrer-Diagrammen kleinster Kristalle nach der Gasinterferenzmethode **119**, 154.
- Bomke, H. und Reddemann, H. Absorption langsamer Neutronen in seltenen Erden und in Cadmium **120**, 56.
- Bonhoeffer, K. F. und Renneberg, W. Über Aktivitätswellen auf passiven Eisendrähnen **118**, 389.
- Bongartz, H.'s. Fucks, W. **120**, 468.
- Borgnis, F. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Energie monochromatischer elektromagnetischer Wellen in dielektrischen Medien **117**, 642.
- Born, Heinz. Zur Frage der Absorptionsmessung im Ultraschallgebiet **120**, 383.
- Borries, B. v. Sublichtmikroskopische Auflösungen bei der Abbildung von Oberflächen im Übermikroskop **116**, 370.
- Über die Intensitätsverhältnisse am Übermikroskop. III. Mitteilung: Eignung und Empfindlichkeitsgrenzen photographischer Platten für übermikroskopische Aufnahmen **119**, 498.
- Borries, B. v. und Ruska, E. Der Einfluß der Strahlspannung auf das übermikroskopische Bild **116**, 249.
- Bothe, W. Einige Diffusionsprobleme **118**, 401.
- Die Diffusion von einer Punktquelle aus. (Nachtrag zu der Arbeit „Einige Diffusionsprobleme.“) **119**, 493.
- Zur Methodik der Neutronensonden **120**, 437.
- und Gentner, W. Die Energiegrenze der Spaltungsneutronen aus Uran **119**, 568.
- Bruin, T. L. de, Klinkenberg, P. F. A. und Schurrmans, Ph. Das Th III-Spektrum **118**, 58.
- Budó, A. s. Kovács, I. **117**, 612.
- und Kovács, J. Intensitätsverteilung in den Quartett-Dublett-Banden. I. **116**, 693.
- Cario, G. und Stille, U. Bestimmung und Deutung der Schichtgrenzen der Natrium-Fluoreszenzstrahlung im Dämmerungsleuchten **116**, 122.
- Cocconi, G. und Tongiorgi, V. Die Elektronenkomponente der Ultrastrahlung und die Instabilität des Mesotrons **118**, 88.
- Costa, H. Über die Nachlieferungselektronen durch Photoeffekt in einer unselbständigen Gasentladung in Luft **116**, 508.
- Dahl, Odd. Bemerkung zu der Arbeit von L. Fauldrath: Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren **117**, 543.
- Dahlke, W. und Hettner, G. Die Leistungsgrenze thermischer Strahlungsmeßinstrumente **117**, 74.
- Dehlinger, U. und Kochendörfer, A. Eigenbewegungen in Kristallgittern **116**, 576.
- Dehmelt, F.-W. s. Suhrmann, R. **118**, 677.
- Dosse, J. Strenge Berechnung magnetischer Linsen mit unsymmetrischer Feldform nach  $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$  **117**, 316.

- Dosse, J. Zur Ausmessung des Feldes magnetischer Elektronenlinsen 117, 437.
- Über optische Kenngrößen starker Elektronenlinsen 117, 722.
- Ergänzung zur Arbeit „Über optische Kenngrößen starker Elektronenlinsen“ 118, 375.
- und Müller, H. O. Zum Auflösungsvermögen der Emissionsmikroskope 119, 415.
- Dravnieks, A. s. Straumanis, M. 120, 47.
- Eckart, F. und Schmidt, A. Zur spektralen Empfindlichkeitsverteilung von Selen-Sperrschichtzellen 118, 199.
- Euler, H. Über die Beobachtung von Luftschauern und Kernzertrümmungen der kosmischen Strahlung in der Ionisationskammer 116, 73.
- Ewald, H. s. Mattauch, J. 120, 598.
- Fassbender, J. s. Weizel, W. 120, 252.
- Fauldrath, L. Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren 116, 701.
- Berichtigung zu „Verwendung einer rotierenden Scheibe zum Ladungstransport in elektrostatischen Hochspannungsgeneratoren“ 117, 412.
- Fetz, H. Über die Kathodenzerstäubung bei schiefem Aufprall der Ionen 119, 590.
- Finkelnburg, W. Anodenfall, Anodenabbau und Theorie des Hochstromkohlebogens. (Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. IV.) 116, 214.
- und Schluge, H. Die spektrale Energieverteilung der Strahlung der Hochstromkohlebögen. (Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. VI.) 119, 206; Berichtigung 119, 527.
- s. Schluge, H. 117, 344.
- Flammersfeld, A., Jensen, P. und Gentner, W. Die Aufteilungsverhältnisse und Energietönungen bei der Uranspaltung 120, 450.
- Flügge, S. Einige zusätzliche Überlegungen zu einer Arbeit von Herrn Mattauch 117, 255.
- Fuchs, J. Zur Deutung der sonnenbeschienenen Nordlichter 119, 136.
- Fucks, W. und Bongartz, H. Zündkanalquerschnitt und Zündung mit querschnittsbegrenzter Bestrahlung 120, 468.
- und Kettel, F. Zündung in Wasserstoff 116, 657.
- Fues, E. Gibt es Wirbelreibung? 118, 409.
- Fujioka, Yoshio. Molekülspektren des D<sub>2</sub>-Wasserstoffs im ultravioletten Gebiet und Isotopeneffekt des D<sub>2</sub>-Normalzustandes 119, 182.
- Funk, W. s. Bartholomeyczzyk, W. 117, 651.
- Gabler, Fritz. Neue Untersuchungen über magnetische Drehung in doppelbrechenden Medien 116, 271.
- Magnetische Doppelbrechung an Alkalimetalldämpfen 116, 495.
- und Sokol, P. Der Einfluß der Reflexion auf die Wirkung doppelbrechender Platten 116, 47.
- Gentner, W. s. Bothe, W. 119, 568.
- s. Flammersfeld, A. 120, 450.
- Gerö, L. Zur Vervollständigung des Termschemas von Bleihydrid 116, 379.
- Das Bandenspektrum des CD-Moleküls 117, 709.
- Vervollständigung der Analyse der CH-Banden 118, 27.
- und Schmid, R. Über die Deutung der Störungen in Stickstoffbanden 116, 246.
- — Rotationsanalyse der IV. positiven Banden des N<sub>2</sub>-Moleküls. (Zugleich Meßergebnisse der Dissertation von Edith Jegesi enthaltend.) 116, 598.
- — Prädissoziationserscheinungen in den CH- und CD-Banden 118, 210.
- — Über Dissoziation isotoper Moleküle 118, 250.
- Gerthsen, Chr. und Grimm, E. Der Ionisierungsaufwand von radioaktiven Rückstoßatomen 120, 476.
- Glaser, Walter. Über ein von sphärischer Abberation freies Magnetfeld 116, 19.



- Glaser, Walter. Die Farbabweichung bei Elektronenlinsen 116, 56.
- Über den Öffnungsfehler der Elektronenlinsen. Bemerkungen zu obiger Erwiderung 116, 734.
  - Zur Herleitung der Geschwindigkeitsformel in der Elektronentheorie der Metalle 117, 20.
  - Strenge Berechnung magnetischer Linsen der Feldform  $H = \frac{H_0}{1 + (z/a)^2}$  117, 285.
  - Berichtigung zu „Über die Ablenkfehler von elektrischen und magnetischen Ablensystemen“ 117, 412.
  - Über die zu einem vorgegebenen Magnetfeld gehörende Windungsdichte einer Kreisspule 118, 264.
  - Bemerkung zu der Arbeit „Bose-Einstein statistics and degeneracy“ von D. S. Kothari und B. N. Singh 118, 727.
  - Über elektronenoptische Abbildung bei gestörter Rotationssymmetrie 120, 1.
- Görlich, P. Messungen an zusammengesetzten Photokathoden. II. 116, 704.
- Gölz, E. Übermikroskopische Feinstrukturen an Glasbruchflächen 120, 773.
- Gombás, Paul. Zur Berechnung der Eigenfunktion und. Energie des Grundzustandes der Valenzelektronen in Erdalkaliatomen 116, 184.
- Über die Bindung des metallischen Calciums 117, 322.
  - Über eine vereinfachte Formulierung der Besetzungsvorschrift der Quantenzustände von Atomen und deren Anwendung zur Bestimmung der Atomkerne 118, 164.
  - Zur Berechnung von Atomtermen 119, 318.
- Gora, E. Quantentheorie der Strahlungsdämpfung 120, 121.
- Gorodetzky, S. s. Leprince-Ringuet, L. 120, 588.
- Gotthardt, E. Zur räumlichen Ausmessung von Objekten mit dem Elektronenmikroskop 118, 714.
- Grimm, E. s. Gerthsen, Chr. 120, 476.
- Günther, F. s. Ardenne, M. von 119, 352.
- Güntherschulze, A. Neue Untersuchungen über die Kathodenzerstäubung der Glimmentladung. I. Die primäre Verdampfung des Cu 118, 145. II. Die Bestimmung des Randfaktors. III. Die unvollständige Bedeckung der Kathode der anomalen Glimmentladung. IV. Die Ausbreitung der primär verdampften Teilchen 119, 79.
- und Tollmien, W. „Neue Untersuchungen über die Kathodenzerstäubung der Glimmentladung.“ V. Die Oberflächenbeschaffenheit der Kathode 119, 685.
- Guttenberg, W. von. Die radiale Ausbreitung organischer Flüssigkeiten auf einer Wasseroberfläche 118, 22.
- Hacman, D. und Haxel, O. Energie und Reichweite langsamer  $\alpha$ -Strahlen 120, 486.
- Haefel, R. Experimentelle Untersuchungen zur Prüfung der wellenmechanischen Theorie der Feldelektronenemission 116, 604.
- Haenzel, G. Die Polygonfläche und das periodische System der Elemente 120, 283.
- Hahn, O. s. Mattauach, J. 120, 598.
- und Strassmann, Fritz. Über die bei der Uranspaltung auftretenden Molybdän-Isotope 117, 789.
- Hahnemann, H. und Hübner, H.-J. Bemerkung zu der Veröffentlichung von W. Lochte-Holtgreven und H. Maecker „Über eine neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens“ 117, 409.
- Harteck, P. und Jensen, H. Zur Reaktionsgeschwindigkeit bei kolloidalen Katalysatoren 118, 416.
- Havlíček, F. J. Zum Verhalten des spezifischen Volumens von Gasen und Flüssigkeiten 119, 677.
- Haxel, O. und Volz, H. Über die Absorption von Neutronen in wässrigen Lösungen 120, 493.
- s. Hacman, D. 120, 486.
- Heil, Hans. Über eine neue Ionenquelle 120, 212.



- Heise, F. Erregungs- und Transportvorgänge an einer selbsterregenden van den Graaff-Maschine 116, 317.
- Heisenberg, W. Die „beobachtbaren Größen“ in der Theorie der Elementarteilchen 120, 513; II. 120, 673.
- Helbig, E. Über die Druckabhängigkeit der Kolonnenionisation durch  $\alpha$ -Strahlen 116, 444.
- Hellwege, K.-H. Über die Strahlungsfelder von  $\text{Pr}^{+++}$ - und  $\text{Nd}^{+++}$ -Ionen in hexagonalen Salzkristallen 117, 198.
- Über das Absorptionsspektrum des dampfförmigen Chromoxyfluorids 117, 596.
- Zur Ausmessung atomarer Strahlungsfelder in Kristallen 119, 325.
- Hendus, H. Die Struktur des explosiven Antimons und des glasigen Selen 119, 265.
- Hettner, G. s. Dahlke, W. 117, 74.
- Hinderer, H. Experimentelle Untersuchungen über das Auflösungsvermögen von Leuchtschirmen 119, 397.
- und Walter, Arno. Zur Druckabhängigkeit der Gleichspannungskorona 117, 213.
- Hintenberger, H. Über die elektrischen Eigenschaften des Bleisulfids 119, 1.
- Hönl, H. und Papapetrou, A. Über die innere Bewegung des Elektrons. III. 116, 153.
- Hoffmann, Arnulf. Die Bestimmung der Lebensdauer metastabiler Anregungszustände des Neons aus Reststrommessungen in Glimmentladungen 119, 223.
- , G. Über den Nachweis von Kernzertrümmerungen der kosmischen Strahlung mit der Ionisationskammer 119, 35.
- Hole, H., Holtsmark, J. und Tangen, R. Die Gammastrahlung der leichten Elemente bei Protonenbestrahlung 118, 48.
- Holleck, Ludwig. Statistik der Isotopenverteilung in kondensierten Partikeln. Diskussion der Voraussetzungen für eine Isotopentrennung auf Grund von Dichteschwankungen kondensierter Teilchen 116, 624.
- Holleck, Ludwig. Zur Statistik der Isotopenverteilung in kondensierten Partikeln 118, 340.
- Holtsmark, J. s. Hole, N. 118, 48.
- Hopf, H. Wasserdampfabsorptionslinien im Spektralgebiet von 0,15 bis 0,5 mm Wellenlänge 116, 310.
- Houtermans, Fritz G. Über Wirkungsquerschnitte einiger Elemente für thermische Neutronen 118, 424.
- Hübner, H.-J. s. Hahnemann, H. 117, 409.
- Hüniger, M. und Rudolph, J. Über den Aufbau zinnhaltiger Halogenid-leuchtstoffe 117, 81.
- Hund, F. Materieerzeugung im anschaulichen und im gequantelten Wellenbild der Materie 117, 1.
- Über eine Symmetrieeigenschaft der Wellentheorie der Materie 118, 426.
- Ievins, A. und Straumanis, M. Die Gitterkonstanten des Kalkspats, bestimmt nach der Drehkristallmethode 116, 194.
- Ikawa, M. s. Nishina, Y. 119, 195.
- Iskraut, Richard. Über den Compton-Effekt an Mesonen 118, 181.
- Bemerkungen zum Energie-Impuls-Tensor der Feldtheorie der Materie 119, 659.
- Itoh, Junkichi s. Kikuchi, Seishi 119, 185.
- Jagodzinski, Heinz. Über die Druckabhängigkeit der Anregungstemperatur in der Lichtbogensäule 120, 318.
- Jenckel, Ludolf und Kopfermann, Hans. Über eine Methode zur Beobachtung sehr kleiner Stark-Effekte 117, 145.
- Jensen, H. s. Harteck, P. 118, 416.
- , P. s. Flammersfeld, A. 120, 450.
- Jentschke, Willibald. Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit Neutronen 120, 165.
- und Prankl, Friedrich. Energien und Massen der Urankernbruchstücke bei Bestrahlung mit vorwiegend thermischen Neutronen 119, 696.
- s. Stetter, Georg 120, 639.

- Jordan, P. Zur Deutung der sonnenbeschienenen Nordlichter 118, 441.
- Karabascheff, N. Zur Einwanderung von Elektronen in Alkalihalogenidkristalle 118, 718.
- Kempton, Hans. Quantitative Absorptionsmessungen an Benzol und Benzolderivaten im nahen Ultravioletten 116, 1.
- Kerkhof, Frank. Eine Gegentakt-schaltung für Gleichspannungsverstärkung 119, 43.
- Kettel, F. s. Fucks, W. 116, 657.
- Kienle, H. Über die Lage der weißen Zwerge im empirischen Zustandsdiagramm der Sterne 118, 443.
- Kikuchi, Seishi, Watase, Yuzuru und Itoh, Junkichi. Über die Winkelabhängigkeit der zwei  $\gamma$ -Quanten, die von einem Atomkern kaskadenweise ausgestrahlt werden 119, 185.
- Kimura, K. s. Nishina, Y. 119, 195.
- Kirchhoff, W. Messung von Abklingzeiten bei der Fluoreszenz 116, 115.
- Klinkenberg, P. F. A. s. Bruin, T. L. de 118, 58.
- Kluge, W. und Steyskal, H. Beiträge zur Elektronik an natürlichen Spaltflächen von Metalleinkristallen. I. Bildung von Zinkeinkristallspaltflächen im Hochvakuum und einführnde lechtelektrische Messungen 116, 415.
- Knauer, Fr. Vergleichende Messungen des Aktivierungsquerschnittes von Jod in verschiedenen Formen für Neutronen 120, 103.
- Knoll, M. Zum Verhalten von Leuchtstoffen bei intermittierender Elektronenbestrahlung 116, 385.
- Koch, Karl Michael. Versuch einer elektronenphysikalischen Deutung des Meissner - Ochsenfeld - Effektes 116, 586.
- Grundsätzliches zu einigen Beobachtungen an supraleitenden Hohlkörpern 118, 1.
- Ein neuer Versuch zur Deutung des Meissner-Ochsenfeld-Effektes und die „Keim“-Theorie der Supraleitung 120, 86.
- Kochendörfer, A. s. Dehlinger, U. 116, 576.
- Kohler, Max. Die Wärmeleitfähigkeit und die thermoelektrischen, galvanomagnetischen und thermomagnetischen Effekte des isotropen Metalles im transversalen Magnetfeld 118, 37.
- Über den Zusammenhang zwischen dem isothermen und dem adiabatischen Etingshausen-Nernst-Koeffizienten 118, 312.
- Kolhörster, Werner. Zur Ermittlung von Höhenstrahlenkoinzidenzen 120, 539.
- Kónya, A. s. Kozma, B. 118, 153.
- Kopfermann, Hans und Otzen, Christian. Über den Stark-Effekt der Strontium-I-Resonanzlinie  $\lambda = 4607 \text{ \AA}$  117, 156.
- s. Jenckel, Rudolf 117, 145
- und Paul, W. Über den inversen Stark-Effekt der D-Linien des Natriums 120, 545.
- Kossel, W., Ackermann, I. und Möllenstedt, G. Symmetrisch angeregte Elektroneninterferenzen 120, 553.
- Kovács, I. und Budó, A. Intensitätsverteilung in den Quartett-Dublett-Banden. II. 117, 612.
- , J. s. Budó, A. 116, 693.
- Koyenuma, N. Zur Theorie der Kernisomerie 117, 358.
- Zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung. I. 117, 510.
- Über die Verdoppelung des Zellkerns bzw. Gens und die gesamte Genzahl im Kern bzw. Chromosom 119, 522.
- Beiträge zur Theorie der biologischen Strahlenwirkung 120, 185.
- Kozma, B. und Kónya, A. Berechnung mehrerer Terme der Na- und K-Atome und des Grundtermes der  $\text{Al}^+$ - und  $\text{Al}^{++}$ -Ionen 118, 153.
- Kreuzer, Josef. Das Spektrum normaler primärer Alkohole zwischen 14000 und 9000  $\text{cm}^{-1}$  118, 325.
- Kronig, R. Zur Theorie des elektrischen Durchschlags in Flüssigkeiten einfacher Struktur 118, 462.

- Kulenkampff, Helmuth. Betrachtungen über die harte Komponente der kosmischen Strahlung 120, 561.
- Kundt, W. s. Suhrmann, R. 120, 363.
- Kutzner, Walther. Phosphoreszenz- und Szintillationsspektren 117, 575.
- Laue, M. v. Über die theoretische Bedeutung der Justi-Zicknerschen Versuche über Stromverzweigungen in Supraleitern 118, 455.
- Nochmals über Stromverteilung in Supraleitern 120, 578.
- Leimberger, E. Die Steuerung von edelgasgefüllten Niederdruck-Bogenentladungen mit Hilfe eines Gitters im Plasma der Entladung 117, 621.
- Leisegang, S. Nebelkammer-Untersuchungen über die harte Sekundärstrahlung der kosmischen Strahlung 116, 515.
- Leprieux-Ringuet, L., Nageotte, E., Gorodetzky, S. und Richard-Foy, R. Direkte Massenbestimmung eines Mesotrons mit Hilfe des elastischen Stoßes 120, 588.
- Lichtblau, H. und Mattauch, J. Die Isotopenverteilung von Molybdän und die Gültigkeit des Reziprozitätsgesetzes 117, 502.
- Liempt, J. A. M. v. und Vriend, J. A. de. Die Schmelzzeit von Schmelzsicherungen. III. 117, 18.
- Lochte-Holtgreven, W. Erwiderung zu der Bemerkung der Herren H. Hahnemann und H.-J. Hübner 117, 411.
- und Maecker, H. Über eine neue Entladungsform des stabilisierten Lichtbogens 116, 267.
- Lohr, E. Ein thermodynamischer Weg zum Planckschen Strahlungsgesetz 116, 454.
- Maecker, H. Das kontinuierliche Spektrum des Kohlelichtbogens. II. 116, 257.
- s. Lochte-Holtgreven, W. 116, 267.
- Magnus, Wilhelm. Über die Beugung elektromagnetischer Wellen an einer Halbebene 117, 168.
- Zur Theorie des zylindrisch-parabolischen Spiegels 118, 343.
- Mannkopff, R. Die Berechnung der Lichtbogentemperatur und das Stabilitätsproblem der Lichtbogensäule 120, 228.
- Über den Energietransport durch Strahlung der Resonanzlinien in Gasen 120, 301.
- March, A. Raum, Zeit und Naturgesetze 117, 413.
- Raum, Zeit und Naturgesetze 119 100.
- Maresch, Elfriede s. Stetter, Georg 120, 639.
- Mattauch, J. Über das Auftreten von isomeren Atomkernen 117, 246.
- , Ewald, H., Hahn, O. und Strassmann, F. Hat ein Caesium-Isotop langer Halbwertszeit existiert? Ein Beitrag zur Deutung ungewöhnlicher Linien in der Massenspektrographie 120, 598.
- s. Lichtblau, H. 117, 502.
- Maurer, Georg. Der langwellige selektive Photoeffekt an Überschuhalleitern 118, 104.
- Die Sekundärelektronenemission von Halbleitern bzw. Isolatoren 118, 122.
- Maurer, Werner s. Mehnert, Karl 117, 55.
- und Ramm, W. Untersuchung über das „19-Minuten“-Isotop von Molybdän und das daraus entstehende Isotop von Element 43 119, 334.
- — Künstlich radioaktive Isotope bei Blei und seinen Nachbar-elementen unter Verwendung von Uran- und Thorblei 119, 602.
- Mecklenburg, W. Über das elektrostatische Emissions-Übermikroskop 120, 21.
- Mehnert, Karl. Lichtanregung in leichtem und schwerem Wasserstoff durch Caesiumionen von 2500 bis 25000 e-Volt 117, 41.
- und Maurer, Werner. Umladung mit gleichzeitiger Anregung beim Alkaliionenstoß gegen Wasserstoff Helium und Quecksilber 117, 55.
- Meissner, Joh. Über den Einfluß der metastabilen Anregungszustände auf die normale Stromdichte und den

- normalen Kathodenfall der Glimmentladung in Edelgasen und Edelgasgemischen 117, 325.
- Michel, G. Zum Grundproblem der atmosphärischen Elektrizität 117, 205.
- Mizushima, San-ichiro und Morino, Yonezo. Über die innermolekulare Drehbarkeit bei einfacher Kohlenstoff-Kohlenstoffbindung 119, 188.
- Möglich, F. und Rompe, R. Zur Statistik der Vielfachstöße 117, 119.
- — Über den Einfluß der Wärme-  
dehnung auf das Absorptionsspektrum von Isolatoren 119, 472.
- — Strahlungseigenschaften und Energieausbreitung bei dicht gelagerten, gleichartigen Atomen 120, 741.
- Möllenstedt, G. s. Kossel W. 120, 553.
- Mohr, Ernst. Bemerkungen zu der Arbeit von E. Fues: „Gibt es Wirbelreibung?“ 119, 575.
- Mollwo, E. Zum Nachweis von Interferenzerscheinungen durch Streuteilchen im Interferenzfeld 120, 618.
- Morino, Yonezo s. Mizushima, San-ichiro 119, 188.
- Müller, Erwin W. Zur Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen bei der Feldemission 120, 261.
- Das Auflösungsvermögen des Feldelektronenmikroskops 120, 270.
- , H. O. s. Dosse, J. 119, 415.
- Nageotte, E. s. Leprince-Ringuet, L. 120, 588.
- Neugebauer, N. s. Rumpf, E. 118, 317.
- , Th. Über den vom Elektronenspin herrührenden Paramagnetismus der Moleküle 116, 428.
- Über die Lichtzerstreuung und die Kerr-Konstante von kugelsymmetrischen Molekülen 119, 114.
- Der absolute Diamagnetismus der Supraleiter 119, 581.
- Nishina, Y., Kimura, K., Yasaki, T. und Ikawa, M. Einige Spaltprodukte aus der Bestrahlung des Urans mit schnellen Neutronen 119, 195.
- Novobatzky, K. F. Lichtbeugung an schwarzen Schirmen 119, 102.
- Oka, S. Zur Theorie der akustischen Doppelbrechung von kolloidalen Lösungen 116, 632.
- Otzen, Christian s. Kopfermann, Hans 117, 156.
- Paetow, H. Eine neue, bei sehr niedrigen Drucken auftretende Form der Feldelektronenemission an Metalloberflächen, die mit isolierenden Stoffen bestäubt sind 117, 399.
- Papapetrou, A. Gravitationswirkungen zwischen Pol - Dipol - Teilchen 116, 298.
- s. Hönl, H. 116, 153.
- Paul, Wolfgang. Eine Atomstrahlapparatur zur lichtstarken Anregung schwer verdampfbarer Elemente 117, 774.
- Paul, W. s. Kopfermann, H. 120, 545.
- Péter, Gy. Berechnung der Energie des (4s, 5s)-Triplett-S-Zustandes des Ca-Atoms 119, 713.
- Podszus, E. Siedepunkt der Kohle und Hochstrombogen 116, 352.
- Prankl, Friedrich s. Jentschke, Willibald 119, 696.
- Prietzschk, A. Röntgenuntersuchungen an unterkühltem Äthylalkohol 117, 482.
- Raether, H. Über den Aufbau von Gasentladungen. I. 117, 375; II. 117, 524.
- Rajewsky, B. Das Gaiger-Müller-Zählrohr im Dienste des Bergbaues 120, 627.
- Ramm, W. s. Maurer, W. 119, 334, 602.
- Rau, Walter. Die solare Halbtagesperiode der kosmischen Ultrastrahlung am Äquator 116, 105.
- Rauch, Walter. Die ultravioletten Dispersionsfrequenzen der Alkalioxyde 116, 652.
- Rebsch, Robert. Über den Öffnungsfehler der Elektronenlinsen. Eine Erwiderung auf eine Arbeit von W. Glaser 116, 729.
- Recknagel, A. Über die sphärische Aberration bei elektronenoptischer Abbildung 117, 67.



- Recknagel, A. Theorie des elektrischen Elektronenmikroskops für Selbststrahler 117, 689.
- Das Auflösungsvermögen des Elektronenmikroskops für Selbststrahler 120, 331.
- Reddemann, H. Zur Kernisomerie des Strontiums 116, 137.
- s. Bomke, H. 120, 56.
- Reichenbacher, Ernst. Die Erzeugung des Schwerfeldes 119, 630.
- Richard-Foy, R. s. Leprince-Ringuet, L. 120, 588.
- Richter, G. Zur Geschwindigkeitsverteilung der Feldelektronen 119, 406.
- Riemann, W. Aufnahmen von Elektronenlawinen in der Nebelkammer 120, 16.
- Renneberg, W. s. Bonhoeffer, K. F. 118, 389.
- Rompe, R. s. Möglich, F. 117, 119; 119, 472; 120, 741.
- und Schulz, P. Zur Eigendruckverbreiterung der Quecksilberlinien 118, 269.
- und Weizel, W. Über die Bedeutung des Steenbeckschen Minimumprinzips 120, 31.
- s. Weizel, W. 117, 545; 119, 237, 366.
- Rogowski, W. Lawinenprodukte, Durchschlagsenkung und fallende Charakteristik 117, 265.
- Rohloff, E. Über die innere Reibung von Geigenholz 117, 64.
- Roßbach, P. und Seeliger, R. Bemerkung über die sogenannte minimale Brennspannung 116, 68.
- Rudolph, J. s. Hüniger, M. 117, 81.
- Rumpf, E. und Neugebauer, N. Über Beobachtungen an kleinen Flüssigkeitströpfchen. II. 118, 317.
- Ruska, E. und Müller, H. O. Über Fortschritte bei der Abbildung elektronenbestrahlter Oberflächen 116, 366.
- s. Borries, B. v. 116, 249.
- Schachinger, Erich † s. Stetter, Georg 120, 639.
- Schaper, Ilsemarie s. Becker, A. 118, 695.
- Scheffers, H. Bemerkungen zur allgemeinen Schwankungstheorie 117, 444.
- Scherzer, O. Die unteren Grenzen der Brennweite und des chromatischen Fehlers von magnetischen Elektronenlinsen 118, 461.
- Schiebold, E. s. Ardenne, M. von 119, 352.
- Schluge, H. und Finkelnburg, W. Strahlungsausbeute, Farbe und Temperatur des Beck-Bogens. Untersuchungen über Hochstromkohlebögen. V. 117, 344.
- s. Finkelnburg, W. 119, 206.
- Schmid, Hans. Die Verteilungs- und Auslösekurven der Ultrastrahlungsstöße beim Übergang von Luft nach Blei, Eisen, Aluminium 117, 452.
- , R. s. Gerö, L. 116, 246, 598; 118, 210, 250.
- Schmidt, Annemarie. Messungen an Selen-Gleichrichtern und -Sperrschichtzellen. (Ein experimenteller Beitrag zur Schottkyschen Randschicht-Theorie.) 117, 754.
- s. Eckart, F. 118, 199.
- , Richard W. Über Wachstums- und Abbauförmungen von Wolframkristallen, insbesondere über den Gleichstromeffekt 120, 69.
- Schnackenberg, H. s. Suhrmann, R. 119, 287.
- Schön, Michael. Zum Leuchtmechanismus der Kristallphosphore 119, 463.
- Schottky, W. Vereinfachte und erweiterte Theorie der Randschichtgleichrichter 118, 539.
- Schulz, P. Zur kontinuierlichen Strahlung der Quecksilber-Hochdrucksäule 119, 167.
- s. Rompe, R. 118, 269.
- s. Weizel, W. 117, 545; 119, 237.
- Schuermans, Ph. s. Bruin, T. L. de 118, 58.
- Schwarz, Helmut. Der Mechanismus der elektrischen Gasauzehrung bei Drucken unterhalb  $10^{-4}$  Torr 117, 23.

- Schwiecker, Werner. Über die ultraviolette Strahlung einer unselbständigen Gasentladung 116, 562.
- Seeliger, R. Zur Deutung des Steenbeckschen Minimumprinzips 116, 207.
- Zur Theorie der Elektronen-Plasmaschwingungen 118, 618.
  - Zur Theorie der Kathodenzerstörung 119, 482.
  - s. Bartholomeyczzyk, W. 117, 651.
  - s. Roßbach, P. 116, 68.
- Seemann, H. Die Regelflächen der Raumgitterinterferenzen und ihre wichtigsten ebenen Schnitte als Einkristalldiagrammkurven 119, 374.
- Seidl, F. Elektrische Leitfähigkeit flüssiger Dielektrika und ihre Änderung durch Ultraschall 116, 359.
- Siegert, B. Messung der weichen Ultrastrahlungskomponente hinter verschiedenen Materialien zur Bestimmung des Anteils der Zerfallselektronen 118, 217.
- Smekal, Adolf. Über mechanische und optische „Erregung“ von Farbzentren 116, 525.
- Sohm, Monica. Über die Absorption von flüssigem  $H_2O$  und  $D_2O$  im ultraroten Spektralgebiet zwischen  $5\ \mu$  und  $27\ \mu$  116, 34.
- Sokob, P. s. Gabler, F. 116, 47.
- Sommerfeld, A. Zur Theorie der Feinstruktur des Wasserstoffs 118, 295.
- Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung 118, 467.
- Stetter, Georg (nach Versuchen gemeinsam mit Jentschke, Willibald, Schachinger, Erich† und Maresch, Elfriede). Die Ionisation einzelner Alpha-Strahlen in verschiedenen Gasen 120, 639.
- Steyskal, H. s. Kluge, W. 116, 415.
- Stille, U. Über die Ionisationsspannung des Stickstoffmoleküls 116, 144.
- Wahrscheinlicher Fehler und Fehlergrenze in Anwendung auf das Problem der Atomkonstanten 120, 703.
  - s. Cario, G. 116, 122.
- Stranski, I. N. Über das Verhalten nichtpolarer Kristalle dicht unterhalb des Schmelzpunktes und beim Schmelzpunkt selbst 119, 22.
- Strassmann, Fritz s. Hahn, Otto 117, 789.
- s. Mattauch, J. 120, 598.
- Straumanis, M. (unter Mitarbeit von Dravnieks, A.). Die Steigerung der Intensität offener Röntgenröhren durch bewegliche Anoden 120, 47.
- s. Ievins, A. 116, 194.
- Stuhlinger, E. Die Auslösung einzelner Sekundärelektronen durch Mesotronen und Elektronen 116, 281.
- Suhrmann, R. und Dehmelt, F.-W. Über die Änderung der glühelektrischen und lichtelektrischen Emissionskonstanten von Silberoxyd-Caesium-Kathoden während der Aktivierung 118, 677.
- und Kundt, W. Über die Sekundäremission reiner Metallschichten im ungeordneten und geordneten Zustand und deren Durchlässigkeit für Sekundärelektronen 120, 363.
  - und Schnackenberg, H. Über den Reaktionsablauf beim Übergang reiner Metallschichten aus dem ungeordneten in den geordneten Zustand 119, 287.
- Supek, Ivan. Über die elektrische Leitfähigkeit der Metalle 117, 125.
- Tangen, R. s. Hole, N. 118, 48.
- Tollmien, W. s. Güntherschulze, A. 119, 185.
- Tongiorgi, V. s. Cocconi, G. 118, 88.
- Trost, Adolf. Eine Methode zur Messung hoher Strahlungsintensitäten mit dem Zählrohr 117, 257.
- Urban, P. Über die Streuung von schnellen Elektronen an Kernen 119, 67.
- Velayos, Salvador. Der Einfluß elastischer Druckbelastung auf das Suszeptibilitätsmaximum von Nickel. Die Eigenspannungen 116, 340.
- Volz, H. s. Haxel, O. 120, 493.
- Vriend, J. A. de s. Liempt, J. A. M. v. 117, 18.



- Waerden, B. L. van der.** Die lange Reichweite der regelmäßigen Atom-anordnung in Mischkristallen 118, 473.
- Wallauschek, Richard.** Elektronen-optische Fokussierung durch quasi-statische Bahnen 117, 565.
- Walter, Arno s. Hinderer, Hermann** 117, 213.
- Watase, Yuzuru s. Kikuchi, Seishi** 119, 185.
- Weiss, Carlfriedrich.** Zur Frage der als Normale festgelegten Radium-standards 120, 652.
- Weizel, W. und Fassbender, J.** Über die Vorgänge an der Anode eines zischenden Homogenkohlebogens 120, 252.
- s. Rompe, R. 120, 31.
- , Rompe, R. und Schulz, P. Zur Theorie der nicht-stationären Entladungen. I. Die Modulation des Hochdruckbogens durch eine dem Gleichstrom überlagerte Wechselstromkomponente 117, 545.
- — — Zur Theorie der nichtstationären Entladungen. II. Die Licht-emission eines modulierten Hochdruckbogens 119, 237.
- — — Zur Brennfleckbildung beim Lichtbogen 119, 366.
- Weizsäcker, C. F. von.** Zur Deutung der Quantenmechanik 118, 489.
- Wendt, Georg.** Chromatische Abweichung elektronenoptischer Abbildungssysteme 116, 436.
- Bildfehler bei Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels in zwei gekreuzten Ablenkkeldern 118, 593.
- Fehler bei Ablenkung eines Kathodenstrahlbündels durch einfachsymmetrische Ablenkorgane 119, 423.
- Zur Dioptrik elektronenoptischer Geräte mit beliebig gekrümmten Abbildungsachsen 120, 720.
- Wentzel, G.** Beiträge zur Paartheorie der Kernkräfte 118, 277.
- Westphal, Wilhelm H.** Zur Definition der magnetischen Größen 119, 164.
- Winkler, E.** Die Temperaturabhängigkeit der Strömungsdoppelbrechung von Benzol 118, 232.
- Wirtz, K.** Über die van't Hoff'sche Theorie des Soret-Effektes 118, 510.
- Wittke, Heinz.** Interferometrische Untersuchungen an kondensierten Hohlkathodenentladungen 116, 547.
- Yasaki, T. s. Nishina, Y.** 119, 195.
- Yukawa, H.** Bemerkungen über die Natur des Mesotrons 119, 201.
- Ziegler, R.** Quantitative photographische Absorptionmessungen an den CH-Banden aliphatischer Alkohole bei  $29100 \text{ \AA}$  116, 716.









THE UNIVERSITY OF ILLINOIS AT CHICAGO



3 8198 318 811 484



